Использование алгоритма адаптации параметров целевой функции приводит к улучшению качества управления, что видно из сравнения графиков на рис. 5, 6 и рис. 7, 8.

По виду графиков на рис. 5-8 можно сделать вывод, что предлагаемый регулятор позволяет достичь требуемого качества управления, задаваемого критерием (6), для многомерного стохастического объекта с запаздыванием по каналам управления.

Литература. 1. *Borrison U.* Self-tutning regulators for a class of multivariable systems//Automatica. 1979. №15. P. 209-215. 2. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с. 3. *Cheung L.S.* A new automated optimal tuning strategy for a PID controller // ISA Trans. 1988. 27. P. 69–75. 4. *Cameron F., Seborg D.E.* A self-tuning controller with a PID structure // Int. J. Contr. 1983. 38. P. 401-417. 5. *Kim J.-H., Choi K.-K.* Self-tuning discrete PID controller // IEEE Trans. Ind. Electron. 1987. 34. P. 268-300. 6. *Бодянский Е.В., Котляревский С.В., Ачкасов А.Е., Вороновский Г.К.* Адаптивные регуляторы пониженного порядка. Харьков: ХГАГХ, 1996. 144 с. 7. *Peltomaa A., Koivo H.N.* Tuning of multivariable discrete time PI controller for unknown systems // Int. J Contr. 1992. 57. P. 1387-1403. 8. *Jones A.H., Porter B.* Design of adaptive self-point tracking PID controllers incorporating recursive step-response matrix identifiers for multivariable plants // IEEE Trans. Autom. Contr. 1987. 32. P. 459-463. 9. *Yusof R., Omatu S.* A multivariable self-tuning PID controller // Int. J. Contr. 1992. 57. P. 1387-1403. 10. *Yusof R., Omatu S., Khalid M.* Self-tuning PID control: a multivariable derivation and application // Automatica. 1994. 30. P. 1975-1981. 11. *Bayomi M.M., Wong K.J., El-Bagouri M.A.* A self-tuning regulator for multivariable systems // Automatica. 1981. 17. P. 575–592. 12. *Caines P.E., Lafortune S.* Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems. Multivariable case // Proc. 21-st IEEE Conf. Decis. and Contr. Orlando, Fla., Dec. 8-10, 1982, vol.3. N.Y.: 1982. P. 978-983. 13. *Caines P.E., Lafortune S.* Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1984. 29. P. 312-321. 14. *Льюнг Л.* Идентификация систем. М.: Наука, 1991. 432 с. 15. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224с. 16. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с. 17. *Toivonen H.T.* Variance constrained self tuning control // Automatica. 1980. 19. P. 415-418. 18. *Toivonen H.T.* A self-tuning regulator with on-line cost function adaptation // Int. J. Syst. Sci. 1984. 27. P. 1189-1195. 19. *Xi Y.* New design method for discrete-time multi-variable predictive controller // Int. J. Contr. 1989. 49. P. 45-56. 20. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Г. Руденко

Бодянский Евгений Владимирович, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры технической кибернетики ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы, искусственные нейронные сети. Увлечения: фелинология, японская поэзия. Адрес: 310166, Харьков, пр. Ленина, 14. Тел.: 40-98-90.

E-mail: bodya@kture.kharkov.ua

Колодяжный Виталий Владимирович, младший научный сотрудник ПНИЛ АСУ ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Увлечения: программирование для Win32, компьютерная графика, английский язык. Адрес: 310166, Харьков, пр. Ленина, 14. Тел.: 40-98-90

Котляревский Сергей Владимирович, канд. техн. наук, доцент кафедры технической кибернетики ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Увлечения: рыбная ловля, футбол. Адрес: 310166, Харьков, пр. Ленина, 14. Тел.: 40-93-37

УДК 519.85

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПЕРЕСТАНОВОЧНОМ МНОГОГРАННИКЕ

ГРЕБЕННИК И.В.

Рассматривается оптимизационная задача с линейной целевой функцией и линейными ограничениями-неравенствами на множестве перестановок. Находится точное решение задачи с одним ограничением на переменные. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Рассмотрим задачу оптимизации следующего вида:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \to \min , \qquad (1)$$

$$Cx \le \bar{d} , \qquad (2)$$

$$x \in E_{nk} \subset R^n, \quad C=[c_{ij}]_{m\times n}, \bar{d} \in R^n, \qquad (3)$$

где E_{nk} – множество перестановок из n элементов $a_1, a_2,..., a_n, a_i \in R,\ i=1,..., n$, таких что $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. При этом k элементов из n предполагаются различными.

Известно, что элементы множества E_{nk} и только они являются вершинами перестановочного многогранника $\Pi_{nk}=\mathrm{conv}\,E_{nk}$, структура и свойства которого подробно исследованы [1].

Подходы к решению задачи (1) - (3), предпринимавшиеся ранее, в основном связаны с реализацией различных схем ветвления и содержат перебор значительного количества вариантов. Ориентируясь на сокращение перебора и на повышение эффективности подходов к решению задачи (1) - (3), рассмотрим решение некоторых ее частных случаев.

Задача 1. Пусть задача оптимизации (1) - (3) содержит единственное ограничение – неравенство вида

$$l(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le d, \qquad (4)$$

где $(c_1, c_2,..., c_n) \in R^n,\ d \in R$.

Найдем минимум функции цели (1) с ограничениями (3), (4).

Как известно [2], безусловный минимум линейной функции $L(x)$ на множестве E_{nk} достигается в точке $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2,..., \bar{x}_n) \in E_{nk}$, такой что $\bar{x}_{l_j}=a_j$. При этом последовательность $\{l_1, l_2,..., l_n\}$ такова, что $\alpha_{l_1} \ge \alpha_{l_2} \ge ... \ge \alpha_{l_n}$. Предположим, что в точке $\bar{x}$ ограничение (4) активно, т.е. $l(\bar{x}) > d$. Вообще, можно выделить три случая взаимного расположения гиперплоскости

$$l(x) = d\,, \tag{5}$$

определяющей ограничение (4), и перестановочного многогранника Π_{nk}.

1. Гиперплоскость и многогранник не пересекаются и для всех $x \in \Pi_{nk}$ справедливо неравенство $l(x) \le d$, т.е. все точки E_{nk} удовлетворяют ограничению.

2. Гиперплоскость и многогранник не пересекаются и для всех $x \in \Pi_{nk}$ $l(x) > d$, т.е. ни одна точка E_{nk} не удовлетворяет ограничению (4).

3. Гиперплоскость и многогранник пересекаются хотя бы в одной точке, следовательно, существует хотя бы одна точка $x \in E_{nk}$, удовлетворяющая ограничению (4).

Для решения задачи оптимизации интерес представляет только случай 3. Поэтому будем считать, что пересечение гиперплоскости (5) и многогранника Π_{nk} не пусто. Рассмотрим линию уровня функции цели $L(x)$, соответствующую ее точке минимума $\overline{x}$ на множестве E_{nk}, т.е. гиперплоскость вида

$$L(x) = L(\overline{x})\,. \tag{6}$$

Поскольку в точке $\overline{x}$ по предположению ограничение (4) не выполняется, то для получения решения задачи 1 необходимо сместить гиперплоскость (6) в направлении ее нормального вектора, определяющем возрастание функции цели. Это смещение следует проводить как минимум до точки пересечения многогранника Π_{nk} и гиперплоскости – ограничения (5), ближайшей к линии уровня функции цели (6). Если эта точка будет принадлежать E_{nk} (т.е. будет вершиной многогранника Π_{nk}), то это и будет решение задачи 1. В противном случае необходимо будет сместить линию уровня $L(x)$ в том же направлении до пересечения с ближайшей допустимой точкой множества E_{nk}, которая и станет решением задачи. Отыщем эту точку множества E_{nk}.

Из свойств перестановочного многогранника известно, что его вершины – точки множества E_{nk} – лежат на гиперсфере S_n вида

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tau)^2 = r_n^2, \tag{7}$$

где $\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i;\quad r_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}\,.$

Рассмотрим пересечение гиперсферы (7) и гиперплоскости $l(x) = d$ вида (5). Поскольку многогранник Π_{nk} вписан в сферу S_n, то пересечение Π_{nk} и гиперплоскости (5) лежит внутри пересечения гиперсферы S_n и гиперплоскости $l(x) = d$. Результатом пересечения сферы (7) и гиперплоскости (5) является сфера S_{n-1} с центром в точке $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$ и радиусом r_{n-1}. Найдем центр и радиус сферы S_{n-1}.

Центр сферы S_{n-1} – точка t – лежит на пересечении прямой, проходящей через центр сферы S_n – точку $T = (\tau, \tau, \ldots, \tau) \in R^n$, направляющий вектор которой совпадает с нормальным вектором плоскости (5) и плоскости $l(x) = d$. Уравнение этой прямой в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \tau + c_1 s\,, \\ x_2 = \tau + c_2 s\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \tau + c_n s\,. \end{cases} \tag{8}$$

Координаты точки пересечения прямой и плоскости (точки t) определим по формулам (8), подставив в них найденное значение s. Его получим из уравнения (результат подстановки соотношений (8) в уравнение (5)):

$$(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2)s + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\tau - d = 0,$$

$$s = \frac{d - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\tau}{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}\,. \tag{9}$$

Таким образом, координаты центра сферы S_{n-1} – точки t – определим по формулам (8), (9). Отрезок $[t, T]$, соединяющий центры сфер S_{n-1} и S_n, имеет длину ρ. Из проведенных построений следует, что отрезок $[t, T]$, радиусы r_n и r_{n-1} сфер S_n и S_{n-1} составляют прямоугольный треугольник, из которого можно найти величину радиуса r_{n-1}: $r_{n-1} = \sqrt{r_n^2 - \rho^2}$.

Определим теперь точку q гиперсферы S_{n-1}, ближайшую к гиперплоскости (6) – линии уровня функции цели, проходящей через точку безусловного минимума на E_{nk}. Точка q может быть найдена как решение задачи оптимизации следующего вида:

$$f(x) = \frac{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \tilde{d})}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = d\,,\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - t_i)^2 = r_{n-1}^2\,,$$

где $\tilde{d} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x}_i$.

В этой задаче целевая функция представляет собой квадрат расстояния от точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до гиперплоскости $L(x) = L(\overline{x})$ вида (6), а ограничения описывают гиперплоскость – ограничение (5) и сферу S_{n-1}. Решение сформулированной задачи оптимизации не представляет принципиальных трудностей и может быть получено, например, методом штрафных функций.

Таким образом, полученная в результате точка q представляет собой точку пересечения сферы S_n с плоскостью $l(x)=d$, ближайшую к плоскости $L(x)=L(\bar{x})$ – линии уровня функции цели, проходящей через точку безусловного минимума $L(x)$ на множестве E_{nk}. А это значит, что значение $L(q)$ является нижней оценкой минимума $L(x)$ на множестве E_{nk} с учетом активного ограничения (4). Справедливость этого утверждения вытекает из того, что точки множества E_{nk}, лежащие в плоскости $l(x)=d$, принадлежат сфере S_{n-1}. В тех же точках E_{nk}, которые удовлетворяют ограничению (4), но не лежат в плоскости $l(x)=d$, значения функции $L(x)$ очевидно больше, чем $L(q)$.

Продолжим поиск точного решения задачи 1. Из проведенных построений следует, что таким точным решением будет допустимая (в смысле ограничения (4)) точка множества E_{nk}, ближайшая к гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = L(q)$, т.е. к линии уровня функции цели, проходящей через точку q. Точное решение задачи 1 обозначим через $x^* \in E_{nk}$.

В силу специфики рассматриваемой задачи область поиска точки x^* – решения задачи 1 – может быть ограничена. Для формирования этой области (обозначим ее Ω) проведем следующие построения.

Определим точку $y^1 \in E_{nk}$, ближайшую к точке q. Точка y^1 может быть получена как решение [2]:

$$y^1 = \arg\min_{y\in E_{nk}} \|q-y\|^2.$$

При этом точка y^1 может как удовлетворять, так и не удовлетворять ограничению (4). Однако в обоих случаях внутри сферы S_{y^1} с центром в точке q и радиусом $r_{y^1} = \|q-y^1\|$ нет ни одной точки множества E_{nk}. Из этого следует, что линия уровня функции цели $L(x)=L(q)$ может быть смещена в направлении возрастания значений $L(x)$. При этом, пока часть гиперплоскости $L(x)=c$, точки которой удовлетворяют ограничению (4) и лежат внутри гиперсферы S_n, являются также внутренними точками шара, ограниченного гиперсферой S_{y^1}, никакая точка $x \in E_{nk}$ не может быть пройдена в ходе смещения линии уровня функции $L(x)$. Смещение будем проводить до тех пор, пока линия уровня $L(x)$ не пройдет через какую-либо точку ρ, принадлежащую пересечению гиперсфер S_{n-1} и S_{y^1}. Найдем такое положение гиперплоскости $L(x)=c$. Для этого рассмотрим отрезок $[t,q]$, соединяющий центры сфер S_{n-1} и S_{y^1}. Длина этого отрезка равна радиусу r_{n-1} сферы S_{n-1}, так как $q \in S_{n-1}$. Искомая точка ρ, принадлежащая пересечению сфер S_{n-1} и S_{y^1}, точки t и q являются вершинами треугольника с известными длинами сторон. Определим точку $h \in [t,q]$, через которую пройдет диаметр сферы $\tilde{S} = S_{n-1} \cap S_{y^1}$. Эта точка может быть определена путем несложных алгебраических построений, учитывающих радиусы сфер S_{n-1} и S_{y^1} [4]:

$$h = t + \left(1 - \frac{r_{y^1}^2}{2r_{n-1}^2}\right)\cdot \overrightarrow{tq}.$$

Проходя через точку h, линия уровня функции цели пройдет и через точку $\rho \in \tilde{S}$. Нижняя оценка минимума $L(x)$ на E_{nk} с учетом ограничения (4) возрастает с $L(q)$ до $L(h)$.

Проведенные построения позволяют задать границы области Ω – области поиска решения $x^* \in E_{nk}$ задачи 1. Границами Ω являются:

– сфера S_n, описанная вокруг перестановочного многогранника;

– ограничение задачи 1 – гиперплоскость $l(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = d$;

– гиперплоскость $w(x)=0$ с нормальным вектором $\overrightarrow{tq}$, проходящая через точку h (а значит, содержащая сферу $\tilde{S} = S_{n-1} \cap S_{y^1}$). По построению, с одной стороны от плоскости $w(x)$ нет ни одной допустимой точки E_{nk};

– линия уровня функции цели $L(x)=L(h)$;

– линия уровня функции цели $L(x)=L(y^1)$, если y^1 допустима в смысле ограничения (4), или $L(x)=L(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = \arg\max_{x\in E_{nk}} L(x)$, если y^1 недопустима.

Для определения решения задачи 1 – точки x^* – рассмотрим задачу покрытия области Ω гиперкубами Π_{y^i}, плотно прилегающими или пересекающимися друг с другом. При этом соответствующие грани гиперкубов Π_{y^i} параллельны, а нормальными векторами граней являются векторы построенной ортонормированной системы. Каждый гиперкуб Π_{y^i} обладает таким свойством, что ни одна его внутренняя точка не является точкой множества E_{nk}. Гиперкубы Π_{y^i} будем строить следующим образом. Выберем точку $x^i \in \Omega$. Подобно сфере S_{y^1} построим сферу S_{y^i} с центром в точке x^i и радиусом $r_{y^i} = \|x^i - y^i\|$, где точка $y^i \in S_{y^i}$ является решением задачи

$$y^i = \arg\min_{y \in E_{nk}} \|x^i - y\|^2 . \qquad (10)$$

Как и сфера S_{y^1}, сфера S_{y^i} обладает тем свойством, что шар с границей S_{y^i} не содержит внутри ни одной точки множества E_{nk}. В сферу S_{y^i} впишем гиперкуб Π_{y^i}, задав ориентацию его граней. Как следует из [3], радиус описанной сферы r и длина ребра гиперкуба p связаны соотношением $r = \frac{p\sqrt{n}}{2}$. Значит, длина ребра гиперкуба Π_{y^i}, вписанного в сферу S_{y^i}, определяется как $p_{y^i} = \frac{2r_{y^i}}{\sqrt{n}}$. Центр гиперкуба Π_{y^i} совпадает с центром описанной сферы S_{y^i}. Ясно, что построенный таким образом гиперкуб не может содержать внутри точек множества E_{nk}.

Для задания ориентации граней гиперкуба Π_{y^i} сформируем ортонормированную систему векторов $b^1, b^2, \ldots, b^n$ следующим образом. Обозначим $b^1 = \frac{\overrightarrow{tq}}{\|\overrightarrow{tq}\|}$ – нормальный вектор плоскости $w(x)$, ограничивающей область Ω. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис рассматриваемого пространства переменных. Среди базисных векторов выберем $n-1$ вектор таким образом, чтобы вместе с b^1 они образовывали линейно-независимую систему векторов. (Это легко сделать, удалив из базиса вектор e_i, такой что $b^1_i \neq 0$). Ортогонализуем векторы полученной системы, оставив без изменения вектор b^1. Полученную ортонормированную систему обозначим $b^1, b^2, \ldots, b^n$.

Опишем схему покрытия области Ω. Рассмотрим ранее полученную точку h, которая принадлежит границе области Ω, являясь одновременно точкой плоскости $L(x) = L(h)$ и плоскости $w(x) = 0$. Определим точку $y^2 \in E_{nk}$, ближайшую к точке h, воспользовавшись соотношением (10). Построим сферу S_{y^2}. В случае, если y^2 удовлетворяет ограничению (4) и находится ближе к гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = L(q)$, чем точка, определяющая верхнюю оценку минимума функции цели (y^1 или $\tilde{x}$), проведем через y^2 гиперплоскость $L(x) = L(y^2)$, ограничивающую область Ω. Ясно, что при этом размеры области Ω уменьшатся.

Впишем в сферу S_{y^2} гиперкуб Π_{y^2} таким образом, чтобы векторы ортонормированной системы b^i были ортогональны его граням. Длина ребра построенного гиперкуба составит p_{y^2}. Из точки h – центра Π_{y^2} – сделаем шаг длиной $\frac{1}{2}p_{y^2}$ в направлении вектора b^2; полученную точку обозначим h^3: $h^3 = h + \frac{1}{2}p_{y^2} \cdot b^2$. Легко показать, что точка h^3 лежит на грани куба Π_{y^2}. Построим сферу S_{y^3} с центром h^3 и впишем в нее гиперкуб Π_{y^3}, ориентируя его грани так же, как Π_{y^2}. Определим длину ребра p_{y^3} и снова сделаем шаг длиной $\frac{1}{2}p_{y^3}$ в направлении b^2: $h^4 = h^3 + \frac{1}{2}p_{y^3} \cdot b^2$. Построение точек h^i в направлении b^2 прекратим, когда очередная точка выйдет за границы области Ω (что можно проверить непосредственно). Затем из исходной точки h сделаем шаг в направлении, противоположном b^2. В этом направлении также построим сферы S_{y^i} и вписанные в них гиперкубы Π_{y^i}, прекратив построение при выходе за границы области Ω. Среди всех гиперкубов Π_{y^i}, построенных в направлениях b^2 и $-b^2$ от точки h, найдем гиперкуб с минимальной длиной ребра $p_2 = \min_i p_{y^i}$. В результате проведенных построений параллелепипед с длинами ребер $\frac{1}{2}\sum p_{y^i}$ в направлении b^2 и p_2 в остальных направлениях $b^1, b^3, \ldots, b^n$ не содержит точек множества E_{nk}.

Продолжим процесс покрытия области Ω. Сделав шаг p_2 из точки h в направлении b^3, проведем построения, аналогичные описанным. В результате проведения построений в направлениях $b^2, b^3, ..., b^n$ построим нерегулярную решетку, узлами которой будут точки h^i – центры сфер S_{y^i} и гиперкубов Π_{y^i}. Гиперкубы Π_{y^i}, пересекаясь и плотно прилегая друг к другу, образуют n – мерный параллелепипед, доходящий до границ области Ω в направлениях $b^1, b^2, ..., b^n$ и имеющий длину ребра $p = \min_{2 \le i \le n} p_i$ в направлении b_1, который не содержит внутри точек множества E_{nk}.

Поскольку b^1 является нормальным вектором плоскости $w(x) = 0$, ограничивающей область Ω, и центры всех гиперкубов Π_{y^i} лежат в плоскости $w(x)$, то область Ω может быть уменьшена в направлении b^1. Для этого гиперплоскость $w(x)$ должна быть смещена в направлении b^1 на величину $\frac{1}{2}p$. Из проведенных построений следует, что в результате ни одна допустимая точка E_{nk} не окажется выведенной за пределы области Ω. Пересечение плоскости $w(x) = 0$ и отрезка $[t, q]$ даст новую точку h – точку прохождения линии уровня функции цели – нижней оценки минимума задачи 1, что также приведет к сокращению области Ω.

Таким образом, в ходе построения параллелепипедов, покрывающих область Ω, сокращение ее будет идти в трех направлениях: с улучшением верхней оценки минимума функции цели будет смещаться плоскость $L(x) = L(y^i)$; с построением очередного "слоя" сместятся плоскость $w(x) = 0$ и плоскость $L(x) = L(h)$. Процесс поиска точки x^* – решения задачи 1 – можно остановить, когда размеры области Ω уменьшатся до нуля. Лучшая из верхних оценок $L(y^i)$ и определит решение задачи 1 $x^* = y^i$.

Задача 2. Задана гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0 . \tag{11}$$

Определить точку $x^* \in E_{nk}$, ближайшую к гиперплоскости (11). При этом дополнительно может быть наложено требование, чтобы поиск точки $x^* \in E_{nk}$ проводился только по одну сторону от гиперплоскости (11).

Для решения задачи рассмотрим уклонение (ориентированное расстояние) от точки $x \in R^n$ до гиперплоскости (11):

$$\delta(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}} . \tag{12}$$

Функция (12) линейна относительно x. Определим $x^0 = \arg\min_{x \in E_{nk}} \delta(x)$, $x^1 = \arg\max_{x \in E_{nk}} \delta(x)$. Вычислим $\delta(x^0), \delta(x^1)$. Если $\delta(x^0), \delta(x^1)$ имеют одинаковые знаки, то множество E_{nk} лежит по одну сторону гиперплоскости (11) и $\min\{|\delta(x^0)|, |\delta(x^1)|\}$ даст возможность определить ближайшую точку x^*. Если знаки $\delta(x^0)$, $\delta(x^1)$ разные, то гиперплоскость (11) и многогранник Π_{nk} пересекаются. Рассмотрим задачи оптимизации:

$$\delta(x) \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d \ge 0 \text{ (или } -(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d) \le 0), \ x \in E_{nk}$$

и

$$-\delta(x) \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d \le 0 ,$$

$$x \in E_{nk} .$$

Решениями этих задач, представляющих собой случаи задачи 1, являются соответственно точки $\tilde{x} \in E_{nk}$ и $\bar{x} \in E_{nk}$, ближайшие к гиперплоскости (10) с разных ее сторон. Сама же точка $x^* \in E_{nk}$ определяется как $x^* = \arg\min\{\delta(\tilde{x}), -\delta(\bar{x})\}$, а расстояние от x^* до плоскости (10) составляет $|\delta(x^*)|$.

Результаты решения задач 1 и 2 могут быть использованы при решении широкого класса задач оптимизации на множестве перестановок.

Описанный подход к решению задач оптимизации линейной целевой функции с линейным ограничением – неравенством реализован программно. Проведены вычислительные эксперименты, в ходе которых генерировались различные тестовые задачи с количеством переменных 3, 4, 10 и 20. Решения всех задач размерностью до 10 переменных проверялись методом полного перебора и их результаты во всех случаях совпали с полученными описанным методом. Решение наибольшей из рассмотренных тестовых задач (с 20 переменными) на компьютере Pentium-150 не превысило нескольких секунд машинного времени.

Литература. 1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268 с. 2. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике //Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. №3. С. 238-240. 3. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с. 4. *Гребенник И.В.* Оценки минимума линейных функций в задачах условной оптимизации на множестве перестановок // В кн. "Контроль і управління в складних системах" (за матеріалами п'ятої міжнародної науково-технічної конференції, Вінниця, 1999 р.). Т. 1. С. 147-153.

Поступила в редколлегию 14.03.99

Рецензент: д-р техн. наук. Путятин В. П.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: дискретная оптимизация. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.