УДК 519.6

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ БЕЗ ВПЛИВУ ЯВИЩА ГІББСА

Пучкін М.О.
Науковий керівник — канд. фіз.-мат. наук., доц. Литвин О.Г.
Харківський національний університет радіоелектроніки
61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36, email: mykola.puchkin@nure.ua

The work is devoted to the development of an algorithm for solving the problem of restoring discontinuous functions based on the method of finite Fourier sums without the influence of the Gibbs phenomenon. The finite sum Fourier method is used in combination with discontinuous splines. Projection data coming from a computer tomograph are considered known. The recoverable function is discontinuous with known discontinuity lines. Developed the algorithm for solving issue. Conducted numerical implementation of the method. Considered the test issues. The results were compared. The obtained results confirm the effectiveness of the method.

При розробці алгоритму розв’язання задачі відновлення розривних функцій без впливу явища Гіббса використані розробки авторів методу, наведені в роботах [1,2].

Вважаємо, що функція $f(x,y)$ є розривною з відомими лініями розриву. Відомі проекційні дані γ_k вздовж прямих L_k:

$$\int\limits_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k=\overline{1,Q}.$$

Треба відновити цю функцію без впливу явища Гіббса.

Алгоритм розв’язання:

1. Формуємо тестову розривну функцію для відновлення.
2. Будуємо сплайн-функцію, яка наближує задану тестову функцію і має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція. Використовуємо метод побудови розривного сплайна, викладений у роботі [1].
3. Формуємо функцію $\varphi(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - Sp(x,y).$$

В роботі [1] доведено, що ця функція неперервна.

4. Відновлюємо функцію $\varphi(x,y)$ методом скінченних сум Фур’є.

Тут розв’язок шукаємо у вигляді:

$$\tilde{\varphi}_N(x,y) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},\ F_{k,l} = \iint\limits_D \varphi(x,y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dxdy$$

У цьому методі шляхом введення заміни змінних обчислення коефіцієнтів Фур’є зводиться до обчислення повторних інтегралів, залежних від індексів в сумі Фур'є, в яких використані задані проекційні дані.

5. Наближувану функцію $f(x,y)$ подаємо у вигляді

$$\tilde{f}(x,y)=Sp(x,y)+\tilde{\varphi}_N(x,y).$$

6. Проводимо аналіз отриманого розв'язку шляхом підрахунку відповідних похибок.

Приклад. Відновлення розривної функції з однією лінією розриву, що є колом. Задана тестова функція

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y), \text{ якщо } w_1(x,y)\geq 0; \\ f_2(x,y), \text{ якщо } w_1(x,y)<0, \end{cases}$$

$$f_1(x,y)=k_1\cdot e^{-\left((x-0,5)^2+(y-0,5)^2\right)},$$

$$f_2(x,y)=k_2\cdot\sin\left((x-0,5)^2+(y-0,5)^2\right),$$

$$w_1(x,y)=R-\sqrt{(x-0,5)^2+(y-0,5)^2},\ k_1=10,\ k_2=5,\ R=0,25.$$

Таблиця 1 – Порівняння методів

Метод N=32	Відносна похибка	Середньо-квадратична похибки	Середня абсолютна похибка
I. Фур'є (з впливом явища Гіббса)	$4,72\times10^{-1}$	$5,83\times10^{-1}$	$2,31\times10^{-1}$
II. Фур'є+сплайн (без впливу явища Гіббса)	$1,04\times10^{-3}$	$5,31\times10^{-4}$	$2,57\times10^{-4}$

Порівняння похибок, наведених у табл. 1, показує переваги досліджуваного методу для розривних функцій.

Список використанихджерел:

1. Lytvyn, O.M., & Lytvyn, O.G. (2021). Analysis of the results of a computational experiment to restore the discontinuous functions of two variables using projections. I. *Cybernetics and Systems Analysis*, 57 (5), 98-107.

2. Литвин, О.М. (2000) Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харк. держ. політех. ун-ту*, 125, 27 – 35.