

## ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Выполнение данной работы продиктовано рядом проблем интегральной оптики [1] и геофизики [2], которые в теоретическом плане сводятся к задаче рассеяния плоской электромагнитной волны на многослойной структуре с инородным включением. Использовалась двумерная модель в виде плоскослоистой среды с включением в форме кругового цилиндра. Достаточно реалистичная, эта модель поддается аналитическому рассмотрению с помощью сравнительно простых средств. Известные ранее результаты получены для частных случаев, когда среда, вмещающая включение, представляет собой двухслойное кусочно-однородное полупространство [1; 2].

Опишем постановку задачи. Отнесем трехмерное пространство к прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, а ось  $Oy$  — вправо. Окружающей среде отведем область  $0 < z < +\infty$ , а структуре — область  $-\infty < z < 0$  ( $-\infty < x, y < +\infty$ ). Совокупную среду, заполняющую все пространство, охарактеризуем комплекснозначными диадами диэлектрической и магнитной проницаемости:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}(z) &= \epsilon_t(z)(\vec{x}_0\vec{x}_0 + \vec{y}_0\vec{y}_0) + \epsilon_z(z)\vec{z}_0\vec{z}_0; \\ \vec{\mu}(z) &= \mu_t(z)(\vec{x}_0\vec{x}_0 + \vec{y}_0\vec{y}_0) + \mu_z(z)\vec{z}_0\vec{z}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  — орты осей  $x, y, z$ ). Окружающая среда однородна и изотропна, в соответствии с чем для каждого значения символа  $\eta = \epsilon$  или  $\mu$  функции  $\eta_t(z)$  и  $\eta_z(z)$  принимают при  $0 < z < +\infty$  постоянные и одинаковые положительные значения:  $\eta_t(z) = \eta_z(z) = \eta_e > 0$ . В области  $-\infty < z < 0$  среда состоит из неоднородного слоя  $f < z < 0$  и однородной подложки  $-\infty < z < f$ . Неоднородный слой и подложка — одноосные, с вертикальной оптической осью. В пределах  $f < z < 0$  величины  $\eta_t(z), \eta_z(z)$  — произвольные кусочно-гладкие функции переменной  $z$ , а на интервале  $-\infty < z < f$  они принимают постоянные значения  $\eta_t(z) = \eta_{ct}, \eta_z(z) = \eta_{cz}$  ( $\eta_{ct, z} = \text{const}$ ). Среда в нижнем полупространстве считается диссипативной, поэтому мнимые части функций  $\eta_t(z)$  и  $\eta_z(z)$  при  $f < z < 0$  и постоянных  $\eta_{ct}, \eta_{cz}$  положительны. Случай среды без потерь входит в наше рассмотрение как предельный.

Пусть сторонние монохроматические источники  $\vec{J}(r)$  и  $\vec{M}(r)$ , распределение которых не зависит от  $x$ , создают в указанной регу-

лярной среде поле  $\vec{E}_0(\vec{r})$ ,  $\vec{H}_0(\vec{r})$ . Оно подчиняется уравнениям Максвелла

$$\nabla_{\perp} \times \vec{E}_0(\vec{r}) - ik_0 \hat{\mu}(z) \vec{H}_0(\vec{r}) = -(4\pi/c) \vec{M}(\vec{r});$$

$$\nabla_{\perp} \times \vec{H}_0(\vec{r}) + ik_0 \hat{\epsilon}(z) \vec{E}_0(\vec{r}) = (4\pi/c) \vec{J}(\vec{r}), \quad (2)$$

( $-\infty < y, z < +\infty$ ), условиям непрерывности горизонтальных компонент поля на всех поверхностях раздела и излучения в бесконечности. Здесь и далее временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен;  $c$  — скорость света в вакууме;  $k_0 = \omega/c$ ,  $\vec{r} = (0, y, z)$ ;  $\nabla_{\perp} = \vec{y}_0 \partial_y + \vec{z}_0 \partial_z$ . Из (2) видно, что вертикально ( $s$ ) поляризованная составляющая поля  $H_{0x}$ ,  $E_{0y}$  и  $E_{0z}$  порождена компонентами  $M_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$  источников, а горизонтально ( $p$ ) поляризованная составляющая  $E_{0x}$ ,  $H_{0y}$ ,  $H_{0z}$  — компонентами  $J_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

Поместим теперь в слой  $f < z < 0$  включение в форме бесконечно длинного цилиндра с поперечным сечением  $S$ , образующие которого параллельны оси  $Ox$ . Материал цилиндра — одноосный, с вертикальной оптической осью. Он характеризуется диадами диэлектрической и магнитной проницаемости  $\hat{\epsilon}_p(\vec{r})$  и  $\hat{\mu}_p(\vec{r})$  (1). Их компоненты  $\epsilon_{pt}(\vec{r})$ ,  $\epsilon_{pz}(\vec{r})$ ,  $\mu_{pt}(\vec{r})$  и  $\mu_{pz}(\vec{r})$  представляют собой кусочно-гладкие комплекснозначные функции переменного  $\vec{r}$ , вид которых пока не конкретизируем. Пусть  $S$  и область локализации сторонних источников в плоскости  $yOz$  не пересекаются. Тогда во внешности  $CS$  области  $S$  электромагнитное поле сторонних источников можно представить в виде  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$ , где  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  — первичное поле, создаваемое источниками в отсутствие включения, а  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  неизвестное рассеянное поле. Поле во внутренних точках включения, также подлежащее отысканию, при необходимости обозначим индексом  $p$ :  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_p(\vec{r})$ ,  $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_p(\vec{r})$  ( $\vec{r} \in S$ ). С этого момента рассматриваем  $s$  — поляризованное поле  $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$ ,  $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$ , положив, что  $\vec{J} = (0, J_y, J_z)$ ,  $\vec{M} = (M_x, 0, 0)$ .

Из уравнений Максвелла в области  $CS$ , дополняющей  $S$  до всей плоскости  $yOz$ , условий сопряжения для поля на границе  $L$  области  $S$  и формул Грина вытекают следующие соотношения:

$$E_y(\vec{r}) = [i/k_0 \epsilon_t(z)] \partial_z H_x(\vec{r}), \quad E_z(\vec{r}) = -[ik_0 \epsilon_z(z)] \partial_z H_x(\vec{r}), \quad (3)$$

$$H_x(\vec{r}) = \int_L dl' \langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle \quad (\vec{r} \in CS);$$

$$H_{0x}(\vec{r}) + \int_L dl' \langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle = 0 \quad (\vec{r} \in S). \quad (4)$$

Обозначим

$$\langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle \equiv H_e(\vec{r}, \vec{r}') [\epsilon_{pz}^{-1}(\vec{r}') N'_y \partial_{y'} + \epsilon_{pt}^{-1}(\vec{r}') N'_z \partial_{z'}] \times \\ \times H_{px}(\vec{r}') - H_{px}(\vec{r}') [\epsilon_z^{-1}(z') N'_y \partial_{y'} + \epsilon_t^{-1}(z') N'_z \partial_{z'}] H_e(\vec{r}, \vec{r}');$$

$dl'$  и  $\vec{N}'$  — элемент длины контура  $L$  и нормаль к  $L$  в точке  $\vec{r}' \in L$ , направленная из  $S$  в  $CS: \vec{N}' = (0, N_y', N_z')$ . Функция  $H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  определена как решение уравнения

$$[D_e(z) + k_e^2(z) + \partial_y^2] H_e(\vec{r}, \vec{r}') = e_z(z) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

( $-\infty < y, z < +\infty$ ), которое в точках разрыва коэффициентов этого уравнения непрерывна вместе с  $e_z^{-1}(z) \partial_z H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  (последнее — при  $z \neq z'$ ), а в бесконечности удовлетворяет условию излучения. Здесь  $D_e(z) = e_z(z) \partial_z e_z^{-1}(z) \partial_z$ ;  $k_e^2(z) = k_0^2 e_z(z) \mu_t(z)$ ;  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

В области  $S$  из уравнений Максвелла и условий на внутренних границах раздела следуют соотношения

$$E_{py}(\vec{r}) = [i/k_0 \epsilon_{pt}(\vec{r})] \partial_z H_{px}(\vec{r}), \quad E_{pz}(\vec{r}) = -[i/k_0 \epsilon_{pz}(\vec{r})] \partial_y H_{px}(\vec{r}) \quad (6)$$

уравнение для  $H_{px}(\vec{r})$

$$[\partial_z \epsilon_{pt}^{-1}(\vec{r}) \partial_z + \partial_y \epsilon_{pz}^{-1}(\vec{r}) \partial_y + k_0^2 \mu_{pt}(\vec{r})] H_{px}(\vec{r}) = 0 \quad (7)$$

и требование непрерывности величин  $H_{px}(\vec{v})$ ,  $[\epsilon_{pt}^{-1}(\vec{r}) n_z(\vec{r}) \partial_z + \epsilon_{pz}^{-1}(\vec{r}) \times \times n_y(\vec{r}) \partial_y] H_{px}(\vec{r})$  на всех линиях в  $S$ , где коэффициенты уравнения (7) испытывают разрыв ( $\vec{n}$  — нормаль к линии разрыва:  $\vec{n} = (0, n_y, n_z)$ ).

Дополним уравнение (7) и упомянутое требование непрерывности равенством, вытекающим из тождества (4):

$$\lim_{S \subset \vec{r} \rightarrow \vec{r}_L} \int_b \langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle dl' = -H_{0x}(\vec{r}_L), \quad (\vec{r}_L \in L). \quad (8)$$

В результате получаем замкнутую краевую задачу относительно  $H_{px}$  в области  $S$ . Соотношение (8) играет роль нелокального граничного условия, учитывающего наличие внешней области  $CS$  [1; 3; 4, с. 5].

Если величина  $H_{px}(\vec{r})$  известна, равенства (3), (6) превращаются в прямые формулы для расчета  $H_x', E_y', E_z'$  и  $E_{py}, E_{pz}$ .

С этого момента считаем, что включение целиком находится в однородном и изотропном участке  $d < z < b$  неоднородного одноосного слоя  $f < z < 0$  ( $f < d < b < 0$ ). В пределах данного участка для каждого значения  $\eta = \epsilon$  или  $\mu$  обе функции  $\eta_t(z)$  и  $\eta_z(z)$  совпадают и принимают постоянное значение  $\eta_{m1}$   $\epsilon_{t,z}(z) = \epsilon_m$ ,  $\mu_{t,z}(z) = \mu_m$  ( $\epsilon_m, \mu_m = \text{const}$ ). Приведем выражения для полей, возбуждаемых в регулярной структуре источниками частного вида.

Обозначим  $k_e = k_0 \sqrt{\epsilon_e \mu_e}$ ,  $k = k_0 \sqrt{\epsilon_m \mu_m}$ ,  $k_{ce} = k_0 \sqrt{\epsilon_{cz} \mu_{ct}}$  ( $0 \leq \arg k_{e,m,ce} < \pi$ ) и введем в рассмотрение следующие функции комплексного переменного  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{ce} &= [(\epsilon_{cz}/\epsilon_{ct})(k_{ce}^2 - \kappa^2)]^{1/2}, \quad \gamma = (k^2 - \kappa^2)^{1/2}, \\ \gamma_e &= (k_e^2 - \kappa^2)^{1/2}, \quad \zeta(f, \kappa) = \gamma_{ce}(\kappa)/k_0 \epsilon_{ct}. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим на интервале  $f < z < d$  функцию  $\Psi_e^-(z, \kappa)$  как любое решение уравнения  $[D_e(z) + k_e^2(z) - \kappa^2]u(z) = 0$  (10), которое в точках разрыва коэффициентов этого уравнения при  $f < z < d$  непрерывно вместе с  $\varepsilon_i^{-1}(z) \partial_z u(z)$ , а при  $z = f + 0$  подчиняется граничному условию  $[\partial_z + ik_0 \zeta(f, \kappa) \varepsilon_i(f + 0)] \Psi_e^-(z, \kappa) = 0$ . Далее положим, что указанные условия в точках разрыва «встроены» на соответствующем интервале в уравнение (10), и упоминание о них мы опускаем. Вычислим величины

$$\xi(d, \kappa) = -\dot{\Psi}_e^-(d - 0, \kappa) / ik_0 \varepsilon_i(d - 0) \Psi_e^-(d - 0, \kappa);$$

$\zeta(b, \kappa) = [\xi(d, \kappa) + (\gamma / ik_0 \varepsilon_m) \operatorname{tg}(\gamma h)] / [1 - i(k_0 \varepsilon_m / \gamma) \xi(d, \kappa) \operatorname{tg}(\gamma h)]$  (11) ( $\dot{=} \partial_z$ ,  $h = b - d$ ) и построим на интервале  $b < z < 0$  функцию  $\Phi_e^-(z, \kappa)$ . Она служит решением уравнения (10) при  $b < z < 0$  и удовлетворяет при  $z = b + 0$  условию  $[\partial_z + ik_0 \zeta(b, \kappa) \varepsilon_i(b + 0)] \times \times \Phi_e^-(z, \kappa) = 0$ . Обозначим  $\zeta(0, \kappa) = -\dot{\Phi}_e^-(-0, \kappa) / ik_0 \varepsilon_i(-0) \Phi_e^-(-0, \kappa)$ . Величины  $\zeta$  имеют смысл входного импеданса соответствующей границы:  $z = f, d, b$  или  $0$  — по отношению к полю, источники которого находятся выше этой границы. Введем на всей оси  $-\infty < z < +\infty$  решение уравнения (10) следующего вида:

$$H(z, \kappa) = \begin{cases} \exp(-i\gamma_e z) + R_s(0, \kappa) \exp(i\gamma_e z), & 0 < z < +\infty; \\ [1 + R_s(0, \kappa)] K^-(\kappa) F^-(z, \kappa), & -\infty < z < 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$F^-(z, \kappa) = \begin{cases} \Phi_e^-(z, \kappa) / \Phi_e^-(-0, \kappa), & b < z < 0; \\ L^- \exp(i\gamma z) + M^- \exp(-i\gamma z), & d < z < b; \\ N^- \Psi_e^-(z, \kappa) / \Psi_e^-(d - 0, \kappa), & f < z < d; \\ \exp[i\gamma_e (f - z)] N^- \Psi_e^-(f + 0, \kappa) / \Psi_e^-(d - 0, \kappa), & -\infty < z < f; \end{cases} \quad (13)$$

$$R_s(0, \kappa) = \frac{\gamma_e - k_0 \varepsilon_e \zeta(0, \kappa)}{\gamma_e + k_0 \varepsilon_e \zeta(0, \kappa)}; \quad K^-(\kappa) = \frac{\Phi_e^-(b - 0, \kappa)}{\Phi_e^-(-0, \kappa)};$$

$$2L^-(\kappa) = e^{-i\gamma b} [1 - k_0 \varepsilon_m \zeta(b, \kappa) / \gamma], \quad 2M^-(\kappa) = e^{i\gamma b} [1 + k_0 \varepsilon_m \zeta(b, \kappa) / \gamma]; \\ N^-(\kappa) = \cos(\gamma h) + (ik_0 \varepsilon_m / \gamma) \zeta(b, \kappa) \sin(\gamma h). \quad (14)$$

Определим общий правильный лист  $C_r$  римановой поверхности функций  $\gamma_e(\kappa)$  и  $\gamma(\kappa)$  условиями  $\operatorname{Im} \gamma_e(\kappa) \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \gamma(\kappa) \geq 0$ . При  $\kappa \in C_r$  функция  $H_{0x}(r) = \exp(i\kappa y) A_s^- H^-(z, \kappa)$ , очевидно, описывает поле, возбуждаемое в среде  $s$  — поляризованной плоской волной с амплитудой  $A_s^-$ , которая падает из верхнего полупространства в направлении волнового вектора  $\vec{y}_0 \kappa - z_0 \gamma_e$ . Пусть  $\kappa'$  — произвольный корень уравнения  $\gamma_e(\kappa) + k_0 \zeta(0, \kappa) \varepsilon_e = 0$  (15). Положив  $A_s^- = A_s' [\gamma_e + k_0 \times \times \zeta(0, \kappa) \varepsilon_e] / 2\gamma_e$ , совершив в предыдущем выражении для  $H_{0x}(r)$  предельный переход  $\kappa \rightarrow \kappa'$ . В результате получаем первичное поле в виде нормальной волны слоистой среды  $H_{0x}(r) = \exp(i\kappa' y) A_s' H_n(z, \kappa')$ , где

$$H_n(z, \kappa') = \begin{cases} \exp[i\gamma_e(\kappa') z], & 0 < z < +\infty; \\ K^-(\kappa') F^-(z, \kappa'), & -\infty < z < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Обозначим  $\xi(0, \kappa) = \gamma_e(\kappa)/k_0 \varepsilon_e$  и введем в рассмотрение функцию  $\Phi_e^+(z, \kappa)$  — решение уравнения (10) на интервале  $b < z < 0$ , удовлетворяющее при  $z = -0$  граничному условию  $[\partial_z - ik_0 \varepsilon_t(-0)] \xi(0, \kappa) \times \Phi_e^+(z, \kappa) = 0$ . Введем величины

$$\begin{aligned} \xi(b, \kappa) &= \Phi_e^+(b+0, \kappa)/ik_0 \varepsilon_t(b+0) \Phi_e^+(b+0, \kappa); \\ \xi(d, \kappa) &= [\xi(b, \kappa) + (\gamma/ik_0 \varepsilon_m) \operatorname{tg}(\gamma h)] [1 - (ik_0 \varepsilon_m/\gamma) \xi(b, \kappa) \operatorname{tg}(\gamma h)] \end{aligned} \quad (17)$$

и функцию  $\Psi_e^+(z, \kappa)$ . Последняя определена на интервале  $f < z < d$  как решение уравнения (10), подчиняющееся при  $z = d - 0$  условию  $[\partial_z - ik_0 \varepsilon_t(d-0)] \xi(d, \kappa) \Psi_e^+(z, \kappa) = 0$ . Свяжем с  $\Psi_e^+(z, \kappa)$  функцию переменного  $\kappa$ :  $\xi(f, \kappa) = \Psi_e^+(f+0, \kappa)/ik_0 \varepsilon_t(f+0) \Psi_e^+(f+0, \kappa)$ . Величины  $\xi$  имеют смысл входного импеданса соответствующей границы  $z = 0, b, d$  или  $f$ ) по отношению к полю, источники которого находятся ниже этой границы. Обозначим через  $H^+(z, \kappa)$  следующее решение уравнения (10) на всей оси:

$$H^+(z, \kappa) = \begin{cases} [1 + Q_s(f, \kappa)] K^+(\kappa) F^+(z, \kappa), & f < z < +\infty; \\ \exp[i\gamma_{ce}(z-f)] + Q_s(f, \kappa) \exp[i\gamma_{ce}(f-z)], & -\infty < z < f; \end{cases} \quad (18)$$

$$F^+(z, \kappa) = \begin{cases} \exp(i\gamma_e z) N^+ \Phi_e^+(-0, \kappa) / \Phi_e^+(b+0, \kappa), & 0 < z < +\infty; \\ N^+ \Phi_e^+(z, \kappa) / \Phi_e^+(b+0, \kappa), & b < z < 0; \\ L^+ \exp(i\gamma z) + M^+ \exp(-i\gamma z), & d < z < b; \\ \Psi_e^+(z, \kappa) / \Psi_e^+(f+0, \kappa), & f < z < d; \end{cases} \quad (19)$$

$$Q_s(f, \kappa) = \frac{\gamma_{ce} - k_0 \varepsilon_{ct} \xi(f, \kappa)}{\gamma_{ce} + k_0 \varepsilon_{ct} \xi(f, \kappa)}; \quad K^+(\kappa) = \frac{\Psi_e^+(d-0, \kappa)}{\Psi_e^+(f+0, \kappa)};$$

$$\begin{aligned} 2L^+(\kappa) &= e^{-i\gamma d} [1 + k_0 \varepsilon_m \xi(d, \kappa)/\gamma]; & 2M^+(\kappa) &= e^{i\gamma d} [1 - k_0 \varepsilon_m \xi(d, \kappa)/\gamma]; \\ N^+(\kappa) &= \cos(\gamma h) + (ik_0 \varepsilon_m/\gamma) \xi(d, \kappa) \sin(\gamma h). \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что при  $\kappa \in C_r$  функция  $H_{0x}(\vec{r}) = \exp(i\kappa y) A_s^+ H^+(z, \kappa)$  описывает первичное поле, которое возбуждается плоской волной с амплитудой  $A_s^+$ , идущей из нижней среды в направлении волнового вектора  $y_0 \kappa + z_0 \gamma_{ce}$ .

Стандартная схема построения функции  $H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  путем разложения в интеграл Фурье приводит к окончательному результату:

$$H_e(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{\Delta_e(\kappa)} H^+(z_>, \kappa) H^-(z_<, \kappa) e^{i\kappa(y-y')}; \quad (21)$$

$$\Delta_e(\kappa) \equiv \varepsilon_t^{-1}(z) [H^-(z, \kappa) \partial_z H^+(z, \kappa) - H^+(z, \kappa) \partial_z H^-(z, \kappa)];$$

$z_> = \max(z, z')$ ,  $z_< = \min(z, z')$ . Контур интегрирования здесь и в последующих выражениях (27), (29), (30) считается лежащим на правильном листе  $C_r$ . На участке  $-k_e < \kappa < k_e$  он совпадает с тем берегом разреза по линии  $\operatorname{Im} \gamma_e(\kappa) = 0$ , где  $\arg \gamma_e(\kappa) = 0$ . Значения

функции  $\gamma_e(x)$  в точках упомянутого контура можно записать как  $\gamma_e(x) = \sqrt{k_e^2 - x^2}$  при  $-k_e < x < k_e$  и  $\gamma_e(x) = i\sqrt{x^2 - k_e^2}$  при  $x > k_e$  либо  $x < -k_e$  (здесь фигурирует арифметический квадратный корень). Величины  $H^\pm(z, x)$ , а значит, и подынтегральное выражение в (21) не зависит от выбора ветви функции  $\gamma(x)$ . Это же характерно для полученных с использованием (21) формул (27), (29), (30), (33). Подчеркнем, однако, что в статье используется одна и та же ветвь  $\gamma(x)$ . Ее удобно зафиксировать проведением разрезов по линии  $\text{Im} \gamma(x) = 0$  и требованием  $\text{Im} \gamma(x) > 0$  в остальных точках комплексной плоскости.

Перейдем к решению задачи относительно поля внутри включения. Ограничимся далее частным случаем, когда цилиндр имеет круговое сечение радиуса  $a$  с центром в точке  $\vec{r}_p = (0, y_p, z_p)$ , т. е.  $S = \{\vec{r} : |\vec{r} - \vec{r}_p| < a\}$  ( $b + a < z_p < -a$ ), материал цилиндра изотропный и радиально-слоистый:  $\epsilon_{pt}(\vec{r}) = \epsilon_{pz}(\vec{r}) = \epsilon_p(\rho)$ ,  $\mu_{pt}(\vec{r}) = \mu_{pz}(\vec{r}) = \mu_p(\rho)$ . Здесь  $\epsilon_p(\rho)$  и  $\mu_p(\rho)$  — некоторые кусочно-гладкие комплекснозначные функции переменного  $\rho = [(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]^{1/2}$ . Пусть  $R_e(\rho, \nu)$  — произвольное решение уравнения с (комплекснозначным) параметром  $\nu$ :

$$\left[ \frac{\epsilon_p(\rho)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho}{\epsilon_p(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} + k_0^2 \epsilon_p(\rho) \mu_p(\rho) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right] R_e(\rho, \nu) = 0, \quad (22)$$

( $0 < \rho < a$ ), которое в точках разрыва коэффициентов этого уравнения непрерывно вместе с  $\epsilon_p^{-1}(\rho) \partial R_e(\rho, \nu) / \partial \rho$ , а в точке  $\rho = 0$  ограничено. Тогда решение уравнения (7), удовлетворяющее надлежащим условиям непрерывности на внутренних границах раздела, запишем в виде

$$H_{px}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m H_m R_e(\rho, m) \exp(im\varphi), \quad (23)$$

где  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $H_m$  — неопределенные коэффициенты;  $\varphi$  — угол полярной системы координат  $\rho, \varphi$  в плоскости  $yOz$  с центром в точке  $\vec{r}_p$ :  $y - y_p = \rho \cos \varphi$ ,  $z - z_p = \rho \sin \varphi$ . Подстановка (23) в нелокальное граничное условие (8) доставляет бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $H_m$ :

$$H_m + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} H_n = F_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

Соответствующие вычисления приведены в работах [1; 2]. Коэффициенты при неизвестных и правые части имеют вид

$$C_{mn} = g_e(m, n) p_e(n) / \pi q_e(m), \quad F_m = f_e(m) / \pi q_e(m); \quad (25)$$

$$p_e(n) = \frac{e}{\epsilon_p(a)} \frac{\partial R_e(a, n)}{\partial a} J_n(ka) - R_e(a, n) \frac{\partial J_n(ka)}{\partial a};$$

$$q_e(m) = \frac{e}{\epsilon_D(a)} \frac{\partial R_e(a, m)}{\partial a} H_m^{(1)}(ka) - R_e(a, m) \frac{\partial H_m^{(1)}(ka)}{\partial a}; \quad (26)$$

$$f_e(m) = \int_0^{2\pi} d\varphi H_{0x}(\vec{r}_L(\varphi)) e^{-im\varphi} / J_m(ka) \pi a i^{m+1}.$$

Используем следующие обозначения:  $H_m^{(1)}$  и  $J_m$  — функция Ханкеля первого рода и функция Бесселя порядка  $m$ ;  $\vec{r}_L$  — переменная точка на контуре  $L$ ,  $\vec{r}_L(\varphi) = (0, y_p + a \cos \varphi, z_p + a \sin \varphi)$ .

$$g_e(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa [\chi^{-m} \Delta_{1s}(\kappa, n) + \chi^m \Delta_{2s}(\kappa, n)] / \gamma \Delta_s(\kappa); \quad (27)$$

$$\Delta_{1s}(\kappa, n) = e^{-2i\gamma d} R_s(d, \kappa) [\chi^{-n} e^{2i\gamma z_p} + \chi^n e^{2i\gamma b} Q_s(b, \kappa)];$$

$$\Delta_{2s}(\kappa, n) = e^{2i\gamma b} Q_s(b, \kappa) [\chi^n e^{-2i\gamma z_p} + \chi^{-n} e^{-2i\gamma d} R_s(d, \kappa)];$$

$$R_s(d, \kappa) = \frac{\gamma - k_0 e_m \zeta(d, \kappa)}{\gamma + k_0 e_m \zeta(d, \kappa)}; \quad Q_s(b, \kappa) = \frac{\gamma - k_0 e_m \xi(b, \kappa)}{\gamma + k_0 e_m \xi(b, \kappa)};$$

$$\Delta_s(\kappa) = 1 - R_s(d, \kappa) Q_s(b, \kappa) \exp(2i\gamma h), \quad (28)$$

$\chi(\kappa) = [\kappa + i\gamma(\kappa)]/k$ . В частном случае, когда первичное поле в слое  $d < z < b$  определяется выражением  $H_{0x}(\vec{r}) = \exp(i\kappa_0 y) [L_0 \exp(i\gamma_0 z) + M_0 \exp(-i\gamma_0 z)]$ , коэффициент  $f_e(m)$  из (26) приобретает вид  $f_e(m) = (2/ia) \exp(i\kappa_0 y_p) [L_0 \chi^{-m}(\kappa_0) \exp(i\gamma_0 z_p) + M_0 \chi^m(\kappa_0) \exp(-i\gamma_0 z_p)]$ ,  $\gamma_0 = \gamma(\kappa_0)$ .

Считая, что решение системы уравнений (24) известно, подставим формулу (23) с учетом (21) в нижнее из соотношений (3). В результате получаем следующие выражения для рассеянного поля во внешности включения: при  $b < z < +\infty$

$$H_x(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa u_e(z, \kappa) t_e(\kappa) e^{i\kappa(y-y_p)} P_e(\kappa) / 2i\gamma \Delta_s; \quad (29)$$

при  $-\infty < z < d$

$$H_x(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa v_e(z, \kappa) r_e(\kappa) e^{i\kappa(y-y_p)} S_e(\kappa) / 2i\gamma \Delta_s. \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} t_e(\kappa) &= \exp(i\gamma b) [1 + Q_s(b, \kappa)] \Phi_e^+(-0, \kappa) / \Phi_e^+(b+0, \kappa); \\ r_e(\kappa) &= \exp(-i\gamma d) [1 + R_s(d, \kappa)] \Psi_e^-(f+0, \kappa) / \Psi_e^-(d-0, \kappa); \\ P_e(\kappa) &= F_e(\kappa) \exp(-i\gamma z_p) + G_e(\kappa) R_s(d, \kappa) \exp[i\gamma(z_p - 2d)]; \\ S_e(\kappa) &= G_e(\kappa) \exp(i\gamma z_p) + F_e(\kappa) Q_s(b, \kappa) \exp[i\gamma(2b - z_p)]; \end{aligned} \quad (31)$$

$$F_e(\kappa) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m P_e(m) \chi^m(\kappa);$$

$$G_e(\kappa) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m P_e(m) \chi^{-m}(\kappa);$$

Функция  $u_e(z, \kappa)$ , определенная на интервале  $b < z < +\infty$  равна  $\exp(i\gamma_e z)$  при  $0 < z < +\infty$  и  $\Phi_e^+(z, \kappa)/\Phi_e^+(-0, \kappa)$  при  $b < z < 0$ . Функция  $v_e(z, \kappa)$ , которая задана в области  $-\infty < z < d$ , совпадает с  $\Psi_e^-(z, \kappa)/\Psi_e^-(f+0, \kappa)$  при  $f < z < d$  и равна  $\exp[i\gamma_{ce}(d-z)]$  при  $-\infty < z < f$ .

Применив к вычислению интеграла в (29) метод стационарной фазы, приходим к выражению для рассеянного поля в верхнем полупространстве ( $0 < \theta < \pi$ ), справедливому при  $k_e L \cos^2 \theta \gg 1$ :

$$H'_x(\vec{r}) = \sqrt{\pi} t_e(\kappa_s) P_e(\kappa_s) e^{i(k_e L - 3\pi/4)} / \sqrt{2k_e L} \Delta_s(\kappa_s). \quad (32)$$

В этой формуле  $L$  и  $\theta$  — полярная система координат в плоскости  $yOz$  с центром в точке  $(0, y_p, 0)$ :  $y - y_p = L \cos \theta$ ,  $z = L \sin \theta$ .

Деформация контура интегрирования в (21) в верхнюю полуплоскость листа  $C_r$  приводит к известному представлению функции  $H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  в виде разложения по собственным волнам регулярной среды [5]. Соответствующее представление для рассеянного поля в области  $-\infty < z < +\infty$ ,  $|y - y_p| > a$  запишем как

$$\begin{aligned} H'_x(\vec{r}) = & (2\pi/\varepsilon_m) \left[ \sum_k H_n(z, \kappa_k) e^{i\kappa_k |y - y_p|} h_k / 2i\kappa_k M_{sk} + \right. \\ & + i \int_{\Gamma} d\kappa H^-(z, \kappa) \exp[i\kappa |y - y_p|] h_-(\kappa) / M_{se}(\kappa) + \\ & \left. + i \int_{G_s} d\kappa H^+(z, \kappa) \exp[i\kappa |y - y_p|] h_+(\kappa) / M_{sc}(\kappa). \right] \quad (33) \end{aligned}$$

Здесь  $\sum_k$  — сумма по всем корням  $\kappa_k$  уравнения (15), которые лежат на  $C_r$  в верхней полуплоскости  $C_r^+ = \{\kappa: \text{Im } \kappa > 0\} \cup \{\kappa: \text{Im } \kappa = 0, \text{Re } \kappa > 0\}$  (заметим, что из-за наличия диссипативных потерь в среде упомянутых корней на вещественной оси  $\kappa$  нет),  $\Gamma$  и  $G_s$  — ориентированные контуры в  $C_r^+$ . Контур  $\Gamma$  включает положительную часть мнимой оси и отрезок  $0 < \kappa < k_e$  вещественной оси. Он совпадает с тем берегом разреза  $\text{Im } \gamma(\kappa) = 0$  в верхней полуплоскости, на котором  $\arg \gamma_e(\kappa) = 0$ , и проходит в направлении от точки  $\kappa = k_e$  к бесконечно удаленной точке. Контур  $G_s$ , идущий из точки  $\kappa = k_{ce}$  в бесконечность, совпадает с тем берегом разреза  $\text{Im } \gamma_{ce}(\kappa) = 0$  на множестве  $C_r^+$ , где  $\arg \gamma_{ce}(\kappa) = 0$ . Далее

$$\begin{aligned} M_{se}(\kappa) &= 4\pi\gamma_e(\kappa) R_s(0, \kappa)/\varepsilon_e; \quad M_{sc}(\kappa) = 4\pi\gamma_{ce}(\kappa) Q_s(f, \kappa)/\varepsilon_{ci}; \\ M_{sk} &= \frac{1}{2\varepsilon_e} \left[ \frac{i}{\gamma_e(\kappa)} + \frac{k_0 \varepsilon_e}{i\kappa} \frac{\partial_z^2(0, \kappa)}{\partial \kappa} \right] \Big|_{\kappa=\kappa_k}. \end{aligned} \quad (34)$$

$h_k = h_-(\kappa_k)$ . Величины  $h_\nu(\kappa)$  ( $\nu = \pm$ ) соответственно случаям  $y > y_p + a$  или  $y < y_p - a$  записываются выражениями

$$h_\nu(\kappa) = L^\nu(\kappa) \tilde{G}_e(\kappa) \exp(i\gamma z_p) + M^\nu(\kappa) \tilde{F}_e(\kappa) \exp(-i\gamma z_p);$$

$$h_v(x) = L^v(x) \bar{F}_e(x) \exp(i\gamma z_D) + M^v(x) \bar{G}_e(x) \exp(-i\gamma z_D); \quad (35)$$

$$\bar{F}_e(x) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m p_e(m) [-\chi(x)]^m, \quad \bar{G}_e(x) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m p_e(m) [-\chi(x)]^{-m}.$$

Таким же образом можно рассмотреть задачу рассеяния в случае нескольких цилиндрических включений.

**Список литературы:** 1. *Uzunogly N. K., Fikioris J. G.* Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric — slab waveguide//J. of the Optical Soc. of Amer. 1982. Vol 72, N 5. P. 628 — 637. 3. *Cottis P. G., Kanellopoulos J. D.* Scattering from dielectric cylinders embedded in a two — layer medium//J. Electronics. 1986. Vol. 61, N 4. P. 477 — 486. 3. *Ting L.* Exact boundary conditions for scattering problems// J. of the Acoustical Soc. of Amer. 1986. Vol. 80, N 6. P. 1825 — 1827. 4. *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. К., 1986. 280 с. 5. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. М., 1969. 191 с.

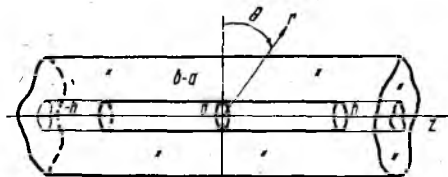
Поступила в редколлегию 02.12.87

УДК 621.396.67

*И. П. ЗАЙКИН*, канд. техн. наук, *А. А. ЗЕЛЕНСКИЙ*, канд. техн. наук,  
*Г. И. КОШЕВОЙ*, канд. физ.-мат. наук, *Ю. Н. ТАМУРОВ*, канд. техн. наук

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ТОКОВ В ИЗОЛИРОВАННОЙ АНТЕННЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Анализ изолированной антенны проведен для окружающей среды электрически намного плотнее изолирующей оболочки, при которой наиболее точным оказывается простое приближение длинной линии\*. Рассмотрен важный для практики случай, когда электрическая плотность слоя, окружающего трубчатую антенну, гораздо больше плотности среды с помещенной в ней изолированной антенной.



**Вывод интегрального уравнения для тока.** Исследуемая структура состоит из идеально проводящего цилиндра радиуса  $a$  длины  $2h$  с абсолютно тонкими стенками, расположенного внутри бесконечного диэлектрического цилиндра со стенками толщиной  $b-a$  (рисунок).

Выберем цилиндрическую систему координат с осью  $oz$ , совпадающей с осями цилиндров и с центром в середине проводящего цилиндра. Предположим, что  $ka \ll 1$  ( $k$  — волновое число свободного пространства). Электромагнитное поле, создаваемое генератором дельта-

\* Кинг Р., Смит Т. Антенны в материальных средах: В 2 т. М., 1984. Т. 2. 824 с.