

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛИКВИДАЦИИ УЗКИХ МЕСТ МЕТОДОМ СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ

Э. А. Дедиков, С. А. Канцедал, Я. Н. Рысухин

Х а р ь к о в

Планирование ликвидации узких мест с целью выбора напряженного головного плана машиностроительного предприятия предлагается осуществлять на основании решения задачи нелинейного программирования [1]. В связи с недифференцируемостью и предполагаемой многоэкстремальностью целевой функции в качестве метода решения задачи используется динамическое программирование, для чего выведены необходимые рекуррентные соотношения.

Реалистичный подход к некоторым производственным ситуациям при составлении модели плана нередко требует учета ряда ограничений вследствие чего решение задачи указанным методом становится весьма затруднительным из-за быстрого роста объема вычислений.

В данной работе для решения этой задачи предполагается другой, более эффективный вычислительный метод, учитывающий возможную замену точной модели [1] приближенной.

1. Аппроксимирующая модель

В выражении

$$\text{ФМП} = Z a_1 \left(\frac{\theta + \Delta \theta}{\theta_0} - 1 \right) + Z a_2 \left(\frac{P + \Delta P}{\Phi + \Delta \Phi} - \alpha \right), \quad (1)$$

с помощью которого, как показано в [1], можно оценить эффективность процедуры ликвидации узких мест, дробь $\frac{1}{\Phi + \Delta\Phi}$ представим в виде

$$\frac{1}{\Phi + \Delta\Phi} = \frac{1}{\Phi} \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{\Phi} \right)^{-1}, \quad (2)$$

и второй сомножитель (2) разложим в ряд по степеням $\frac{\Delta\Phi}{\Phi}$.

Получим

$$\frac{1}{\Phi + \Delta\Phi} = \frac{1}{\Phi} \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{\Phi} + \frac{\Delta\Phi^2}{\Phi^2} - \dots \right). \quad (3)$$

Покажем, что в разложении (3) достаточно ограничиться линейными членами относительно $\Delta\Phi$.

В этом случае для (1) получим

$$\text{ФМП} = Za_1 \left(\frac{\Theta + \Delta\Theta}{\Theta_0} - 1 \right) + Za_2 \frac{1}{\Phi} \left[(P + \Delta P) \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{\Phi} \right) - \alpha \right]. \quad (4)$$

Легко заметить, что если

P_T — плановая рентабельность, которая может быть найдена в результате точного решения [1], а

$$\frac{1}{\Phi + \Delta\Phi} - P_n \left(\frac{\Delta\Phi}{\Phi} \right) \leq \epsilon,$$

где $P_n \left(\frac{\Delta\Phi}{\Phi} \right)$ — аппроксимирующий полином,

то максимальная погрешность

аппроксимации (1) может быть оценена по выражению

$$\Delta \text{ФМП} = Za_2 P_T \epsilon, \quad (5)$$

и для $\epsilon = 0,01$, что означает завышение рентабельности на 1% по отношению к P_T , необходимо, чтобы

$$\frac{\Delta\Phi^2}{\Phi^3} < 0,01, \quad (6)$$

откуда

$$\Delta\Phi < 0,1\Phi \sqrt{\Phi}. \quad (7)$$

Последнее неравенство в реальных условиях почти всегда выполняется, так как в настоящее время основным источником финансирования ликвидации узких мест является фонд развития предприятия, величина которого составляет примерно 3—4% стоимости производственных фондов.

Выполнив в (4) элементарные преобразования и введя обозначения

$$m_0 = Za_1 \frac{\Theta}{\Theta_0} + Z \frac{a_2 P}{\Phi} - Za_1 - Za_2 \alpha;$$

$$m_1 = \frac{Za_1}{\Theta_0}; \quad m_2 = \frac{Za_2 P}{\Phi^2}; \quad m_3 = \frac{Za_2}{\Phi}; \quad m_4 = \frac{Za_2}{\Phi^2},$$

получим

$$\text{ФМП} = m_0 + m_1 \Delta\Theta - m_2 \Delta\Phi + m_3 \Delta P - m_4 \Delta\Phi \Delta P. \quad (8)$$

Из работы [1] имеем

$$\Delta\Theta = \sum_{i=1}^n r_i x_i; \quad (9)$$

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n P_i x_i - \sum_{i=1}^n \sum_{i \in R} a_{ii} c_i x_i = \sum_{i=1}^n d_i x_i, \quad (10)$$

где

$$d_i = p_i - \sum_{i \in R} a_{ii} c_i;$$

$$\Delta\Phi = \sum_{j=1}^n q_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i \in R_j} a_{ij} c_i^\Phi x_j = \sum_{j=1}^n s_j x_j; \quad (11)$$

здесь

$$s_j = q_j + \sum_{i \in R_j} a_{ij} c_i^\Phi.$$

Подставив (9), (10), (11) в (8), окончательно получим

$$\Phi\text{МП} = m_0 + m_1 \sum_{j=1}^n r_j x_j - m_2 \sum_{j=1}^n s_j x_j + m_3 \sum_{j=1}^n d_j x_j - m_4 \sum_{j=1}^n d_j x_j \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (12)$$

Как и в работе [1], область определения функции (12) задается выражениями

$$0 \leq x_j \leq h_j; \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n (\Phi d_j - P s_j) x_j \geq 0. \quad (14)$$

Кроме того, в случае ограничений на объемы вводимых ресурсов необходимо удовлетворить условиям вида

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in R_1. \quad (15)$$

Политику ликвидации узких мест будем считать оптимальной, если она максимизирует (12) при условиях (13), (14), (15).

2. Обсуждение модели и метод решения

Функция (12) кусочно-непрерывна на замкнутом ограниченном множестве Ω — суть (13), (14), (15), в силу чего достигает на нем глобального максимума в одной или нескольких точках. Имеет место следующая

Теорема. Если $d_j \quad j = \overline{1, n}$ сохраняет знак, то на $\Omega \subset E_n$ функция (12).

1) вогнута при $d_j > 0 \quad j = \overline{1, n}$;

2) выпукла при $d_j < 0 \quad j = \overline{1, n}$.

Доказательство. В силу аддитивности, (12) представим в виде

$$\Phi\text{МП} = m_0 + \sum_{k=1}^n \Delta\Phi\text{МП}_k(x_k),$$

где

$$\Delta\Phi\text{МП}_k(x_k) = [m_1 r_k + m_2 d_k - m_3 s_k - m_4 [D_{k-1} s_k + M_{k-1} d_k]] x_k - \\ - m_4 d_k s_k x_k^2, \quad \text{а} \quad D_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} d_j x_j; \quad M_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} s_j x_j,$$

откуда следует, что $\Delta\Phi\text{МП}_k(x_k)$ вогнута при $d_k > 0$ и выпукла при $d_k < 0$. Имея в виду то, что аддитивная функция выпуклых (вогнутых) функций является выпуклой (вогнутой), получаем требуемое доказательство.

Следствие. На $\Omega \subset E_n$ функция (12) при $d_j > 0 \quad j = \overline{1, n}$ имеет глобальный максимум внутри области или множество относительных максимумов при $d_j < 0 \quad j = \overline{1, n}$, которые достигаются в угловых точках Ω .

С практической точки зрения интересен случай, когда $d_j > 0 \quad j = \overline{1, n}$, что объясняется требованием получения неотрицательной дополнительной прибыли, в связи с чем функцию (12) на $\Omega \subset E_n$ будем считать вогнутой.

Принимая во внимание полученные результаты, а также специфику функции (12) и ограничений (14) в качестве метода решения задачи (12),

(13), (14), (15) используем метод симплекс-планирования с переменным шагом.

Излагаемая вычислительная процедура относится к итеративным процессам и состоит в том, что в области Ω строится правильный n -симплекс с вершинами $\{\bar{X}_1 \dots \bar{X}_{n+1}\} \in \Omega$ и центром тяжести в точке $\bar{X}_0$. Далее в каждой вершине n -симплекса вычисляется значение функции (12) и выбирается ее минимальное значение, после чего на грани n -симплекса, противоположной вершине с минимальным значением функции, строится новый n -симплекс с вершинами $\bar{X}_1 \dots \bar{X}_{l-1}$, $\bar{X}_{l+1} \dots \bar{X}_{n+1}$, принадлежащими предыдущему n -симплексу, и новой вершиной $\bar{X}_l$, определяемой по выражению

$$\bar{X}_l = \frac{2}{n} (\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_{l-1} + \bar{X}_{l+1} + \dots + \bar{X}_{n+1}) - \bar{X}_l. \quad (16)$$

Описанным способом осуществляется продвижение в процессе поиска в направлении градиента функции. В общем случае процесс сходится лишь к локальному экстремуму с точностью до $\delta > 0$, где

$$\delta \leq |\text{ФМП}(\bar{X}_{\text{опт}}) - \text{ФМП}(\bar{X})|. \quad (17)$$

Сходимость можно улучшить, если разумным образом менять размеры n -симплекса.

В этих целях рассмотрим радиус R_n описанной вокруг n -симплекса сферы. Тогда координаты его вершин с центром тяжести в точке $\bar{X}_0$ могут быть заданы следующей матрицей:

$$\begin{array}{c} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \dots \\ \bar{X}_n \\ \bar{X}_{n+1} \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} R_n + x_{01} & x_{02} \dots & x_{0n} \\ -\frac{R_n}{n} + x_{01} & R_{n-1} + x_{02} \dots & x_{0n} \\ -\frac{R_n}{n} + x_{01} - \frac{R_{n-1}}{n-1} + x_{02} \dots & & x_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{R_n}{n} + x_{01} - \frac{R_{n-1}}{n-1} + x_{02} \dots & R_1 + x_{0n} & \\ -\frac{R_n}{n} + x_{01} - \frac{R_{n-1}}{n-1} + x_{02} \dots & R_1 + x_{0n} & \end{array} \right\| \quad (18)$$

а последовательность

$$\{R_n, R_{n-1} \dots R_1\}, \quad (19)$$

в свою очередь, задает радиусы сфер, описанных вокруг симплексов соответствующей размерности. Любой элемент (19) определяется рекуррентно по выражению

$$R_{n-k} = R_{n-k+1} \sqrt{1 - \frac{1}{(n-k+1)^2}}, \quad (20)$$

которое легко получить из геометрических особенностей правильного симплекса.

Имеем

$$R_{n-k}^2 = l^2 - \left(R_{n-k+1} + \frac{R_{n-k+1}}{n-k+1} \right)^2, \quad (21)$$

$$l^2 = 2R_{n-k+1}^2 - 2R_{n-k+1}^2 \cos(R_{n-k+1} \hat{R}_{n-k+1}), \quad (22)$$

где l — длина ребра симплекса. Подставляя (22) в (21), а также учитывая, что $\cos(R_{n-k+1} \hat{R}_{n-k+1}) = -\frac{1}{n-k+1}$, получим (20).

3. Вычислительная схема

Изложенный нами метод экспериментально проверялся путем решения на ЭВМ нескольких тестовых задач. Оказалось, что скорость продвижения в направлении градиента функции во многом зависит от удачного выбора радиуса R_n . В особенности это обстоятельство играет существенную роль, если экстремальное значение функции находится на границе области определения. В этом случае путем уменьшения R_n практически достаточно быстро можно найти оптимальную точку.

Ниже, исключая некоторые подробности, приводится последовательность вычислительных операций для решения задачи (12), (13), (14), (15):

1) определение точки начального приближения с помощью случайного механизма и проверка условия $\bar{X}_0 \in \Omega$;

2) вычисление координат вершин n -симплекса и проверка условия $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n+1}\} \in \Omega$;

3) если, хотя бы один элемент из $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n+1}\}$ такой, что $\bar{X}_l$ не принадлежит Ω , то п. 2 повторяется для более мелких значений R_n до тех пор, пока $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n+1}\} \in \Omega$;

4) вычисление значений функции (12) в найденных вершинах n -симплекса и выделение минимального ее значения;

5) построение нового n -симплекса по выражению (16) и проверка условия $\bar{X}_l \in \Omega$;

6) в случае $\bar{X}_l$ не принадлежит Ω , повторяются пп. 2, 4, 5 до тех пор, пока $\bar{X}_l \in \Omega$;

7) если $\Phi\text{МП}(\bar{X}_l) < \Phi\text{МП}(\bar{X}_i)$, п. 5. выполняется для вершины n -симплекса со значением функции (12) следующим по величине после значения в точке $\bar{X}_l$;

8) в случае вращения n -симплекса вокруг некоторого центра тяжести пп. 2, 4, 7 повторяются для наименьшего значения R_n ;

9) конец счета определяется по условию $\Phi\text{МП}(\bar{X}_1) = \Phi\text{МП}(\bar{X}_2) = \dots = \Phi\text{МП}(\bar{X}_{n+1})$ с точностью до $\delta > 0$ для $\min R_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Дедиков, С. А. Канцедаль. Об одном методе решения задачи расшивки узких мест. Труды семинара «Кибернетика и автоматическое управление» (Харьковское отделение), вып. 4, Киев, 1969.
2. Л. С. Гурин, Я. С. Дымарский, А. Д. Меркулов. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. Изд-во «Советское радио», 1968.
3. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. Изд-во «Наука», 1966.

О РАСЧЕТЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ МЕТОДОМ R -ФУНКЦИЙ. Ч. I.

В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, В. Ф. Кравченко

Х а р ь к о в

Одним из необходимых условий надежной работы радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), как известно, является нормальный тепловой режим. Для его обеспечения следует выбрать оптимальную систему охлаждения и габариты, найти оптимальный вариант размещения отдельных частей аппарата относительно друг друга. Следовательно, конструкция РЭА во многом определяется его тепловым режимом

Анализу теплового режима различных радиоэлектронных аппаратов посвящены отечественные и зарубежные исследования [1—3]. При изу-