УДК 510.62

Д. Э. СИТНИКОВ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ АЛГЕБР КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Рассмотрим вопрос об изоморфизме одного класса конечных алгебр, а именно, *алгебр конечных предикатов* [1, с. 15]. Под *конечной алгеброй* будем понимать *алгебру* [2, с. 47] с конечным числом элементов. Рассмотрим произвольную конечную алгебру Φ с алгебраическими операциями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и элементами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а также множество $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Систему элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ $(k \leqslant m)$ будем называть *полной* относительно операций $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_s}$ $(s \leqslant n)$ на множестве Φ_0, если любой элемент $x \in \Phi_0$ можно представить в виде суперпозиции операций $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_s}$ над элементами $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

Пусть на множестве M, содержащем, по крайней мере, два элемента 0 и 1, заданы две операции $\vee$ (дизъюнкция) и $\wedge$ (конъюнкция), которые удовлетворяют следующим аксиомам:

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a, \tag{1}$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \tag{2}$$

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \quad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c), \tag{3}$$

$a \vee a = a, a \wedge a = a$ **(4)**, $a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0$ **(5)**, $a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a$ **(6)**; элементы

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k_1 1}, \\ a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k_2 2}, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{k_n n} \end{array}$$

образуют полную систему элементов относительно операций конъюнкции и дизъюнкции (7); для этих элементов выполняются аксиомы:

$$a_{1j} \vee a_{2j} \vee \ldots \vee a_{k_j j} = 1, \ (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{8}$$

$$a_{i_1 j} \wedge a_{i_2 j} = 0, \ (i_1 \neq i_2, 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant k_j). \tag{9}$$

Целью данной работы является доказательство того факта, что любые две алгебры, для которых выполняются аксиомы (1) — (9), *изоморфны* [2, с. 49] между собой при фиксированных n, k_1, k_2, ..., k_n (т. е. если они имеют один и тот же тип). Любую алгебру, для которой выполнены аксиомы (1) — (9), можно проинтерпретировать как алгебру конечных предикатов [1, с. 22]. Таким образом, доказав изоморфизм, мы тем самым установим, что аксиомы (1) — (9) определяют алгебру конечных предикатов с точностью до изоморфизма. Иными словами, все алгебры конечных предикатов одного и того же типа отличаются друг от друга лишь способом обозначения. Изоморфизм означает также, что система аксиом (1) — (9) полна: она определяет все свойства любой алгебры конечных предикатов.

Элементарной конъюнкцией назовем любую конъюнкцию элементов a_{ij}, вторые индексы которых попарно различны. Наибольшее число элементов в элементарной конъюнкции равно n, наименьшее — нулю. Примерами элементарных конъюнкций могут служить выражения: $a_{11} \wedge a_{12} \wedge a_{23}$, $a_{13} \wedge a_{24}$. Элементарные конъюнкции, отличающиеся между собой только порядком конъюнктивных членов, мы не будем различать. Например, элементарные конъюнкции $a_{11} \wedge \wedge a_{12} \wedge a_{23}$ и $a_{12} \wedge a_{11} \wedge a_{23}$ считаем одинаковыми. Любую дизъюнкцию произвольного числа различных элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (*ДНФ*). В качестве ДНФ, не содержащей ни одного дизъюнктивного члена, примем элемент 0. Примером ДНФ может служить выражение $(a_{11} \wedge a_{12} \wedge a_{23}) \vee \vee (a_{13} \wedge a_{24}) \vee (a_{12} \wedge a_{24})$.

Любую элементарную конъюнкцию, содержащую n элементов, назовем *конституэнтой единицы*. В общем виде конституэнта единицы запишется следующим образом: $a_{i_1 1} \wedge a_{i_2 2} \wedge a_{i_3 3} \wedge \ldots \wedge a_{i_n n}$.

Любую дизъюнкцию произвольного числа различных конституэнт единицы назовем *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ). Будем отождествлять между собой все СДНФ, отличающиеся только порядком расположения конституэнт единицы.

Теорема 1. *Любой элемент из M можно представить в виде СДНФ.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a \in M$. В силу аксиомы (7) элемент a можно представить в виде суперпозиции операций конъюнкции и дизъюнкции над элементами a_{ij}. Осуществив такое представление, получим некоторую формулу. Пользуясь тождествами (1) — (3), раскрываем в формуле скобки. В результате получаем некоторую дизъюнкцию конъюнкций элементов d_{ij}. С помощью тождеств (1), (2), (4) — (6) и (9) упростим формулу и получим некоторую ДНФ. Учитывая тождества (6), (8), введем во все конъюнкции «недостающие» элементы. Например, пусть $n = 3$, $k_1 = k_2 = k_3 = 2$. Тогда $(a_{11} \wedge a_{13}) \vee (a_{12} \wedge a_{23}) = (a_{11} \wedge (a_{12} \vee \vee a_{22}) \wedge a_{13}) \vee ((a_{11} \vee a_{21}) \wedge a_{12} \wedge a_{23})$. Далее, пользуясь тождествами (1)—(4), снова раскрываем скобки и производим упрощения. В результате получаем искомую СДНФ. Итак, любой элемент можно представить в виде СДНФ. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что в множестве M существует $p = k_1 \; k_2 \ldots k_n$ элементов (конституэнт единицы) таких, что любой ненулевой элемент из M можно представить в виде дизъюнкции этих элементов. Используя этот результат, из аксиом (1) — (9) можно вывести следующую систему аксиом: $a \vee b = b \vee a$ **(10)**, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ **(11)**, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ **(12)**, $a \vee 0 = a$ **(13)**, $a \vee 1 = 1$ **(14)**, ненулевые элементы $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(p = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n)$ на множестве $M \setminus 0$ образуют полную систему элементов относительно операции дизъюнкции (15); для этих элементов выполняется аксиома $a_i \wedge a_j = 0$ $(i \neq j)$ **(16)**, так как конъюнкция различных конституэнт единицы равна 0.

Теорема 2. *Любые две алгебры, для которых выполняются аксиомы (10) — (16), изоморфны между собой при фиксированном* p.

Доказательство. Покажем, что любой элемент из множества $M \setminus 0$ можно единственным образом представить в виде дизъюнкции элементов a_i. Согласно аксиомам (10), (11) порядок расположения a_i не существенен. Пусть

$$a = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \ldots \vee a_{i_k} = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \ldots \vee a_{j_s} \; (k \leqslant p, \; s \leqslant p). \tag{17}$$

Домножим обе части этого равенства на a_{i_1}:

$$(a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \ldots \vee a_{i_k}) \wedge a_{i_1} = (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \ldots \vee a_{j_s}) \wedge a_{i_1}.$$

Раскрывая скобки в соответствии с (12) и применяя (16), получаем $(a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \ldots \vee a_{j_s}) \wedge a_{i_1} = a_{i_1}$. Это говорит о том, что среди элементов $a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}$ есть элемент a_{i_1} (в противном случае $a_{i_1} = 0$, что неверно).

Точно так же показывается, что среди элементов $a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}$ есть элементы $a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_k}$. Домножая обе части равенства (17) на $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_s}$ находим, что все эти элементы содержатся среди элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Это значит, что правая часть равенства (17) с точностью до порядка расположения элементов совпадает с его левой частью. Единственность представления доказана. Каждому элементу a из $M \setminus 0$ поставим в соответствие p-разрядный двоичный код $\tilde{a} =$

$= \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_p$, где $\sigma_i = 1$, если в представлении элемента a фигурирует элемент a_i и $\sigma_i = 0$, если в представлении элемента a нет элемента a_i. Элементу 0 поставим в соответствие нулевой код, т. е. код, где все $\sigma_i = 0$.

Используя аксиомы (10), (11) и (13), легко показать, что дизъюнкции двух элементов a и b из M соответствует код, равный дизъюнкции кодов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Используя аксиомы (10) — (14) и (16), можно показать, что конъюнкции двух элементов a и b из M соответствует код, равный конъюнкции кодов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Таким образом, любая алгебра для которой выполняются аксиомы (10) — (16), изоморфна алгебре двоичных p-разрядных кодов, а это означает, что любые две алгебры, удовлетворяющие (10) — (16), изоморфны между собой. Теорема доказана.

Так как систему аксиом (10) — (16) можно вывести из аксиом (1) — (9), а из теоремы 2 следует, что система (10), (16) полна, то и система аксиом (1) — (9) полна. Таким образом, верна

Теорема 3. *Любые две алгебры, удовлетворяющие аксиомам (1)— (9), изоморфны.*

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства. — Х., 1984.— 144 с. 2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М., 1970.— 146 с.

Поступила в редколлегию 09.12.86