ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА СХЕМ СОВПАДЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ВХОДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ДЕШИФРАТОРОВ

Н. Я. Какурин, Ю. А. Василенко, В. Л. Белявский

Харьков

В [1, 4] рассмотрены вопросы построения дешифраторов на двухвходовых схемах совпадений. В данной работе исследован более общий случай построения дешифраторов различных типов на элементах с k-входами. Приводится оценка количества таких элементов.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, существенно зависящая от n переменных, может быть представлена в виде суперпозиции некоторого числа булевых функций меньшего числа переменных согласно следующей теореме [2, 3].

Теорема разложения. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция алгебры логики. Тогда ее можно представить в следующей форме:

$$f(x_1, \ldots x_k, x_{k+1} \ldots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots \sigma_k, x_{k+1} \ldots x_n). \qquad (*)$$

Представление (*) называется разложением функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по k переменным.

Следствие 1.

Если $k = 1$, то представление (*) принимает следующий вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots x_n) \vee \overline{x_1} f(0, x_2, \ldots x_n).$$

Следствие 2.

Если $k = n$, то представление (*) превращается в следующее:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Эта теорема вместе со следствиями используется при построении дешифраторов.

Дешифратором n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется комбинационная схема, выходными функциями которой являются различные конституенты единицы

$$\overline{x_1}\ \overline{x_2} \ldots \overline{x_n}, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Полный дешифратор имеет 2^n выходных функций. Будем считать, что на вход дешифратора подается $2n$ сигналов, а именно:

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n}.$$

Существуют три способа построения дешифраторов: матричный, пирамидальный, прямоугольный.

1. Матричный дешифратор. Каждая конституента единицы в этом типе дешифратора реализуется независимо от других. Для случая по-

строения дешифратора из двухвходовых схем совпадений требуемое число элементов определяется формулой, приведенной в [1].

$$N = (n-1)\,2^n. \tag{1}$$

Рассмотрим более общий случай реализации матричного дешифратора схемами совпадений с ограниченным числом входов k.

Теорема 1. Полный матричный дешифратор реализуется k-входовыми элементами, число которых определяется формулой

$$N_k^1 = \left[\frac{n-1}{k-1}\right] 2^n, \tag{2}$$

где N_k^1 — число k-входовых элементов;

n — число входных переменных дешифратора;

k — число входов элемента;

$[\ ]$ — округление до ближайшего большего целого числа.

Доказательство. Докажем это утверждение для одного набора. Пусть дан набор из n переменных

$$\tilde{x}_{i_1}\,\tilde{x}_{i_2}\ldots\tilde{x}_{i_k}\ldots\tilde{x}_{i_n}. \tag{3}$$

Первые k переменных от $\bar{x}_{i_1}$ до $\bar{x}_{i_k}$ реализуются одним элементом, т. е. вместо k переменных получаем одну переменную y_1, равную

$$y_1 = \tilde{x}_{i_1}\tilde{x}_{i_2}\ldots\tilde{x}_{i_k}. \tag{4}$$

Следующий k-входовой элемент реализует $k-1$-входную переменную и вновь переменную y_1.

В результате получаем

$$y_2 = y_1\tilde{x}_{i_{k+1}}\ldots\tilde{x}_{i_{2k-1}}. \tag{5}$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет реализована переменная x_n. Следовательно, требуется $\left[\frac{n-k}{k-1}\right]$ элементов, реализующих $(k-1)$ входную переменную и одну переменную, равную конъюнкции ранее реализованных входных переменных. Кроме того, необходим один элемент, реализующий первые k входных переменных.

Тогда

$$N^1 = \left[\frac{n-k}{k-1}+1\right] = \left[\frac{n-1}{k-1}\right]. \tag{6}$$

Число наборов полного дешифратора равно 2^n, поэтому

$$N_k^1 = \left[\frac{n-1}{k-1}\right] 2^n. \tag{7}$$

Теорема доказана.

Следствие. При $k = n$

$$N_n^1 = \frac{n-1}{n-1}\,2^n = 2^n.$$

При $k = 2$ получаем ранее известную формулу (1).

2. Пирамидальный дешифратор строится по методу каскадов. При двухвходовых схемах совпадений первый каскад пирамидального дешифратора состоит из четырех схем, образующих на выходах все четыре конституенты единицы,

$$\bar{x}_1\bar{x}_2;\quad \bar{x}_1x_2;\quad x_1\bar{x}_2;\quad x_1x_2 \tag{8}$$

от двух переменных. Выходные сигналы первого каскада служат входными сигналами второго каскада, имеющего входные сигналы x_3 и $\bar{x}_3$. Второй каскад состоит из восьми двухвходовых схем совпадений, образу-

ющих на выходах все восемь конституент единицы от трех переменных. Продолжая по индукции для $(n-1)$-го каскада, получим 2^n выходов.

Общее число двухвходовых схем совпадений определяется так:

$$N = 4 + 8 + 16 + \ldots 2^n = 2(2^n - 2). \tag{9}$$

Рассмотрим общий случай реализации пирамидального дешифратора k-входовыми схемами совпадений.

Теорема 2. Полный пирамидальный дешифратор реализуется k-входовыми элементами, число которых определяется формулой

$$N_k^{II} = \frac{2^k[2^{(k-1)(p+1)} - 1]}{2^{k-1} - 1} + 2^n \text{ при } \tau \neq 0, \tag{10}$$

$$N_k^{II} = \frac{2^k(2^{n-1} - 1)}{2^{k-1} - 1} \text{ при } \tau = 0,$$

где N_k^{II} — число элементов дешифратора;

n — число входных переменных;

p и τ — соответственно частное и остаток от деления;

$$\frac{n-k}{k-1}, \text{ причем } 0 \leqslant \tau < k-1.$$

Доказательство. При реализации пирамидального дешифратора k-входовыми схемами совпадений в первом каскаде будет образовано 2^k конституент единицы. Для этого потребуется 2^k k-входовых схем совпадений, на входы которых будет подано k входных переменных. Во втором каскаде на один из k входов подается одна из конституент единицы от k переменных, образованных в первом каскаде, и $k-1$ новых входных переменных и т. д. В общем случае потребуется p таких каскадов. Количество схем совпадений второго каскада будет составлять $2^k \cdot 2^{k-1}$, третьего — $2^k \cdot 2^{k-1} \cdot 2^{k-1}$ и т. д., p раз до последнего каскада, число схем совпадений которого равно

$$2^\tau \cdot 2^k \cdot 2^{k-1} \ldots 2^{k-1} = 2^n.$$

Числа схем совпадений каскадов, за исключением последнего, составляют геометрическую прогрессию. Найдем сумму геометрической прогрессии для случая схем совпадений с k-входами по формуле

$$S = \frac{a_1(q^m - 1)}{q - 1}, \tag{11}$$

где S — сумма членов геометрической прогрессии;

a_1 — первый член прогрессии;

q — знаменатель прогрессии;

m — число членов прогрессии.

В нашем случае $a_1 = 2^k$; $q = 2^{k-1}$; $m = p + 1$.

Тогда

$$S = \frac{2^k[2^{(k-1)(p+1)} - 1]}{2^{k-1} - 1}. \tag{12}$$

Для нахождения полного числа элементов в случае, когда $\tau \neq 0$, необходимо учесть последний каскад:

$$N_k^{II} = \frac{2^k[2^{(k-1)(p+1)} - 1]}{2^{k-1} - 1} + 2^n. \tag{13}$$

В случае, когда $\tau = 0$,

$$N_k^{II} = S = \frac{2^k(2^{n-1}-1)}{2^{k-1}-1}. \tag{14}$$

Теорема доказана.

Следствие. Для случая $k = 2$ имеем $\tau = 0$ и

$$N_k^{II} = \frac{2^n(2^{n-1}-1)}{2^{2-1}-1} = 2^{n+1} - 2^n = 2(2^n - 2).$$

Для случая $k = n$ в пирамидальном дешифраторе имеем один каскад, число элементов которого

$$N_n^{II} = 2^n.$$

3. Прямоугольный дешифратор можно построить путем сведения задачи построения дешифратора для n переменных к задаче построения двух дешифраторов для m и $n-m$ переменных соответственно ($m = 1, 2, \ldots, n-1$). Чтобы произвести такое сведение, достаточно заметить, что любая конституента единицы от переменных x_1, x_2, $\ldots x_n$ может быть представлена в виде произведения двух конституент единицы от переменных $x_1 \ldots x_m$ и от переменных $x_{m+1} \ldots x_n$ соответственно. Чтобы получить таким способом все 2^n конституент единицы от n переменных, нужно иметь 2^n двухходовых схем совпадений и два полных дешифратора для m и $n-m$ переменных соответственно. Рассмотрим более общий случай построения дешифраторов из k-входовых элементов.

Пусть необходимо построить дешифратор для n входных переменных из k-входовых элементов.

Теорема 3 (теорема разложения для дешифраторов). Для построения прямоугольного дешифратора из k-входовых элементов необходимо произвести синтез k дешифраторов для меньшего числа переменных по следующей формуле разложения:

$$N_{n,k}^{III} = 2^n + (k-1)N_{\left[\frac{n}{k}\right],k} + N_{n_1,k}, \tag{15}$$

где $N_{n,k}^{III}$ — число элементов, необходимых для реализации k-входовыми элементами дешифратора на n переменных;

n — число входных переменных;

k — число входов элемента;

$\left[\frac{n}{k}\right]$ — число элементов в группе, округленное до ближайшего меньшего целого числа;

n_1 — число оставшихся входных переменных после разбиения на группы, определяемое из формулы

$$n_1 = n - \left[\frac{n}{k}\right](k-1). \tag{16}$$

Доказательство. Разбиваем n переменных на k групп следующим образом.

1. $(k-1)$ группа имеет $\left[\frac{n}{k}\right]$ элементов.

2. Одна группа имеет n_1 элементов. Если $\left[\frac{n}{k}\right] > k$, то процесс разложения повторяется снова, и так до тех пор, пока

$$\left[\frac{n}{k}\right] \leqslant k.$$

Если $n_1 > k$, то процесс разложения повторяется до тех пор, пока $n_1 \leqslant k$.

Если $\left[\frac{n}{k}\right] \leqslant k$, то число элементов дешифратора

$$N_{\left[\frac{n}{k}\right]<k,\ k} = 2^{\left[\frac{n}{k}\right]}. \tag{17}$$

Если $n_1 \leqslant k$, то число элементов дешифратора

$$N_{n_1,\ k} = 2_{n_1}. \tag{18}$$

Общее число элементов дешифратора равно сумме всех элементов дешифраторов. Теорема доказана.

Пример. Синтезировать дешифратор по прямоугольному принципу для $n = 13$; $k = 3$.

Тогда

$$N_{13,3} = 2^{13} + 2 \cdot N_{4,3} + N_{5,3} = 2^{13} + 2 \cdot 20 + 40 = 8272;$$
$$N_{4,3} = 2^4 + 2 \cdot N_{1,3} + N_{2,3} = 16 + 2 \cdot 0 + 4 = 20;$$
$$N_{5,3} = 2^5 + 2 \cdot N_{1,3} + N_{3,3} = 32 + 2 \cdot 0 + 8 = 40;$$
$$N_{1,3} = 0;$$
$$N_{2,3} = 2^2 = 4;$$
$$N_{3,3} = 2^3 = 8.$$

Полученные результаты могут быть использованы для оценки количества пороговых элементов (ПЭ) с ограниченным числом входов, требующихся для построения различных типов дешифраторов.

Действительно, k-входовой элемент совпадения представляет собой пороговый элемент вида

$$\left[w_1,\ w_2,\ \ldots \frac{w_k}{T}\right],$$

у которого

$$w_1 = w_2 = \ldots w_k = 1;$$
$$T = \sum_1^k w_i - 1 = k - 1.$$

Сумма весов и порога порогового элемента равна

$$S_k = k + k - 1 = 2k - 1;\ k = 2,\ 3,\ 4 \ldots. \tag{19}$$

Из формулы (19) видно, что при любом k S — нечетная величина. С учетом того, что $k = \frac{S+1}{2}$, формулы (2), (10), (15) для матричного, пирамидального и прямоугольного дешифраторов соответственно будут преобразованы следующим образом:

$$N_S^{\text{I}} = \left[\frac{2(n-1)}{S-1}\right] 2^n; \tag{20}$$

$$N_S^{\text{II}} = \frac{2^{\frac{2n+S-1}{2}} - 2^{\frac{S+1}{2}}}{2^{\frac{S-1}{2}} - 1} \quad \text{при } \tau = 0, \tag{21}$$

$$N_S^{\text{III}} = 2^n + \frac{(S-1)}{2} N_{\left[\frac{2n}{S+1}\right],\ \frac{S+1}{2}} + N_{\left[\frac{2n}{S+1}\right],\ \frac{S+1}{2}}. \tag{22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
2. С. В. Яблонский. Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им. Стеклова, т. 51, Изд-во АН СССР, 1958.
3. С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев. Функции алгебры логики и классы Поста. Изд-во «Наука», 1966.
4. Е. Н. Вавилов, Т. П. Портной. Синтез схем электронных цифровых машин. Изд-во «Советское радио», 1964.

БИБЛИОТЕКА