УДК 519.6

О.М. Литвин, Ю.І. Першина

Українська інженерно-педагогічна акдемія, Харків, Україна

yulia_pershina@mail.ru

ВІДНОВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РОЗРИВНИМИ ФУНКЦІЯМИ, З ВИКОРИСТАННЯМ КРИВОЛІНІЙНИХ ТРАПЕЦІЙ

Представляється метод побудови розривних інтерполяційних та апроксимаційних сплайнів для наближення розривних функцій, область визначення яких розбивається на криволінійні трапеції. Причому побудовані розривні конструкції включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни. Запропоновані методи наближення можна буде використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, КРИВОЛІНІЙНА ТРАПЕЦІЯ, РОЗРИВНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, РОЗРИВНА АПРОКСИМАЦІЯ

Вступ

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами від однієї та декількох змінних з достатньою повнотою описана в багатьох роботах вітчзняних та зарубіжних дослідників (див. наприклад, [1]). На практиці використання кусково-аналітичних наближень, заданих різними формулами (поліномами відповідного степеня) в точках кожного елемента розбиття області наближення, приводить інколи до знаходження великої кількості невідомих параметрів. Це привело до появи неконформних елементів у методі скінченних елементів [2]. Аналогічна задача досліджувалась у працях Попова Б.А. [3] та інших авторів, де розглядалися наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій за допомогою розривних сплайнів в чебишовській нормі (рівномірне наближення). У роботі [4] була розглянута апроксимація розривних розв'язків (функцій однієї змінної) диференціальних рівнянь за допомогою розривного методу Гальоркіна. А в роботі [5] розглядається розривний метод Гальоркіна для еліптичної крайової задачі з використанням двовимірних неузгоджених сіток. Цей метод дозволяє враховувати неконформність елементів. Причому метод забезпечує неперервність розв'язку, хоча від базисних функцій узгодженості не вимагає.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів або розривних функцій за допомогою неперервних. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких як частинний випадок, включає множину неперервних сплайнів, що можуть мати розриви першого роду у заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час недостатньо вивчене питання про використання інформації про внутрішню структуру тіла людини (різні органи мають свою форму та щільність тканин).

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

В роботі [6] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [7] – інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [8].

У даній роботі вперше будуються та досліджуються інтерполяційні та апроксимаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на криволінійні трапеції (прямокутники з однією криволінійною стороною).

Постановка задачі

Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$. Будемо вважати, що область D розбита на криволінійні трапеції. Ці елементи не вкладаються один в один, і їх сторони не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими елементаим. Метою роботи є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції та апроксимації, які в кожному елементі розбиття є операторами поліноміальної інтерполяції або апроксимації функції $f(x,y)$.

1. Побудова розривного інтерполяційного сплайна

Якщо $(x_i, y_j), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$ – вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутника, то може зустрітися вісім типів трапецій (рис. 1)

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}=\left\{x_i<x<x_{i+1}, y_j<y<g_{j+1}^{(1)}(x)\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(2)}=\left\{x_{i-1}<x<x_i, y_j<y<g_{j+1}^{(2)}(x)\right\};$$

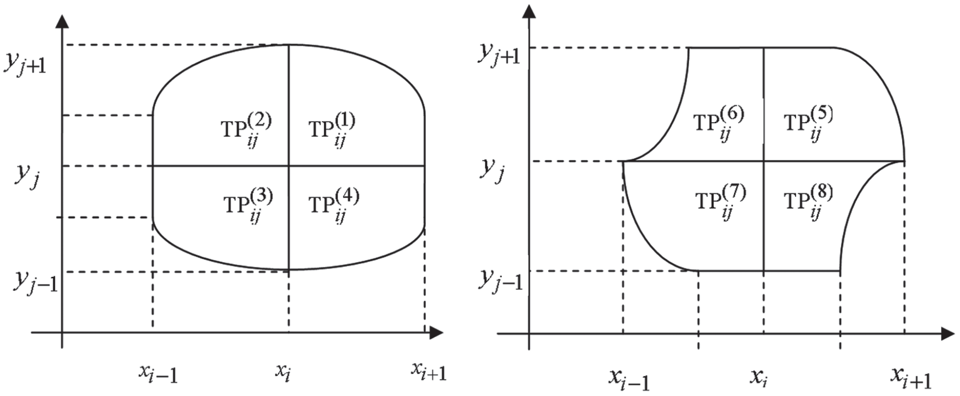


Рис. 1. Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(4)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \left\{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \left\{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(x), y_{j-1} < y < y_j\right\},$$

де функції

$$g_u^{(v)}(x), q_s^{(v)}(y), \quad u = \{j+1, j-1\},$$
$$s = \{i+1, i-1\}, \quad v = \{1,2,3,4\}$$

є квадратичними функціями, тобто задаються виразами $g(x) = ax^2 + bx + c$ або $q(y) = ay^2 + by + c$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває таких значень:

$$C_1^{(1)} = f(x_i + 0, y_j + 0),$$
$$C_2^{(1)} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$
$$C_3^{(1)} = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0),$$
$$C_4^{(1)} = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0),$$
$$C_1^{(2)} = f(x_i - 0, y_j + 0),$$
$$C_2^{(2)} = f(x_{i-1} + 0, y_j + 0),$$
$$C_3^{(2)} = f(x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0),$$
$$C_4^{(2)} = f(x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0),$$
$$C_1^{(3)} = f(x_i - 0, y_j - 0),$$
$$C_2^{(3)} = f(x_{i-1} + 0, y_j - 0),$$
$$C_3^{(3)} = f(x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0),$$
$$C_4^{(3)} = f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i+1} - 0)),$$
$$C_1^{(4)} = f(x_i + 0, y_j - 0),$$
$$C_2^{(4)} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0),$$
$$C_3^{(4)} = f(x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0),$$
$$C_4^{(4)} = f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0),$$
$$C_1^{(5)} = f(x_i + 0, y_j + 0),$$
$$C_2^{(5)} = f(q_{i+1}^{(5)}(y_j) - 0, y_j + 0),$$
$$C_3^{(5)} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_4^{(5)} = f(q_{i+1}^{(5)}(y_{i+1}) - 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_1^{(6)} = f(x_i - 0, y_j + 0),$$
$$C_2^{(6)} = f(q_{i-1}^{(6)}(y_j) + 0, y_j + 0),$$
$$C_3^{(6)} = f(q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1}) + 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_4^{(6)} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_1^{(7)} = f(x_i - 0, y_j - 0),$$
$$C_2^{(7)} = f(q_{i-1}^{(7)}(y_j) + 0, y_j - 0),$$
$$C_3^{(7)} = f(q_{i-1}^{(7)}(y_{j+1}) + 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_4^{(7)} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_1^{(8)} = f(x_i + 0, y_j - 0),$$
$$C_2^{(8)} = f(q_{i+1}^{(8)}(y_j) - 0, y_j - 0),$$
$$C_3^{(8)} = f(x_i + 0, y_{j-1} + 0),$$
$$C_4^{(8)} = f(q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1}) - 0, y_{j-1} + 0).$$

Визначення. *Будемо називати розривним інтерполяційним поліноміальним сплайном в області* $\mathrm{TP}_{ij}^{(k)} \subset D, k = \overline{1,8}$ *наступну функцію*

$$S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} +$$
$$+ C_2^{(1)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} +$$
$$+ C_3^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} + \quad (1)$$
$$+ C_4^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})},$$
$$(x,y) \in \mathrm{TP}_{ij}^{(k)}, k = \overline{1,8},$$

де

$$\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j,$$
$$\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)=\begin{cases} y-g^{(k)}(x), & k=\overline{1,4} \\ y-y_{j+1}, & k=\overline{5,8} \end{cases},$$

$$\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)=\begin{cases} x-x_{i+1}, & k=\overline{1,4} \\ x-q^{(k)}(y), & k=\overline{5,8} \end{cases},$$

$$A_1^{(k)}=(x_i,y_j),$$

$$A_2^{(k)}=\begin{cases} (x_{i+1}-0,y_j+0), & k=1 \\ (x_{i-1}-0,y_j+0), & k=2 \\ (x_{i-1}-0,y_j-0), & k=3 \\ (x_{i+1}-0,y_j-0), & k=4 \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_j)-0,y_j+0), & k=5, \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_j)+0,y_j+0), & k=6 \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_j)-0,y_j-0), & k=7 \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_j)-0,y_j-0), & k=8 \end{cases}$$

$$A_3^{(k)}=\begin{cases} (x_i+0,g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0, & k=1 \\ (x_i-0,g_{j+1}^{(2)}(x_i)-0), & k=2 \\ (x_i-0,g_{j-1}^{(3)}(x_i)+0), & k=3 \\ (x_i+0,g_{j-1}^{(4)}(x_i)+0), & k=4 \\ (x_i+0,y_{j+1}-0), & k=5 \\ (x_i-0,y_{j+1}-0), & k=6 \\ (x_i-0,y_{j-1}+0), & k=7 \\ (x_i+0,y_{j-1}+0), & k=8 \end{cases}$$

$$A_4^{(k)}=\begin{cases} (x_{i+1}-0,g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0, & k=1 \\ (x_{i-1}+0,g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1})-0), & k=2 \\ (x_{i-1}+0,g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1})+0), & k=3 \\ (x_{i+1}-0,g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1})+0), & k=4 \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_{j+1})-0,y_{j+1}-0), & k=5 \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1})+0,y_{j+1}-0), & k=6 \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_{j-1})+0,y_{j-1}+0), & k=7 \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1})-0,y_{j-1}+0), & k=8 \end{cases}$$

Теорема 1. Функція $S(x,y)=s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y)\in \mathrm{TP}_{ij}^{(k)}\subset D, k=\overline{1,8}$ задовольняє інтерполяційним властивостям.

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений розривний сплайн (1).

Теорема 2. Якщо $f(x,y)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i,y_j) та $f(x,y)\in C^{(r,r)}(\mathrm{TP}_{ij}^{(1)})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $r=1,2$, то залишок наближення функції $f(x,y)$ сплайном вигляду (1) на кожній трапеції буде мати вигляд

$$RS(x,y)=R_1R_2f(x,y)+\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}R_1f(x_i,y)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}R_1f(x_{i+1},y)+\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}R_2f(x,y_j)+$$

$$+\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}R_2f(x,g_{j+1}^{(1)}(x)),$$

де

$$R_1f(x,y)=\int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(0,r)}(x,\eta)G1(x,y,\eta)d\eta,\ x\in[x_i,x_{i+1}],$$

$$R_2f(x,y)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi,y)G2(x,\xi)d\xi,\ y\in[y_j,g_{j+1}^{(1)}(x)],$$

$$G1(x,y,\eta)=\begin{cases} \dfrac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\dfrac{(y_j-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, \\ y_j\le\xi\le y\le g_{j+1}^{(1)}(x), \\ -\dfrac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\dfrac{(g_{j+1}^{(1)}(x)-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, \\ y_j\le y\le\xi\le g_{j+1}^{(1)}(x) \end{cases}$$

$$G2(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\dfrac{(x_i-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le\xi\le x\le x_{i+1} \\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le x\le\xi\le x_{i+1} \end{cases}.$$

Доведення. Запишемо оператор інтерлінації на лініях $x=x_i$, $x=x_{i+1}$ (див. [9]):

$$S_1f(x,y)=f(x_i,y)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},y)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

та на лініях $y=y_j$, $y=g_{j+1}^{(1)}(x)$:

$$S_2f(x,y)=$$

$$=f(x,y_j)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+f(x,g_{j+1}(x))\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}.$$

Замінимо в операторах $S_1f(x,y)$ та $S_2f(x,y)$ сліди $f(x_i,y), f(x_{i+1},y)$, $f(x,y_j), f(x,g_{j+1}^{(1)}(x))$ операторами інтерполяції

$$\tilde{S}_1f(x,y)=\left(f(x_i,y_j)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}+\right.$$

$$\left.+f(x_i,g_{j+1}(x_i)\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\right)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+$$

$$+\left(f(x_{i+1},y_j)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}+\right.$$

$$\left.+f(x_{i+1},g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\right)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i};$$

$$\tilde{S}_2f(x,y)=\left(f(x_i,y_j)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+\right.$$

$$\left.+f(x_{i+1},y_j)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$

$$+\left(f(x_i, g^{(1)}_{j+1}(x_i))\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+\right.$$

$$\left.+f(x_{i+1}, g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1}))\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}.$$

Легко побачити, що $S(x,y)=S_2S_1f(x,y)=$ $=\left(\tilde{S}_1+\tilde{S}_2-S_1S_2\right)f(x,y)$, причому перестановність операторів відсутня, тобто $S_1S_2\neq S_2S_1$.

Тепер розглянемо похибку оператора інтерполяції $S(x,y)$:

$$RS(x,y)=(I-S)f(x,y)=\left(I-\tilde{S}_1-\tilde{S}_2+S_1S_2\right)f(x,y)=$$

$$=\left(I-\tilde{S}_1-\tilde{S}_2+S_1S_2\right)f(x,y)+$$

$$+\left(S_1+S_2-S_1S_2\right)f(x,y)-\left(S_1+S_2-S_1S_2\right)f(x,y)=$$

$$=\left(I-S_1-S_2+S_1S_2\right)f(x,y)+\left(S_1-\tilde{S}_1\right)f(x,y)+$$

$$+\left(S_2-\tilde{S}_2\right)f(x,y).$$

Доданок $\left(I-S_1-S_2+S_1S_2\right)f(x,y)$ є залишком наближення функції $f(x,y)$ оператором інтерлінації. Згідно з теоремою 3.2.1 роботи [9] залишок наближення формулами інтерлінації виражається як операторний добуток залишків наближення функції $f(x,y)$ операторами $S1f(x,y)$ та $S2f(x,y)$, тобто

$$\left(I-S_1-S_2+S_1S_2\right)f(x,y)=(f(x,y)-$$

$$-S_1f(x,y))(f(x,y)-S_2f(x,y))=R_1f(x,y)R_2f(x,y),$$

де

$$R_1f(x,y)=\int_{y_j}^{g^{(1)}_{j+1}(x)} f^{(0,r)}(x,\eta)G1(x,y,\eta)d\eta,\quad x\in[x_i,x_{i+1}],$$

$$R_2f(x,y)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi,y)G2(x,\xi)d\xi,\ y\in[y_j,g^{(1)}_{j+1}(x)],$$

$$G1(x,y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{y-g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x)}\dfrac{(y_j-\eta)^{r-1}}{(r-1)!},\\ y_j\le\xi\le y\le g^{(1)}_{j+1}(x),\\ -\dfrac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}\dfrac{(g^{(1)}_{j+1}(x)-\eta)^{r-1}}{(r-1)!},\\ y_j\le y\le\xi\le g^{(1)}_{j+1}(x)\end{cases}$$

$$G2(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\dfrac{(x_i-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le\xi\le x\le x_{i+1}\\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le x\le\xi\le x_{i+1}\end{cases}$$

$$(S_1-\tilde{S}_1)f(x,y)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\left(f(x_i,y)-f(x_i,y_j)\frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x_i)}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x_i)}+\right.$$

$$\left.+f(x_i,g^{(1)}_{j+1}(x_i))\frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x_i)-y_j}\right)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left(f(x_{i+1},y)-f(x_{i+1},y_j)\frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1})}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1})}+\right.$$

$$\left.+f(x_{i+1},g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1})\frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1})-y_j}\right)=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}R_1f(x_i,y)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}R_1f(x_{i+1},y);$$

$$\left(S_2-\tilde{S}_2\right)f(x,y)=\frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x)}\left(f(x,y_j)-\right.$$

$$\left.-f(x_i,y_j)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},y_j)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)+$$

$$+\frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}\left(f(x,g^{(1)}_{j+1}(x))-f(x_i,g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1}))\times\right.$$

$$\left.\times\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},g^{(1)}_{j+1}(x_{i+1}))\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)=$$

$$=\frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x)}R_2f(x,y_j)+\frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}R_2f(x,g^{(1)}_{j+1}(x)).$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Оцінка похибки наближення функції $f(x,y)$ побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x,y)=S_{ij}(x,y)$ на кожній трапеції має вигляд

$$|f(x,y)-S(x,y)|\le Q,$$

$$Q=\left\|f^{(2,2)}(x,y)\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,g_{j+1}(x)]}\times\frac{(\Delta_x)^2}{64}\times$$

$$\times\max\left\{\left(\Delta1_y\right)^2,\left(\Delta2_y\right)^2\right\}+$$

$$+\max\left\{\left\|f^{(0,2)}(x_i,y)\right\|_{L_\infty[y_j,g_{j+1}(x)]}\times\frac{\left(\Delta1_y\right)^2}{8},\right.$$

$$\left.\left\|f^{(0,2)}(x_{i+1},y)\right\|_{L_\infty[y_j,g_{j+1}(x)]}\times\frac{\left(\Delta2_y\right)^2}{8}\right\}+$$

$$+\max\left\{\left\|f^{(2,0)}(x,y_j)\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]}\times\frac{(\Delta_x)^2}{8},\right.$$

$$\left.\left\|f^{(2,0)}(x,g_{j+1}(x))\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]}\times\frac{(\Delta_x)^2}{8}\right\},$$

$$\Delta_x=x_{i+1}-x_i,\quad \Delta1_y=g_{j+1}(x_i)-y_j,$$

$$\Delta2_y=g_{j+1}(x_{i+1})-y_j.$$

Доведення.

$$|f(x,y)-S(x,y)|=$$

$$=\left|R_1R_2f(x,y)+\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}R_1f(x_i,y)+\right.$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}R_1f(x_{i+1},y)+\frac{y-g_{j+1}(x)}{y_j-g_{j+1}(x)}R_2f(x,y_j)+$$

$$+\left.\frac{y-y_j}{g_{j+1}(x)-y_j}R_2 f(x,g_{j+1}(x))\right| \le \left|R_1R_2 f(x,y)\right| +$$

$$+\left|\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}R_1 f(x_i,y)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}R_1 f(x_{i+1},y)\right|+$$

$$+\left|\frac{y-g_{j+1}(x)}{y_j-g_{j+1}(x)}R_2 f(x,y_j)+\frac{y-y_j}{g_{j+1}(x)-y_j}R_2 f(x,g_{j+1}(x))\right|.$$

Користуючись оцінками з роботи [5], отримаємо

1) $$\left|R_1R_2 f(x,y)\right| \le \left\|f^{(2,2)}(x,y)\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,g_{j+1}(x)]}\times$$

$$\times\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8}\frac{(y_j-g_{j+1}(x))^2}{8};$$

2) $$\left|\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}R_1 f(x_i,y)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}R_1 f(x_{i+1},y)\right|\le$$

$$\le\max\left\{\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\left\|f^{(0,2)}(x_i,y)\right\|_{L_\infty[y_j,g^{(1)}_{j+1}(x)]}\times\frac{(\Delta 1_y)^2}{8},\right.$$

$$\left.\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left\|f^{(0,2)}(x_{i+1},y)\right\|_{L_\infty[y_j,g^{(1)}_{j+1}(x)]}\times\frac{(\Delta 2_y)^2}{8}\right\};$$

$$\left|\frac{y-g_{j+1}(x)}{y_j-g_{j+1}(x)}R_2 f(x,y_j)+\frac{y-y_j}{g_{j+1}(x)-y_j}R_2 f(x,g_{j+1}(x))\right|\le$$

$$\le\max\left\{\frac{y-g_{j+1}(x)}{y_j-g_{j+1}(x)}\left\|f^{(2,0)}(x,y_j)\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]}\times\frac{(\Delta_x)^2}{8},\right.$$

$$\left.\frac{y-y_j}{g_{j+1}(x)-y_j}\left\|f^{(2,0)}(x,g^{(1)}_{j+1}(x))\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]}\times\frac{(\Delta_x)^2}{8}\right\}.$$

Теорема 3 доведена.

2. Побудова розривного апроксимаційного сплайна

Визначення. *Будемо називати розривним апроксимаційним поліноміальним сплайном в області* $\mathrm{TP}_{ij}\subset D$ *функцію (1), в якій коефіцієнти* $C^k_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,4}$ *сплайна* $S(x,y)$ *знаходяться методом найменших квадратів з умови*

$$\iint\limits_{\mathrm{TP}_{ij}}(f(x,y)-S(x,y))^2\,dxdy\to\min_C. \qquad (2)$$

Теорема 4. Для оператора наближення розривної функції $f(x,y)\in C^{(2,2)}(\mathrm{TP}_{ij})$ розривним апроксимаційним сплайном $S(x,y)$ вигляду (1), побудованого за допомогою методу найменших квадратів, на кожному елементі розбиття $\mathrm{TP}_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$, справедлива наступна оцінка:

$$\left\|Sp(x,y)\right\|_\infty\le\max\{\left|f(x_i,y_j)\right|,\left|f(x_{i+1},y_j)\right|,$$

$$\left|f(x_i,g_{j+1}(x_i))\right|,\left|f(x_{i+1},g_{j+1}(x_{i+1}))\right|\}+Q,$$

де Q визначається в теоремі 3.

Доведення. Проведемо доведення на прикладі трапеції $\mathrm{TP}^{(1)}_{ij}$. Тоді, позначаючи $g(x)=g^{(1)}_{j+1}(x)$, формула (1) перетвориться у наступний вираз

$$S(x,y)=C^{(1)}_1\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}+$$

$$+C^{(1)}_2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}+$$

$$+C^{(1)}_3\frac{y-y_j}{g(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+$$

$$+C^{(1)}_4\frac{y-y_j}{g(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}.$$

Розв'яжемо мінімізаційну задачу:

$$P_{ij}(C)=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g(x)}\left(C^{(1)}_1\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}+\right.$$

$$+C^{(1)}_2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}+$$

$$+C^{(1)}_3\frac{y-y_j}{g(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+$$

$$\left.+C^{(1)}_4\frac{y-y_j}{g(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}-f(x,y)\right)^2dxdy\to\min_C.$$

Вираз у дужках позначимо через $L(x,y,C)$.

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{(1)}_1}=0,\ \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{(1)}_2}=0,\ \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{(1)}_3}=0,\ \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{(1)}_4}=0$$

відносно невідомих $C^{(1)}_k, k=1,2,3,4$:

$$\begin{cases}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g(x)}(S(x,y-f(x,y))\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}dydx=0\\ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g(x)}(S(x,y)-f(x,y))\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}dydx=0\\ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g(x)}(S(x,y-f(x,y))\frac{y-y_j}{g(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}dydx=0\\ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g(x)}(S(x,y)-f(x,y))\frac{y-y_j}{g(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}dydx=0\end{cases}\qquad(3)$$

У системі зробимо заміну

$$C^{(1)}_1=f\left(x_i+0,y_j+0\right)+\varepsilon_{i,j},$$

$$C^{(1)}_2=f\left(x_{i+1}-0,y_j+0\right)+\varepsilon_{i+1,j},$$

$$C^{(1)}_3=f\left(x_i+0,g(x_i)-0\right)+\varepsilon_{i,j+1},$$

$$C^{(1)}_4=f\left(x_{i+1}-0,g(x_{i+1})-0\right)+\varepsilon_{i+1,j+1}$$

і замінимо $f(x,y)$ інтерполяційним сплайном, побудованим на трапецевидному елементі $\mathrm{TP}^{(1)}_{ij}$ із залишковим членом $R(x,y)$, який був виведений у роботі [9]. В результаті отримаємо наступні вирази для інтегральних членів отриманої системи, приймаючи до уваги, що . $g(x)=ax^2+bx+c$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}\right)^2 dxdy=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(12ax_i+6ax_ix_{i+1}+15bx_i+2ax_{i+1}^2+5bx_{i+1}-20y_j+20c)}{180};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\left(\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}\right)^2 dxdy=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(3ax_i^2+4ax_ix_{i+1}+5bx_i+3ax_{i+1}^2+5bx_{i+1}-10y_j+10c)}{180};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\frac{(y-y_j)(y-g(x))}{(g(x)-y_j)^2}dxdy=-\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(12ax_i+6ax_ix_{i+1}+15bx_i+2ax_{i+1}^2+5bx_{i+1}-20y_j+20c)}{360},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\frac{(y-y_j)(y-g(x))}{(g(x)-y_j)^2}dydx=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(3ax_i^2+4ax_ix_{i+1}+5bx_i+3ax_{i+1}^2+5bx_{i+1}-10y_j+10c)}{360};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}\right)^2 dxdy=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(2ax_i^2+6ax_ix_{i+1}+5bx_i+12ax_{i+1}^2+15bx_{i+1}-20y_j+20c)}{180};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\frac{(y-y_j)(y-g(x))}{(g(x)-y_j)^2}dxdy=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(2ax_i^2+6ax_ix_{i+1}+5bx_i+12ax_{i+1}^2+15bx_{i+1}-20y_j+20c)}{360};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(\frac{y-y_j}{g(x)-y_j}\right)^2 dxdy=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(12ax_i^2+6ax_ix_{i+1}+15bx_i+2ax_{i+1}^2+5bx_{i+1}-20y_j+20c)}{180};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\left(\frac{y-y_j}{g(x)-y_j}\right)^2 dxdy=-\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(3ax_i^2+4ax_ix_{i+1}+5bx_i+3ax_{i+1}^2+5bx_{i+1}-10y_j+10c)}{180};$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(\frac{y-y_j}{g(x)-y_j}\right)^2 dxdy=\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(2ax_i^2+6ax_ix_{i+1}+5bx_i+12ax_{i+1}^2+15bx_{i+1}-20y_j+20c)}{180}.$$

Для аналізу доданків, до складу яких входить залишковий член $R(x,y)$, скористаємося формулою з роботи [9]:

$$|f(x,y)-S(x,y)|\le Q,$$

де Q визначається в теоремі 3. Тоді отримаємо:

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}dydx\right|\le Q\cdot\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(3ax_i^2+2ax_ix_{i+1}+4bx_i+ax_{i+1}^2+2bx_{i+1}-6y_j+6c)}{24};$$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g(x)}{y_j-g(x)}dydy\right|\le Q\cdot\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(ax_i^2+2ax_ix_{i+1}+2bx_i+3ax_{i+1}^2+4bx_{i+1}-6y_j+6c)}{24};$$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{g(x)-y_j}dydx\right|\le Q\cdot\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(3ax_i^2+2ax_ix_{i+1}+4bx_i+ax_{i+1}^2+2bx_{i+1}-6y_j+6c)}{24};$$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{g(x)}R(x,y)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{g(x)-y_j}dydx\right|\le Q\cdot\Delta_x\times$$

$$\times\frac{(ax_i^2+2ax_ix_{i+1}+2bx_i+3ax_{i+1}^2+4bx_{i+1}-6y_j+6c)}{24}.$$

Використовуючи позначення

$$\|\varepsilon\|=\max\{\varepsilon_{i,j},\varepsilon_{i+1,j},\varepsilon_{i,j+1}+\varepsilon_{i+1,j+1}\}$$

та спростивши отримані вирази, рівняння системи (3) будуть мати однаковий вигляд

$$\frac{(3ax_i^2+2ax_ix_{i+1}+4bx_i+ax_{i+1}^2+2bx_{i+1}-6y_j+6c)}{24}\|\varepsilon\|\le$$

$$\le Q\cdot\frac{(3ax_i^2+2ax_ix_{i+1}+4bx_i+ax_{i+1}^2+2bx_{i+1}-6y_j+6c)}{24}.$$

Тобто $\|\varepsilon\|\le Q$.

Теорема доведена.

Наслідок. Якщо наближувана функція $f(x,y)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трапецевидному елементі розбиття з точками розриву $(x_i,y_j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном $S(x,y)$, визначеним формулами (1) з невідомими $C_m^{(k)}, m=\overline{1,4}, k=\overline{1,8}$, що знаходяться з умови (2), отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x,y)=f(x,y)$, де $f(x,y)=A(const)$ або $f(x,y)=A_0+A_1x+A_2y+A_3xy$.

Зауваження. Якщо $C_1^{(1)}=C_1^{(2)}=C_1^{(3)}=C_1^{(4)}=$ $=S(x_i,y_j),\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ або $C_1^{(5)}=C_1^{(6)}=C_1^{(7)}=$ $=C_1^{(8)}=S(x_i,y_j)$, то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Приклад. Нехай функція задана на одиничному квадраті $[0,1]\times[0,1]$ (рис. 2)

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ если} \\ \quad 0,5<x<1;\, 0,5<y<(x-1)^2+0,7; \\ 1,5-4x^2-y^2, \text{ если} \\ \quad 0<x<0,5;\, 0,5<y<-(x-0,5)^2+0,95; \\ 0,5, \text{ если} \\ \quad 0<x<0,5;\, (x-0,5)^2+0,05<y<0,5; \\ 1-x+y^2, \text{ если} \\ \quad 0,5<x<1;\, -(x-1)^2+0,3<y<0,5. \end{cases}.$$

Тобто на лініях фігури, зображеної на рис. 2*а*), функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії:

$$x_1=0; x_2=0,5; x_3=1,$$

$$y_1=0;\; y_2^1=(x-0,5)^2+0,05;\; y_2^2=-(x-1)^2+0,3,$$

$$y_3=0,5;\; y_3^1=(x-1)^2+0,7;\; y_3^2=-(x-0,5)^2+0,95.$$

Вони розбивають область визначення функції $f(x,y)$ на вісім трапецевидних елементів з однією криволінійною стороною у кожному елементі.

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн вигляду (1), його графік наведений на рис.3а). Визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого сплайну $S(x,y)$:

$$\max|f(x,y)-S(x,y)|\approx 0,3.$$

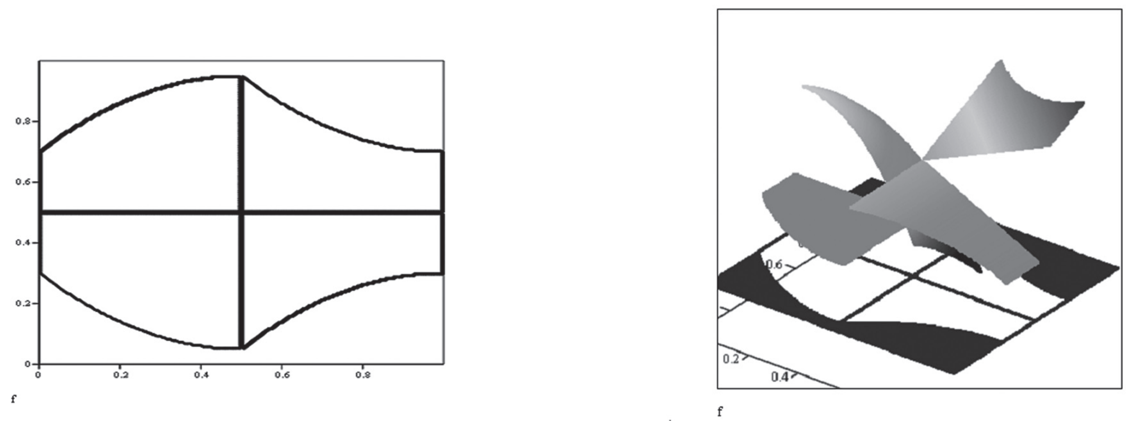
Тепер побудуємо розривний апроксимаційний сплайн за формулами (1), коефіцієнти якого знаходяться з умови (2). Графічне зображення цього сплайну наведено на рис. 3*б*). Визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого сплайну $S(x,y)$:

$$\max|f(x,y)-S(x,y)|\approx 0,08\,.$$

Як бачимо, побудований розривний апроксимаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний. Побудовані розривні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

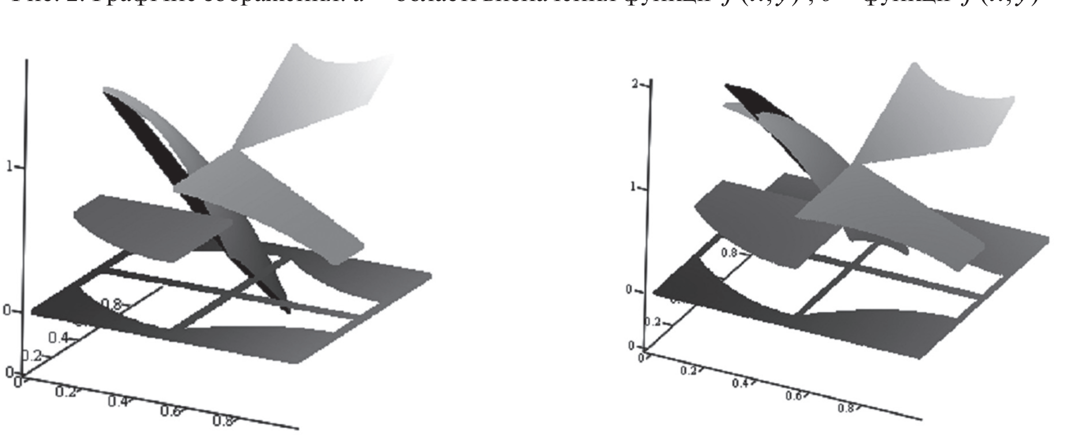
Висновки

В роботі пропонується метод побудови розривного інтерполяційного та апроксимаційного лінійного сплайнів для наближення функції з розривами



а *б*

Рис. 2. Графічне зображення: *а* – області визначення функції $f(x,y)$; *б* – функції $f(x,y)$



а *б*

Рис. 3. Графічний вигляд розривного: *а* – інтерполяційного, *б* – апроксимаційного сплайнів (чорний колір) та заданої функції (сірий колір) першого роду, область визначення яких розбита на криволінійні трапеції. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

У подальшому авторами планується розробити методи наближення розривних функцій розривними сплайнами, коли розриви наближуваної функції не падають з вузлами наближуючого сплайну. А також планується застосувати розроблену теорію наближення розривних функцій розривними сплайнами до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

Список літератури: 1. *Корнейчук, Н.П.* Сплайны в теории приближения [Текст] / Н.П. Корнейчук. – М: Наука, 1984. – 352 с. **2.** *Сьярле, Ф.* Метод конечних элементов для эллиптических задач [Текст] / Ф.Сьярле. – Изд-во "Мир", Москва, 1980. – 512 с. **3.** *Попов, Б. А.* Равномерное приближение сплайнами [Текст] / Б.А. Попов. – К.: Наук. думка, 1989.– 272 с. **4.** *Петровская, Н.Б.* Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем високого порядка [Текст / Н.Б. Петровская // Математическое моделирование..– Москва.– 2005.– Т. 17, №1. – С. 79–92. **5.** *Arnold D.N.* Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems [Text] / Arnold D.N. // SIAM Journal on Numerical Analysis.– 2002. – Vol. 39, № 5.– P. 1749-1779. **6.** *Литвин, О.М.* Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області [Текст] / О.М. Литвин, Ю.І. Першина// Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63–72. **7.** *Литвин, О.Н.* Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) [Текст] / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Компьютерная математика. – Киев. – 2011. – №1. – С. 96–105. **8.** *Литвин, О.М.* Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области [Текст] / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Управляющие системы и машины. – Киев, – 2011, № 5. – С. 34–47. **9.** *Литвин, О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування [Текст] / О.М. Литвин.– Х: Основа, 2002. – 544 с.

Надійшла до редколегії 27.01.2012

УДК 519.6

Восстановление объектов, которые описываются разрывными функциями, с использованием криволинейных трапеций / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. – 2012. – № 1 (78). – С. 37-44.

Построены разрывные интерполяционные и аппроксимационные сплайны для приближения разрывных функций, область определения которых разбивается на криволинейные трапеции. Сформулированы и доказаны теоремы об общем виде погрешности приближения интерполяционным сплайном и об оценке погрешности приближения. Также в работе представлена оценка построенного аппроксимационного разрывного сплайна. И показано, что построенные разрывные конструкции включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны.

Ил. 3. Библиогр.: 9 назв.

UDK 519.6

Restoration of objects which are described by discontinuous functions with use of curvilinear trapezes/ O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2012. – № 1 (78). –P. 37-44.

Are constructed discontinuous interpolational and approximational splines for approach of the discontinuous functions which range of definition breaks into curvilinear trapezes. Theorems of a general view of an error approach by inerpolational spline and about an estimation of an error of approach are formulated and proved As in work the estimation constructed approximational discontinuous spline is presented. Also it is shown, that the constructed discontinuous designs include classical continuous splines as a special case.

Fig. 3. Ref.: 9 items.