

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЯ В КВАДРАТНОЙ КАВЕРНЕ ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА

СИДОРОВ М.В.

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса. Приближенное решение строится с помощью структурно-вариационного метода.

Рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне. Верхняя "крышка" каверны движется влево с постоянной скоростью  $u = -1$ , остальные части каверны неподвижны. Систему координат выберем таким образом, чтобы ее начало совпало с левым нижним углом каверны. Длину стороны каверны положим равной 1. Данная задача сводится к решению следующей краевой задачи [1]:

$$\Delta^2 \psi = 0 \text{ в } \Omega = (0, 1) \times (0, 1); \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0, & x=0, x=1, y=0; \\ -1, & y=1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ;  $\psi(x, y)$  — функции тока, следовательно,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad (3)$$

$\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Omega$ ;  $\partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ .

В задаче (1), (2) сделаем замену

$$\psi = \varphi_0 + \varphi, \quad (4)$$

где функция  $\varphi_0$  удовлетворяет условиям (2), а  $\varphi$  — новая неизвестная функция. Тогда от (1), (2) переходим к такой краевой задаче:

$$\Delta^2 \varphi = f \text{ в } \Omega = (0, 1) \times (0, 1); \quad (5)$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6)$$

здесь  $f = -\Delta^2 \varphi_0$ .

Известно [2], что задача (5), (6) эквивалентна задаче минимизации в  $W_2^2(\Omega)$  функционала

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx dy - 2 \int_{\Omega} \varphi f dx dy. \quad (7)$$

Используя формулы Грина и условия (6) при  $f = -\Delta^2 \varphi_0$ , функционал (7) можно привести к виду

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dx dy + 2 \int_{\Omega} \Delta\varphi \Delta\varphi_0 dx dy. \quad (7.1)$$

Приближенное решение задачи (5), (6) представим в виде [3]:

$$\varphi_n(x, y) = \omega^2(x, y) \Phi_n(x, y) = \omega^2(x, y) \sum_{\substack{i+k=0 \\ i, k \geq 0}}^n c_{ik} \tau_{ik}(x, y). \quad (8)$$

Здесь функция  $\omega(x, y)$  удовлетворяет условиям:  $\omega > 0$  в  $\Omega$ ,  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$ ,  $|\nabla\omega| = 1$  на  $\partial\Omega$ ;  $\tau_{ik}(x, y)$  — полная система линейно-независимых функций;  $c_{ik}$  — неопределенные коэффициенты.

Для определения постоянных  $c_{ik}$  получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{i+k=0 \\ i, k \geq 0}}^n A_{ik lm} c_{ik} = B_{lm}, \quad (9)$$

$$\text{где } A_{ik lm} = \int_{\Omega} \Delta(\omega^2 \tau_{ik}) \Delta(\omega^2 \tau_{lm}) dx dy,$$

$$B_{lm} = - \int_{\Omega} \Delta\varphi_0 \Delta(\omega^2 \tau_{lm}) dx dy.$$

Матрица системы (9) есть матрица Грамма системы функций  $\{\omega^2 \tau_{ik}\}$  в пространстве  $L_2(\Omega)$  и система уравнений (9) однозначно разрешима [4].

Функции  $\varphi_0(x, y)$  и  $\omega(x, y)$  возьмем в виде

$$\varphi_0(x, y) = \omega(x, y) \frac{xy(1-x)}{x(1-x) + y(1-y)},$$

$$\omega(x, y) = [x(1-x)] \wedge_{\alpha} [y(1-y)],$$

здесь  $\wedge_{\alpha}$  — знак R-конъюнкции [5].

Возвращаясь к неизвестной функции  $\psi(x, y)$ , получаем приближенное решение задачи (1), (2):

$$\psi_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \omega^2(x, y) \sum_{\substack{i+k=0 \\ i, k \geq 0}}^n c_{ik} \tau_{ik}(x, y), \quad (10)$$

которое точно удовлетворяет краевым условиям (2).

В качестве системы функций  $\tau_{ik}(x, y)$  была выбрана следующая:  $\tau_{ik}(x, y) = P_i^*(x) P_k^*(y)$ , где  $P_i^*(x)$  — смещенные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке  $[0, 1]$  [6]. Смещенные полиномы Лежандра выражаются через обычные полиномы Лежандра по формуле

$$P_n^*(x) = (-1)^{n-1} P_n(2x-1).$$

Очевидно, что в силу симметрии (решение симметрично относительно прямой  $x = 0,5$ ) в (10) будут отсутствовать коэффициенты  $c_{ik}$  с нечетными номерами  $i$ .

Вычислительный эксперимент был проведен с помощью пакета Mathematica 4.0© при  $n = 3$  (десять базисных функций),  $n = 4$  (пятнадцать базисных функций) и  $n = 5$  (двадцать одна базисная функция). Коэффициенты  $c_{ik}$  приведены в таблице

( $c_{10} = c_{11} = c_{12} = c_{30} = c_{13} = c_{31} = c_{14} = c_{32} = c_{50} = 0$ ).

$n$	3	4	5
$c_{00}$	0,818283	0,815211	0,815211
$c_{01}$	2,533045	2,533044	2,533174
$c_{02}$	-1,235693	-1,297308	-1,297308
$c_{20}$	1,605523	1,560719	1,560719
$c_{03}$	0,357133	0,335713	0,550449
$c_{21}$	1,495134	1,495135	1,352136
$c_{04}$	—	-0,118781	-0,118781
$c_{22}$	—	0,501913	0,501913
$c_{40}$	—	0,176149	0,176149
$c_{05}$	—	—	0,120085
$c_{23}$	—	—	-1,248981
$c_{41}$	—	—	0,902947

На рис. 1 представлены линии уровня функции  $\psi_5(x, y)$  (т.е. линии тока рассматриваемого течения), а на рис. 2 – линии уровня вихря  $\zeta_5 = -\Delta\psi_5$ .

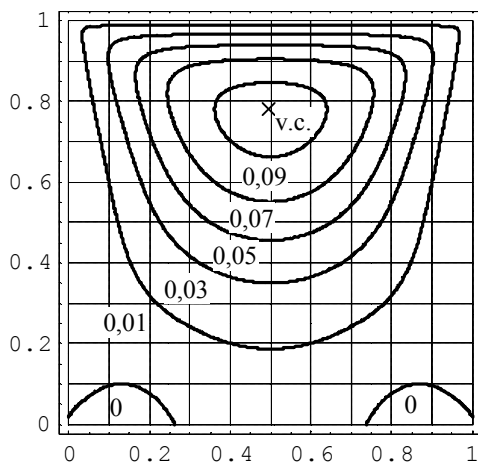


Рис. 1

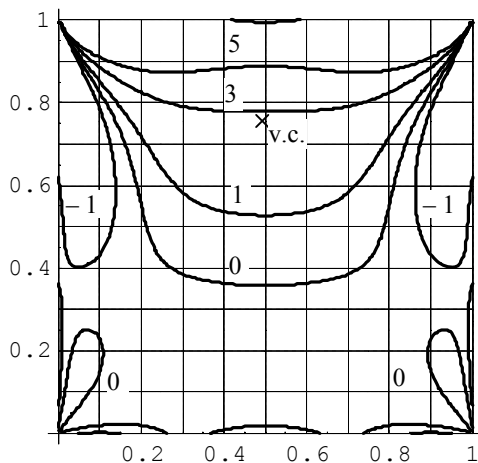


Рис. 2

На прямой  $x = 0,5$  расположена точка (“вихревой центр”), в которой скорости равны нулю:  $u = v = 0$ . В наших расчетах ее координаты  $x_{v.c.} = 0,5$ ,  $y_{v.c.} = 0,765$ .

На рис. 3 приведено поле скоростей  $v = (v, u)$ , полученное по формулам (3).

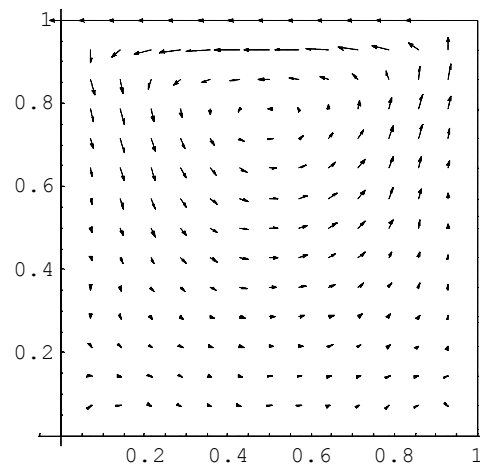


Рис. 3

Приближенное решение (10) сравнивалось с приближенным решением, полученным методом сеток [7]. Результаты очень хорошо согласуются. Преимущество предлагаемого нами подхода мы видим, прежде всего, в том, что приближенное решение (10) получено в аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование для нахождения других характеристик потока. Кроме того, решение для малого числа Рейнольдса можно использовать в качестве начального приближения при решении уравнения для функции тока:

$$\Delta^2\psi + \text{Re} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{при } \text{Re} > 0.$$

**Литература:** 1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с. 2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с. 3. Сидоров М.В. О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 3. С. 52-54. 4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 511 с. 5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 6. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби) / Под ред. Л.А. Люстерника, А.Р. Янпольского. М.: Физматгиз, 1961. 440 с. 7. Burggraf O.R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows // J. Fluid Mech. 1966. 24, № 1. P. 113 – 151.

Поступила в редколлегию 17.07.2002

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

**Сидоров Максим Викторович**, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.