

**ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА
ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ В ЕПІДЕМІОЛОГІЧНИХ
КОМПАРТМЕНТНИХ СИСТЕМАХ**

Луханін В.С.

e-mail: volodymyr.lukhanin@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики,
м. Харків, Україна

Mathematical modeling of infectious diseases relies heavily on compartmental models and nonlinear differential equations. This paper considers using Lyapunov's functions for the stability analysis of such systems. By examining various structures, including multi-strain models with drug resistance and amplification effects, the study demonstrates how to prove global asymptotic stability for disease-free and endemic equilibria. The work categorizes different Lyapunov function types and explores their application to modern challenges. These mathematical frameworks provide essential tools for predicting long-term system behavior in public health.

Математичне моделювання інфекційних хвороб є критично важливим інструментом для прогнозування епідемій. Одним із найпоширеніших підходів є компартментні моделі, де населення поділяється на групи залежно від стану захворювання, а їхня динаміка описується системами звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження стійкості таких систем функції Ляпунова відіграють вирішальну роль, дозволяючи довести їх глобальну асимптотичну стійкість (ГАС) без необхідності їх точного розв'язання [1].

Функцією Ляпунова називають неперервну функцію $V(X)$, яка задовольняє низку властивостей та застосовується для аналізу стійкості розв'язків системи на основі теорем другого методу Ляпунова. Однією з основних властивостей таких функцій є знаковизначеність [2].

В епідеміологічному моделюванні відомим пороговим значенням є базове репродуктивне число R_0 . Якщо $R_0 < 1$, то зазвичай вважається ГАС стану без хвороби (СБХ), а якщо $R_0 > 1$ – ГАС стану ендемічної рівноваги (СЕР). Функції Ляпунова часто включають R_0 для можливості доведення ГАС СБХ та СЕР. Проте універсального алгоритму побудови таких функцій не існує [1].

Більшість функцій Ляпунова в епідеміологічному моделюванні можна віднести до однієї з п'яти наступних категорій [1]:

Лінійні комбінації інфікованих компартментів. Вони найчастіше застосовуються для доведення ГАС СБХ при $R_0 < 1$

$$V = \sum_{i \geq 2} c_i X_i.$$

Функції типу Гоха-Лотки-Вольтерри. Логарифмічні функції, що використовуються для аналізу СЕР при $R_0 > 1$

$$V = \sum_i c_i (X_i - X_i^* \ln X_i).$$

Квадратичні функції. Вони також використовуються для аналізу СЕР при $R_0 > 1$

$$V = \sum_i c_i (X_i - X_i^*)^2.$$

Інтегральні функції Ляпунова. Використовуються для моделей з віковою структурою або затримками.

Гібридні функції. Лінійна комбінація вищезгаданих типів, які найчастіше включають функції типу Гоха-Лотки-Вольтерри.

Застосування функцій Ляпунова також можливе для аналізу стійкості моделей з двома штамами хвороби – чутливим до ліків та резистентним. У таких системах виникає ефект «ампліфікації», де неправильне лікування стимулює перехід від одного штаму до іншого і значно збільшує частку резистентних інфекцій у популяції [3].

Незважаючи на потужність методу, побудова функцій Ляпунова для складних систем залишається «мистецтвом». Нові підходи використовують моделювання функцій Ляпунова за допомогою будь-якої диференційовної функції, водночас максимізуючи оцінку області тяжіння [4].

Використання функцій Ляпунова в епідеміологічному моделюванні забезпечує надійне математичне підґрунтя для прийняття рішень у сфері охорони здоров'я. Основними результатами таких досліджень є доведення того, що при досягненні певних порогових значень параметрів, система неминуче прямуватиме до стану ліквідації хвороби.

Список використаних джерел:

1. A survey on Lyapunov functions for epidemic compartmental models / Cangiotti N., Capolli M., Sensi M., Sottile S. *Boll. Unione Mat. Ital.* 2024. Vol. 17. P. 241–257.
2. Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. Теорія динамічних систем. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 348 с.
3. Mathematical analysis of a two-strain disease model with amplification / Kuddus A. et al. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2021. Vol. 143. Art. 110594.
4. A Comprehensive Framework to Determine Lyapunov Functions for a Set of Continuous Time Stability Problems / Bocquillon B., Feyel P., Sandou G., Rodriguez-Ayerbe P. *IECON 2022 – 48th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. 2022. P. 1–6.