

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР  
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО  
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ им. М. К. ЯНГЕЛЯ

# РАДИОТЕХНИКА

---

Республиканский  
межведомственный  
научно-технический  
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 90

710275

КС

ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
1989

ХНУРЕ Радіотехніка



710275

В сборнике представлены данные исследований в области анализа и синтеза сигналов, их обнаружения, обработки, фильтрации. Работы базируются на теоретическом анализе и в ряде случаев на результатах их практической реализации. Рассмотрены задачи рассеяния электромагнитных волн, вопросы теории электронных приборов СВЧ со скрещенными полями.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1989 г.

Для преподавателей, научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: д-р техн. наук проф. *А. И. Терещенко* (отв. ред.), канд. техн. наук проф. *В. Д. Кукуш* (зам. отв. ред.), канд. техн. наук доц. *Ж. Ф. Пащенко* (отв. секр.), д-р техн. наук проф. *Ю. И. Волощук*, д-р техн. наук проф. *Б. Л. Кащеев*, д-р физ.-мат. наук проф. *В. М. Кузьмичев*, канд. техн. наук доц. *Е. М. Кулешов*, д-р техн. наук проф. *Н. Д. Колпаков*, д-р физ.-мат. наук проф. *О. А. Третьяков*, д-р физ.-мат. наук проф. *Н. А. Хижняк*, д-р техн. наук проф. *А. Г. Шейн*, д-р техн. наук проф. *Я. С. Шифрин*, д-р физ.-мат. наук акад. АН УССР *В. П. Шестопалов*

Ответственный за выпуск д-р техн. наук проф. *А. И. Терещенко*

Адрес редакционной коллегии: 310726 Харьков, просп. Ленина, 14, институт радиоэлектроники, тел. 40-93-66

Редакция научно-технической литературы  
Зав. редакцией *Л. А. Гаврилова*

**ИРИС**

РАДИОИМПУЛЬСНЫЙ УМНОЖИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ  
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЕНЕРАТОРОМ

Широкому применению радиоимпульсных умножителей частоты препятствует плохое подавление нежелательных составляющих в спектре выходного колебания, определяемое наличием 100 % амплитудной модуляции и зависящее в основном от отношения длительности радиоимпульса  $\tau$  к периоду входного колебания  $T$ . Получение отношения  $\tau/T \rightarrow 1$  ограничено требованием полного затухания колебания от предыдущего импульса к последующему, конечной длительностью фронтов управляющего импульса, временем установления колебаний и прочими факторами [1-3]. Умножители частоты с коррекцией фазы позволяют повысить подавление нежелательных составляющих в спектре выходного колебания, если корректировать фазу без изменения энергии, запасенной в колебательном контуре умножителя, но это связано со значительными техническими трудностями [4; 5].

В данной работе рассмотрена возможность подавления нежелательных составляющих в спектре радиоимпульсного умножителя частоты с помощью дополнительного радиоимпульсного генератора, заполняющего паузы между радиоимпульсами. Выходное колебание такого умножителя представляет собой сумму двух радиоимпульсных последовательностей с различным соотношением фаз окончания одного и начала другого радиоимпульсов.

Амплитуда  $n$ -й гармоники суммарного колебания находится из соотношения  $a_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  (1), где  $a_n$  и  $b_n$  — коэффициенты ряда Фурье:

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2} + \tau_1} \sin \left( \omega_0 t + \frac{\omega_0 \tau}{2} \right) \cos n \omega t \, dt + \int_{-\frac{\tau}{2} + \tau_1}^{\frac{\tau}{2}} \sin \left[ \omega_0 t + \left( \frac{\tau}{2} - \tau_1 \right) \omega_0 \right] \times \cos n \omega t \, dt \right\} = \frac{(-1)^N}{T} (\xi_n + \xi_{-n}); \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2} + \tau_1} \sin \left( \omega_0 t + \frac{\omega_0 \tau}{2} \right) \sin n \omega t \, dt + \int_{-\frac{\tau}{2} + \tau_1}^{\frac{\tau}{2}} \sin \left[ \omega_0 t + \left( \frac{\tau}{2} - \tau_1 \right) \omega_0 \right] \times \sin n \omega t \, dt \right\} = \frac{(-1)^N}{T} (\sigma_n - \sigma_{-n}), \quad (3)$$

где

$$\xi_n = \frac{1}{\Omega_n} \left[ \cos \frac{\tau \Omega_n}{2} - \cos \delta \Omega_n + \cos 2\pi \alpha \left( \cos \delta \Omega_n - \cos \frac{\tau \Omega_n}{2} \right) - \right.$$

$$- \sin 2\pi\alpha \left( \sin \frac{\tau\Omega_n}{2} - \sin \delta\Omega_n \right)]; \quad (4)$$

$$\xi_{-n} = \frac{1}{\Omega_{-n}} \left[ \cos \frac{\tau\Omega_{-n}}{2} - \cos \delta\Omega_{-n} + \cos 2\pi\alpha \left( \cos \delta\Omega_{-n} - \cos \frac{\tau\Omega_{-n}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \sin 2\pi\alpha \left( \sin \frac{\tau\Omega_{-n}}{2} - \sin \delta\Omega_{-n} \right) \right]; \quad (5)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\Omega_n} \left[ \sin \delta\Omega_n + \sin \frac{\tau\Omega_n}{2} + \cos 2\pi\alpha \left( \sin \frac{\tau\Omega_n}{2} - \sin \delta\Omega_n \right) + \right. \\ \left. + \sin 2\pi\alpha \left( \cos \delta\Omega_n - \cos \frac{\tau\Omega_n}{2} \right) \right]; \quad (6)$$

$$\sigma_{-n} = \frac{1}{\Omega_{-n}} \left[ \sin \delta\Omega_{-n} + \sin \frac{\tau\Omega_{-n}}{2} + \cos 2\pi\alpha \left( \sin \frac{\tau\Omega_{-n}}{2} - \sin \delta\Omega_{-n} \right) + \right. \\ \left. + \sin 2\pi\alpha \left( \cos \delta\Omega_{-n} - \cos \frac{\tau\Omega_{-n}}{2} \right) \right]; \quad (7)$$

$$\Omega_n = \omega_0 - n\omega; \quad \Omega_{-n} = \omega_0 + n\omega; \quad \delta = -\frac{\tau}{2} + \tau_1;$$

$$\tau \approx \tau_1 + \tau_2 = T \approx nT_0; \quad \tau_1 = (k + \alpha)T_0; \quad 0 < \alpha < 1; \quad 1 \leq k \leq N.$$

В случае  $n = N$  (без учета множителя  $(-1)^N$ ) имеем

$$a_n = \frac{\sin 2\pi\alpha}{N} \left( k + \alpha - N + \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} \right); \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{N} \left[ (N - k - \alpha) \cos 2\pi\alpha + k + \alpha - \frac{\sin 4\pi\alpha \sin^2 \pi\alpha}{2\pi} \right]. \quad (9)$$

Амплитуду ближайших соседних гармоник определим из соотношений, вытекающих из (2), (3):

$$a_{n\pm 1} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[ \frac{\cos \pi\alpha - \sin 2\pi\psi_{\pm} - \sin \pi\alpha (1 + \cos 2\pi\psi_{\pm})}{2N \pm 1} \mp \right. \\ \left. \mp \sin \pi\alpha (1 + \cos 2\pi\theta) + \cos \pi\alpha \sin 2\pi\theta \right]; \quad (10)$$

$$b_{n\pm 1} = \frac{1}{2\pi} \left[ \sin 2\pi\theta - \cos 2\pi\alpha \sin 2\pi\theta \mp \sin 2\pi\alpha (1 + \cos 2\pi\theta) - \right. \\ \left. - \frac{\sin 2\pi\psi_{\pm} + \cos 2\pi\alpha \sin 2\pi\psi_{\pm} + \sin 2\pi\alpha (1 + \cos 2\pi\psi_{\pm})}{2N \pm 1} \right]. \quad (11)$$

Здесь

$$\psi_{\pm} = 2\alpha \mp \frac{1}{2} \pm \frac{k + \alpha}{N}; \quad \theta = -\frac{1}{2} + \frac{k + \alpha}{N}.$$

С помощью (8—11) найдем соотношение  $c_n/c_{n\pm 1}$ , т. е. подавление нежелательных составляющих в спектре выходного сигнала. Для  $K = 15$  и  $0 \leq \alpha \leq 1$  результаты вычислений представлены на рисунке. Здесь подавление при  $0,3 < \alpha < 0,7$  отсутствует, при  $\alpha = 0,5$  амплитуда  $n$ -й гармоники обращается в нуль. Следует отметить, что изменение  $K$  существенно не влияет на характер зависимости  $c_n/c_{n\pm 1}$  от  $\alpha$ .

Если  $\alpha = 0$ ,

$$a_n = 0; b_n = \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin \frac{\tau \Omega_n}{2}}{\frac{\tau \Omega_n}{2}} - \frac{\sin \frac{\tau \Omega_{-n}}{2}}{\frac{\tau \Omega_{-n}}{2}} \right). \quad (12)$$

Учитывая, что  $N\omega = \omega_0$ ,

$$c_n = \frac{\tau}{T}; \quad (13)$$

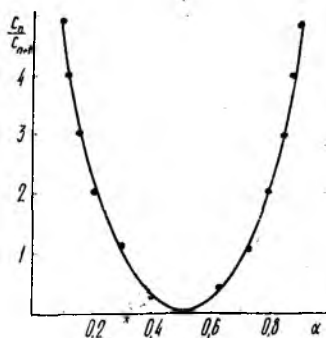
$$c_{n\pm 1} = \frac{\tau}{T} \sin \frac{\pi \tau}{T} \left[ \frac{1}{\frac{\pi \tau}{T}} \mp \frac{1}{\pi \left( 2N \pm \frac{\tau}{T} \right)} \right]. \quad (14)$$

Так как  $\tau \approx T$ , то из (14) следует, что  $c_{n\pm 1} \rightarrow 0$  и соответственно отношение амплитуды основной гармоники к боковым  $c_n/c_{n\pm 1}$  (15), т. е. применение дополнительного радиоимпульсного генератора позволяет получить полное подавление нежелательных составляющих в спектре выходного колебания.

Экспериментальное исследование возможности улучшения спектра выходного колебания с помощью дополнительного радиоимпульсного генератора проведено на умножителе частоты, в котором применены импульсные генераторы на негатронах, собранных по схеме ОБ — ОК с эмиттерной связью. Такие негатроны имеют характеристики, аналогичные характеристикам диода Ганна, и работают до частот 5 ГГц. Для проверки зависимости подавления нежелательных составляющих в спектре выходного колебания от соотношения фаз основного и начала дополнительного радиоимпульсов использовалась схема формирования, с помощью которой изменялось соотношение длительности исходного и дополнительного радиоимпульсов, т. е. соотношение фаз окончания основного импульса при неизменной начальной фазе дополнительного. Затухание радиоимпульсов в генераторе после окончания процесса генерации обеспечивалось шунтированием колебательного контура малым внутренним сопротивлением источника питания.

Применение дополнительного радиоимпульсного генератора позволило улучшить подавление нежелательных составляющих в спектре выходного колебания на 24 дБ и обеспечило подавление ближайших нежелательных составляющих на 32 дБ (максимально достигнутое подавление без применения дополнительного генератора 9 дБ) без применения дополнительного фильтра на выходе. Неполное подавление нежелательных составляющих объясняется неидеальностью формы и частоты заполнения полученных радиоимпульсов.

Таким образом, показана возможность существенного улучшения подавления нежелательных составляющих в спектре выходного



колебания радиоимпульсного умножителя частоты с помощью дополнительного радиоимпульсного генератора. Изучена зависимость соотношения фаз между окончанием основного и началом дополнительного радиоимпульсов, позволившая разработать рекомендации по осуществлению максимального подавления нежелательных составляющих на выходе умножителя. Получено достаточно хорошее совпадение эксперимента с теорией. Применение дополнительного радиоимпульсного генератора повышает энергетические параметры умножителя, не ограничивая частотные свойства умножителя и фазовые искажения последнего. Улучшение подавления нежелательных составляющих на выходе радиоимпульсного умножителя частоты в результате введения дополнительного генератора достигается усложнением схемы, что не должно превышать по сложности создание отдельного фильтра, обеспечивающего такое же подавление.

Список литературы: 1. Григулевич В. И. Радиоимпульсное преобразование частоты. М., 1966. 335 с. 2. Ризкин И. Х. Умножители и делители частоты. М., 1976. 328 с. 3. Радиоимпульсный умножитель частоты // А. З. Венгер, В. И. Корженко, Н. Д. Терещенко, А. М. Якименко // Радиотехника. 1979. Т. 28, № 7. С. 86—88. 4. Умножители частоты с коррекцией фазы / А. З. Венгер, А. Н. Ермак, Н. А. Сивозализов, А. М. Якименко // Радиотехника. 1981. Т. 36, № 10. С. 46—48. 5. А. с. 924819 СССР, МКИ<sup>3</sup> Н 03 В 19/00. Умножитель частоты / В. Я. Баржин, А. З. Венгер, Н. Д. Терещенко, А. М. Якименко // Открытия. Изобретения. 1982. № 16. С. 97.

Поступила в редколлегию 24.12.87

УДК 621.391

Т. А. ЯРХО

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ПРИ БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ

Решение ряда задач [1; 2], возникающих при функционировании различных радиотехнических систем в процессе передачи, приема и преобразования сигналов, базируется на спектральном анализе. Цель спектрального анализа — разложение анализируемого сигнала на монохроматические составляющие с определением их частот и амплитуд. Качество спектрального анализа принято оценивать значением двух основных взаимосвязанных характеристик: величиной частотного разрешения, минимальным расстоянием по частоте, на котором сигналы могут быть различимы, и способностью воспроизводить форму спектральной зависимости без искажений. Большинство из используемых способов определения спектров основаны на применении быстрого преобразования Фурье (БПФ), эффективного при вычислениях. Однако спектр БПФ, в связи с ограниченностью интервала наблюдения и дискретной природой метода, в общем случае является аппроксимацией истинного спектра сигнала, каче-

ство которой зависит от принадлежности исходного сигнала к определенному классу.

Единственный класс сигналов, спектр БПФ которых с точностью до постоянного множителя совпадает с истинным, — периодические сигналы с ограниченным спектром, при условии, что интервал наблюдения во временной области кратен периоду [3]. Последнее

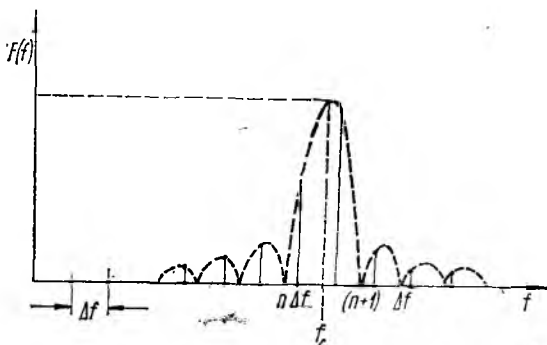


Рис. 1

условие равносильно тому, что все частотные составляющие спектра периодического сигнала кратны интервалу разрешения БПФ.

Невыполнение указанного требования в общем случае, для сигналов любого класса, влечет смещение по частоте положения пика в спектре БПФ по отношению к истинному спектру сигнала. На рис. 1 представлена амплитуда БПФ сигнала с частотой  $f_c$ ,  $f_c = p \Delta f$ , где  $p$  — нецелое,  $\Delta f$  — интервал разрешения БПФ. Точность определения истинной частоты сигнала, соответствующей спектральному пику, в методе БПФ ограничивается величиной одного интервала разрешения, что является неприемлемым для многих практических задач.

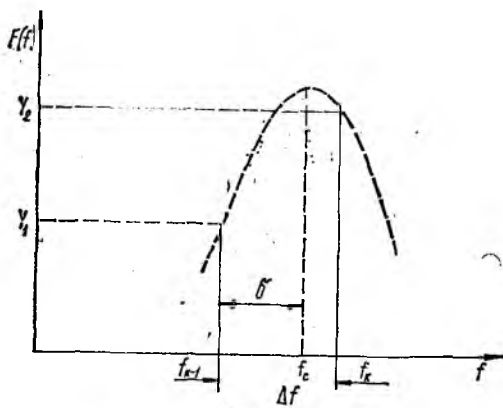


Рис. 2

Для преодоления указанного ограничения в работе [3] предложен метод определения положения пика спектральной компоненты для чисто синусоидального спектра внутри интервала разрешения БПФ  $[f_{k-1}, f_k]$  с прямоугольным окном. Частота  $f_c$ , соответствующая истинному положению спектрального пика, находится путем добавления к  $f_{k-1}$  поправочного коэффициента  $\delta$ ,  $f_c = f_{k-1} + \delta$ , где  $\delta$  определяется из выведенного в работе уравнения

$$Y_2(\Delta f - \delta) \sin(\delta\pi/\Delta f) - Y_1\delta \sin[(\Delta f - \delta)\pi/\Delta f] = 0, \quad \Delta f = f_k - f_{k-1}, \quad (1)$$

$Y_1, Y_2$  — значения амплитуд в точках  $f_{k-1}$  и  $f_k$  спектра БПФ с прямоугольным окном исходного сигнала (рис. 2).

Для решения трансцендентного уравнения (1) в работе [3] применен итерационный алгоритм с предварительно выбранным начальным приближением для  $\delta$ . Приведен численный расчет на ЭВМ, показывающий достаточность трех-четырёх итераций процедуры для получения приемлемого результата.

Однако, произведя необходимые упрощения уравнения (1), можно показать, что оно имеет точное решение. Действительно,

$$\sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] = \sin (\delta \pi / \Delta f). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$Y_2 (\Delta f - \delta) \sin (\delta \pi / \Delta f) - Y_1 \delta \sin (\delta \pi / \Delta f) = 0,$$

откуда следует выражение для поправочного коэффициента

$$\delta = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \Delta f. \quad (3)$$

Полученный результат избавляет от необходимости определять нужное количество итераций для достижения заданной точности в каждом конкретном случае анализа сигналов.

Результат существенно упрощает вычислительную процедуру определения истинного положения спектрального пика, что является важным для практической реализации метода в условиях ограниченной возможности использования прикладных программ или оперативной памяти.

На практике для выделения определенных характеристик спектральных оценок часто прибегают к сглаживанию отсчетов исходного сигнала на концах интервала наблюдения. Последовательность временных отсчетов сигнала умножают на весовые функции (окна) или, что эквивалентно, сглаживают спектральные отсчеты.

Широко используется окно Ханна, определяемое во временной области выражением

$$w(n) = 0,5 [1 - \cos(2\pi n/N)], \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Отсчеты спектра, вычисленного при применении окна Ханна  $S_x(k\Delta f)$  связаны с отсчетами спектра, полученного при использовании прямоугольного окна  $S(k\Delta f)$ , соотношением [4]

$$S_x(k\Delta f) = \frac{1}{2} \left\{ S(k\Delta f) - \frac{1}{2} \{ S[(k-1)\Delta f] + S[(k+1)\Delta f] \} \right\}, \quad (5)$$

$$k = \overline{1, N-2}.$$

Для чисто синусоидального сигнала спектр БПФ с прямоугольным окном определяется выражением

$$S(k\Delta f) = S_1(k\Delta f) + S_2(k\Delta f), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (6)$$

где

$$S_1(k\Delta f) = \exp \left[ -j \frac{N-1}{N} (k\Delta f + f_c) \pi / \Delta f \right] \frac{A \sin [(k\Delta f + f_c) \pi / \Delta f]}{2 \sin [(k\Delta f + f_c) \pi / N \Delta f]}; \quad (7)$$

$$S_2(k\Delta f) = \exp \left[ -j \frac{N-1}{N} (k\Delta f - f_c) \pi / \Delta f \right] \frac{A \sin [k\Delta f - f_c) \pi / \Delta f]}{2 \sin [(k\Delta f - f_c) \pi / N \Delta f]}. \quad (8)$$

$$k = \overline{0, N-1}.$$

Здесь  $N$  — количество отсчетов;  $f_c$  — частота сигнала;  $A$  — амплитуда сигнала;  $\Delta f$  — интервал разрешения БПФ.

Пренебрегая влиянием значений функции  $S_1(k\Delta f)$  вблизи точки  $f_c$ , считаем  $S(k\Delta f) = S_2(k\Delta f)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ . Тогда уравнение (5) для спектра БПФ с окном Ханна указанного сигнала имеет вид

$$S_x(k\Delta f) = \frac{1}{2} \left\{ S_2(k\Delta f) - \frac{1}{2} \{ S_2[(k-1)\Delta f] + S_2[(k+1)\Delta f] \} \right\}, \quad (9)$$

$$k = \overline{1, N-2}.$$

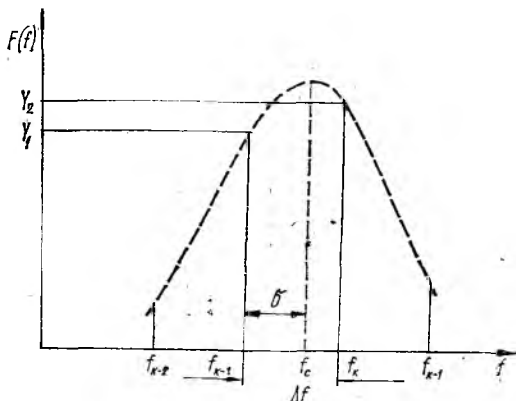


Рис. 3

Из (8), (9) следует, что в случае, когда частота сигнала  $f_c$  кратна интервалу разрешения  $\Delta f$ ,  $f_c = p\Delta f$ ,  $p$  — целое (10),  $S_x(k\Delta f)$  обращается в 0 во всех отсчетных точках, кроме  $(p-1)\Delta f$ ,  $p\Delta f$ ,  $(p+1)\Delta f$ , где соответственно принимает значения

$$-S_2(p\Delta f)/4, \quad S_2(p\Delta f)/2, \quad -S_2(p\Delta f)/4.$$

Таким образом, в указанном частном случае частота  $p\Delta f$ , соответствующая максимуму амплитуды БПФ  $|S_x(k\Delta f)|$  чисто синусоидального сигнала, совпадает с истинной частотой, соответствующей его спектральному пику.

В общем случае, когда для частоты сигнала  $f_c$  не выполняется условие (10), рассмотрим нахождение поправочного коэффициента  $\delta$  для определения истинного положения спектрального пика внутри интервала разрешения БПФ. Введем следующие обозначения:

$$f_l = l\Delta f, \quad F(f_l) = |S_x(f_l)|, \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Пусть  $Y_1, Y_2$  — значения амплитуд в точках  $f_{k-1}$  и  $f_k$  спектра БПФ с окном Ханна указанного сигнала,  $f_{k-1} < f_c < f_k$  (рис. 3). Тогда

$$Y_1 = F(f_{k-1}) = \frac{1}{2} \left| \left\{ S_2(f_{k-1}) - \frac{1}{2} [S_2(f_{k-2}) + S_2(f_k)] \right\} \right|; \quad (12)$$

$$Y_2 = F(f_k) = \frac{1}{2} \left| \left\{ S_2(f_k) - \frac{1}{2} [S_2(f_{k-1}) + S_2(f_{k+1})] \right\} \right|. \quad (13)$$

Заметим, что для больших значений  $N \frac{N-1}{N} \approx 1$ , и в окрестности спектрального пика

$$\sin [(f_k - f_c) \pi / N \Delta f] \approx (f_k - f_c) \pi / N \Delta f. \quad (14)$$

На основании (8) и (14) спектр БПФ чисто синусоидального сигнала с прямоугольным окном можно представить как

$$S_2(f_k) = \exp \{-j(f_k - f_c) \pi / \Delta f\} \frac{A \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]}{2(f_k - f_c) \pi / N \Delta f}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) и (13) с использованием соотношений (16)

$$\begin{aligned} \cos [(f_{k-2} - f_c) \pi / \Delta f] &= \cos [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \sin [(f_{k-2} - f_c) \pi / \Delta f] &= \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \cos [(f_{k-1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\cos [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \sin [(f_{k-1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \cos [(f_{k+1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\cos [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \sin [(f_{k+1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f], \end{aligned} \quad (16)$$

получаем

$$Y_1 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f] \left| \frac{1}{(f_{k-1} - f_c)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(f_{k-2} - f_c)} + \frac{1}{(f_k - f_c)} \right] \right|; \quad (17)$$

$$Y_2 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f] \left| \frac{1}{(f_k - f_c)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(f_{k-1} - f_c)} + \frac{1}{(f_{k+1} - f_c)} \right] \right|. \quad (18)$$

Пусть  $f_c = f_{k-1} + \delta$ , тогда согласно (11)

$$\begin{aligned} f_{k-2} - f_c &= -(\Delta f + \delta); \quad f_{k-1} - f_c = -\delta; \\ f_k - f_c &= \Delta f - \delta; \quad f_{k+1} - f_c = 2\Delta f - \delta. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (19) уравнения (17), (18) принимают вид

$$Y_1 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] \frac{\Delta f^2}{\delta(\Delta f^2 - \delta^2)}; \quad (20)$$

$$Y_2 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] \frac{\Delta f^2}{\delta(\Delta f - \delta)(2\Delta f - \delta)}. \quad (21)$$

Производя деление уравнения (20) на уравнение (21), после упрощений имеем

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{2\Delta f - \delta}{\Delta f + \delta}, \quad (22)$$

откуда следует выражение для поправочного коэффициента  $\delta$  в рассматриваемом случае

$$\delta = \frac{2Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2} \Delta f. \quad (23)$$

Выполнено моделирование на ЭВМ определения истинной частоты  $f_c$  чисто синусоидального сигнала, соответствующей спектральному

пику, внутри содержащего ее интервала разрешения БПФ  $[f_{k-1}, f_k]$ . При применении прямоугольного окна оценка истинной частоты  $f_{c1}$  вычислялась как  $f_{c1} = f_{k-1} + \delta$ , где поправка  $\delta$  находилась из (3). В случае окна Ханна оценка  $f_{c2}$  определялась аналогично с использованием поправки (23).

В качестве примера ниже приведены результаты моделирования для отдельных значений  $f_c$  при  $N = 512$ ,  $\Delta f = 1$  Гц. Частота  $f_{max}$  соответствует положению максимума спектра БПФ:

$f_c$	$f_{max}$	$ f_c - f_{max} $	$f_{c1}$	$ f_c - f_{c1} $	$f_{c2}$	$ f_c - f_{c2} $
97,5	98,0	0,5	97,6922	0,1922	97,6908	0,1908
113,4	114,0	0,6	113,6231	0,2231	113,6219	0,2219.

Предложенный метод повышает точность оценки истинной частоты сигнала, соответствующей спектральному пику, определяемой по положению максимума амплитуды спектра БПФ. Достаточность выполнения трех арифметических операций для вычисления поправочных коэффициентов (3), (23) позволяет реализовать метод в рамках дополнения функций процессора БПФ.

**Список литературы:** 1. Емельянов С. В., Денисов М. М. Методы разделения сигналов по спектру дискретного параметра//Итоги науки и техники. Сер. техн. кибернетика. М., 1986. Т. 19. С. 3—68. 2. Кей С. М., Марпл С. Л. Современные методы спектрального анализа//Тр. ин-та инж. по электротехнике. 1981. Т. 69, № 11. С. 5—51. 3. Ng S. S. A technique for spectral component location within a FFT resolution cell// Proc IEEE Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Process. San Diego, California. 19—21 March. New York, 1984. Vol. 3. P. 38. 8/1—38. 8/3. 4. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье//Тр. ин-та инж. по электротехнике и электронике. 1978. Т. 66, № 1. С. 60—96.

Поступила в редколлегию 22.10.87

УДК 681.3

В. П. КОЛЬЦОВ, канд. техн. наук, В. Н. УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук

### ПОГРЕШНОСТИ «АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ» ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Работа [1] — одна из первых, посвященных разбору особенностей дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и вычислительному алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ), изданных в СССР. Приведенные в ней сведения о погрешностях «амплитудной модуляции» ДПФ носят преимущественно качественный характер. Представляется целесообразным более обстоятельно рассмотреть описанные ранее и исследовать некоторые не рассмотренные погрешности, присущие ДПФ. При решении различных задач теории

и практики ДПФ встречаются следующие формы записи нормированного прямого и обратного ДПФ [1, с. 53 соотношения (3), (4)]:

$$X(k) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N); \quad (1)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N), \quad (2)$$

$$k = \overline{0, (N-1)}; \quad n = \overline{0, (N-1)}.$$

В (1), (2) изменены лишь индексы суммирования и индексы при  $x$  и  $X$  в соответствии с обозначениями, принятыми в работе [2, с. 63—64, соотношения (2.132), (2.136)], где та же пара ДПФ представлена в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N); \quad (3)$$

$$x(n) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N), \quad (4)$$

$$k = \overline{0, (N-1)}; \quad n = \overline{0, (N-1)}.$$

В записи для (3) и (4) по сравнению с оригиналом опущен индекс  $p$  для  $x_n$  и  $X_k$ , назначение которого — подчеркнуть периодичность последовательностей  $x_n$  и  $X(k)$ . Не снижая общности полученных ниже результатов, отдадим предпочтение соотношениям (1), (2). Эффект паразитной амплитудной модуляции спектра [1, с. 29], проявляется тогда, когда частота гармонического сигнала  $g(t)$ , представленного в виде дискретной последовательности  $x(n) = g(n\Delta t)$ , не совпадает с бинами ДПФ. Рассмотрим следующие два случая.

Пусть входная последовательность  $x(n)$  является последовательностью вида

$$x(n) \rightarrow x(n, p, r, \varphi) = \exp\{j[2\pi n(p + v)/N + \varphi]\}, \quad (5)$$

$$n = \overline{0, (N-1)}; \quad p = \overline{0, (N-1)}; \quad -0,5 \leq r \leq 0,5; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (6)$$

Полагая  $2\pi/N = \alpha$  и подставляя (5), (6) в (1), получаем

$$X(k, p, r, \varphi) = \exp(-j\varphi)/N \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j\alpha n(p + r - k)], \quad (7)$$

$$p = \overline{0, (N-1)}; \quad n = \overline{0, (N-1)}; \quad k = \overline{0, (N-1)};$$

$$-0,5 \leq r \leq 0,5; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Положим  $p = k$  — комплексная экспонента (5) с частотой  $p$  в полосе пропускания  $k$ -го бина. Из (7) находим

$$X(r, \varphi) = [\exp(j\varphi)/N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\alpha nr). \quad (8)$$

Из (8) следует, что для входной последовательности  $x(k, n, r, \varphi)$ , сформированной из комплексной экспоненты, выходная последова-

тельность  $X(r, \varphi)$  прямого ДПФ инвариантна относительно  $k$ . Пусть величина  $N$ , определяющая количество элементов входной последовательности  $x(n)$ , выбирается из соотношения  $N = 2^m$  (9), где  $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ , как это принято в алгоритме БПФ по основанию 2, что не снижает общности получаемых выводов, но упрощает изложение.

Преобразуя (8) с учетом (9), имеем

$$X(m, r, \varphi) = \exp \{ j [(1 - 2^{-m}) \pi r + \varphi] \prod_{l=1}^m \cos [(2^{l-m-1}) \pi r], \quad (10)$$

$$-0,5 \leq r \leq 0,5; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Из (10) запишем выражение для модуля

$$|X(m, r)| = \prod_{l=1}^m \cos [(2^{l-m-1}) \pi r], \quad (11)$$

$$-0,5 \leq r \leq 0,5; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

и аргумента

$$\arg X(m, r, \varphi) = (1 - 2^{-m}) \pi r + \varphi, \quad (12)$$

$$-0,5 \leq r \leq 0,5; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Относительная погрешность модуля  $k$ -го элемента последовательности дает количественную оценку эффекта паразитной амплитудной модуляции ДПФ (при входном сигнале в виде последовательности комплексной экспоненты

$$\delta(m, r) = \left| \prod_{l=1}^m \cos [(2^{l-m-1}) \pi r] - 1 \right|, \quad (13)$$

$$-0,5 \leq r \leq 0,5.$$

Отметим, что в (13) не вошли в качестве аргументов  $k$  и  $\varphi$ , т. е. закон изменения относительной погрешности модуля выходного сигнала в окрестности  $-0,5 \leq r \leq 0,5$   $k$ -го бина ДПФ при входном сигнале в виде последовательности комплексной экспоненты не зависит от бина ДПФ  $k$  и от начальной фазы  $\varphi$ , а зависит только от порядка ДПФ  $m$  и величины  $r$ .

Абсолютную погрешность аргумента для  $k$ -го элемента выходной последовательности, сформированной из комплексной экспоненты, с  $k$ -м биномом ДПФ представим как

$$\lambda(m, r, \varphi) = \arg X(m, r, \varphi) - \varphi; \quad \lambda(m, r) = (1 - 2^{-m}) \pi r. \quad (14)$$

Из (14) следует, что абсолютная погрешность по фазе  $k$ -го элемента выходной последовательности ДПФ инвариантна к значению бина  $k$ , к начальной фазе  $\varphi$  и зависит только от  $r$  величины смещения по частоте в пределах  $k$ -го бина,  $m$  — порядка ДПФ.

Приведенную погрешность аргумента (в процентах)  $k$ -го элемента выходной последовательности ДПФ при указанных условиях

$$\theta_{\varphi}(m, r) = [\lambda(m, r) / \pi] \cdot 50 \quad (15)$$

или с учетом (12), (14) из (15) получим

$$\theta_{\varphi}(m, r) = 50(1 - 2^{-m}) \cdot r, \quad -0,5 \leq r \leq 0,5. \quad (16)$$

Из (13) можно вычислить максимальную погрешность модуля  $k$ -го элемента последовательности  $X(k)$ , которая возникает при  $r=0,5$ , т. е. между двумя соседними бинами ДПФ, и составляет 36,3 %, начиная с  $m=5$ . С уменьшением  $m$  эта величина изменяется довольно медленно и составляет 34,67 % для  $m=2$ . Полученные таким способом значения относительной погрешности модуля  $k$ -го элемента последовательности  $X(k)$  находятся в полном соответствии с результатами, приведенными в [1, с. 63], где отмечено, что в наилучшем случае, когда частота входного сигнала попадает точно в середину между рассчитываемыми гармониками, амплитуда выходного сигнала падает до уровня 0,637. Однако автор умалчивает о том, что данные количественные оценки получены для последовательности  $x(n)$ , сформированной из комплексной экспоненты.

Пусть входная последовательность является действительной последовательностью гармонического сигнала.

В этом случае можно записать

$$x(n) = \cos[\alpha n(p+r) + \varphi], \\ n = \overline{0, (N-1)}; \quad -0,5 \leq r \leq 0,5; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (17)$$

Подставив (17) в (11) и перейдя к комплексным величинам, определим

$$X(k, p, r, \varphi) = [\exp(j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j\alpha n(p+r-k)] + \\ + [\exp(-j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j\alpha n(p+r+k)], \quad (18) \\ k = \overline{0, (N-1)}; \quad -0,5 \leq r \leq 0,5; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Пусть  $k=p$ , т. е. рассмотрим случай, когда частота входного сигнала находится в полосе пропускания  $k$ -го бина ДПФ. В этом случае из (18) следует

$$X(k, r, \varphi) = [\exp(j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\alpha r n) + \\ + [\exp(-j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp[-j\alpha(2k+r)n]. \quad (19)$$

Положим  $N = 2^m$ . Тогда из (19) получим

$$X(k, r, m, \varphi) = A \exp(j\mu) + B \exp(-j\xi); \quad (20)$$

$$A = 1/2 \sum_{l=1}^m \cos[(2^{l-m-1})\pi r]; \quad (21)$$

$$B = 1/2 \sum_{l=1}^m \cos[(2^{l-m-1})\pi(2k+r)]; \quad (22)$$

$$\mu = (1 - N^{-1})\pi r + \varphi; \quad (23)$$

$$\xi = (1 - N^{-1})\pi(2k+r) + \varphi. \quad (24)$$

Из (20)—(24) находим модуль  $X(k)$ :

$$|X(k, m, r, \varphi)| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\mu + \xi)}, \quad (25)$$
$$k = 0, (N-1); \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \quad -0,5 \leq r \leq 0,5,$$

и аргумент  $X(k)$ :

$$\arg X(k, m, r, \varphi) = \arctg [(A \sin \mu - B \sin \xi)/(A \cos \mu + B \cos \xi)]. \quad (26)$$

Выражение для относительной погрешности модуля  $X(k)$  для действительной входной последовательности  $x(n)$ , сформированной из гармонического сигнала, получим из (25)

$$\gamma(k, m, r, \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2A \cdot B \cos(\mu + \xi)} - 1, \quad (27)$$

для  $k = 0, (N-1)$ ;  $-0,5 \leq r \leq 0,5$ ;  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ , где  $A, B, \mu$  и  $\xi$  определяются из (21)—(24).

Выражение для абсолютной погрешности аргумента (при тех же ограничениях) запишется таким образом:

$$\lambda(k, m, r, \varphi) = \arg X(k, m, r, \varphi) - \varphi. \quad (28)$$

Выражение для приведенной погрешности аргумента  $X(k)$  (в %) найдем из [2, (2.48)]:

$$\theta_\varphi(k, m, r, \varphi) = 50\lambda(k, m, r, \varphi)/\pi. \quad (29)$$

Из (27) следует, что относительная погрешность модуля  $X(k)$  при действительной входной последовательности  $x(n)$ , сформированной из гармонического сигнала, существенно зависит от начальной фазы  $\varphi$  и от бина ДПФ  $k$ . Представляет интерес оценка математического ожидания  $\gamma(k, m, r, \varphi)$  для случая, когда начальная фаза  $\varphi$  — случайная величина. Во многих приложениях спектральных измерений выполняется условие, когда в момент времени  $t_0$ , соответствующему началу измерения, начальная фаза  $\varphi$  с одинаковой вероятностью может иметь любое значение из интервала  $(-\pi, \pi)$  [3].

Численным моделированием установлено, что оценкой математического ожидания  $\gamma(k, m, r, \varphi)$  при равномерном законе изменения случайной величины  $\varphi$  является соотношение

$$M[\gamma(k, m, r, \varphi)] = \prod_{l=1}^m \cos[(2^{l-m-1})\pi r] - 1, \quad -0,5 \leq r \leq 0,5, \quad (30)$$

т. е. величина математического ожидания относительной погрешности модуля  $X(k)$  ДПФ в интервале  $-0,5 \leq r \leq 0,5$  инвариантна к бину ДПФ  $k$ .

Список литературы: Бергланд Г. Д. Руководство к быстрому преобразованию Фурье / Зарубеж. радиоэлектроника, 1971. № 3. С. 52—72. 2. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., 1978. 848 с. 3. Тигонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М., 1986. 295 с.

Поступила в редколлегию 09.07.87

## МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

В системах передачи информации из-за наличия шума  $n(t)$  и случайного характера сигнала  $u(t)$  оценка реализации этого сигнала не совпадает с истинной реализацией, т. е. имеются ошибки фильтрации. В системах управления и связи для обработки сигналов широко используется линейная фильтрация, хотя во многих случаях необходима нелинейная обработка. Широкое применение линейной фильтрации объясняется простотой реализации линейных фильтров, которые сравнительно легко синтезируются, и существованием развитой теории их построения, чего нельзя сказать о нелинейных фильтрах.

При решении задачи оптимальной фильтрации сигналов из шумов для случая, когда сигнал  $u(t)$  и шум  $n(t)$  взаимодействуют аддитивно, требуется определить систему, которая из принимаемой смеси  $s(t) = u(t) + n(t)$  с минимальной средней квадратической ошибкой выделяет полезный сигнал  $u(t)$ . Сформулированная задача решена А. Н. Колмогоровым [3]. Им, в частности, было показано, что оптимальное по критерию минимума средней квадратической ошибки устройство в данном случае относится к классу линейных фильтров с постоянными параметрами, передаточная функция которого имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{S_u(\omega)}{S_u(\omega) + S_n(\omega)}, \quad (1)$$

где  $S_u(\omega)$  — спектральная плотность сигнала  $u(t)$ ;  $S_n(\omega) = N_0$  — спектральная плотность нормального белого шума  $n(t)$ .

Соотношение (1) соответствует физически нереализуемым оптимальным фильтрам. При нахождении оптимального значения  $W_0(j\omega)$  с учетом условий физической реализации применяется метод факторизации [4]. Для определения передаточной функции оптимального фильтра с равномерным запаздыванием, обеспечивающего минимум среднеквадратической ошибки фильтрации, предлагается вместо метода факторизации использовать разложение в ряд Фурье аппроксимируемой функции [2]. В этом случае передаточную функцию физически нереализуемого оптимального фильтра для нормированного значения  $\omega\tau = 1$  можно представить в виде [1]

$$W_\Phi(j\omega) = \frac{d_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos k\omega\tau. \quad (2)$$

Здесь

$$d_k = \frac{2}{x} \int_0^x W_0(j\omega) \cos k\omega\tau \, d\omega;$$

$\kappa$  — интервал аппроксимации. Задавшись точностью аппроксимации  $\delta < \delta_0$ , можно ограничить верхний предел суммирования значением  $N$ . Тогда выражение (2) представим так

$$W_{\Phi}(j\omega) = \frac{d_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N d_k (e^{-jk\omega\tau} + e^{+jk\omega\tau}). \quad (3)$$

Для обеспечения физической реализуемости устройства с передаточной функцией (3) введем задержку, соответствующую порядку фильтра  $N$ , умножив выражение (3) на  $e^{-jN\omega\tau}$ . Тогда

$$W_{\Phi}(j\omega) = \frac{d_0}{2} e^{-jN\omega\tau} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N d_k (e^{-j(N-k)\omega\tau} + e^{-j(N+k)\omega\tau}). \quad (4)$$

Устройство с передаточной функцией (4) может быть реализовано физически и обеспечивает равномерное запаздывание сигнала на выходе на время  $T_z = 2N\tau$ .

Спектральная плотность ошибки фильтрации для некоррелированных взаимодействующих аддитивно сигнала  $u(t)$  и шума  $n(t)$  имеет вид [4].

$$S_{\delta}(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = S_u(\omega) |1 - W_{\Phi}(j\omega)|^2 + S_n(\omega) |W_{\Phi}(j\omega)|^2. \quad (5)$$

Первый член выражения (5) представляет собой спектральную плотность составляющей сигнала рассогласования, обусловленной сигналом  $u(t)$ , а второй — спектральную плотность составляющей сигнала на выходе, обусловленной шумом  $n(t)$ . Среднеквадратическое значение ошибки фильтрации определяется выражением

$$\delta^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\delta}(\omega) d\omega. \quad (6)$$

Нахождение  $\delta^2$  из выражения (6) аналитически представляет собой довольно трудную задачу, но ее можно решить численными методами или графически. На рисунке представлено графическое решение выражения (6) для спектральной плотности сигнала вида

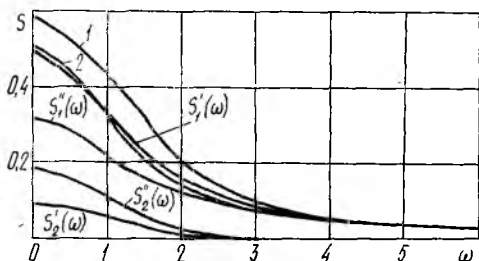
$$S_u(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} \text{ при } N_0 = 1,0, N = 5, \tau = 0,314.$$

Спектральные плотности со штрихом определены для метода факторизации, а с двумя штрихами — для разложения в ряд Фурье аппроксимируемой передаточной функции. Площади под кривыми 1, 2 задают значения среднеквадратических ошибок фильтрации для рассматриваемых методов. Очевиден выигрыш по уменьшению ошибки фильтрации для представленного в работе метода.

При нахождении передаточной функции оптимального фильтра разложением в ряд Фурье аппроксимируемой функции важное значение имеет выбор оптимального предела суммирования  $N$  в выражении (4),

поскольку он влияет на точность аппроксимации  $\delta$ , задержку  $T_s$  и сложность устройства  $q$ . Легко установить, что с ростом  $N$ , начиная с некоторого его значения, точность аппроксимации увеличивается гораздо медленнее, чем сложность устройства. Поэтому при синтезе оптимального фильтра необходимо учитывать, какой из перечисленных параметров является определяющим, и, исходя из этого, находить значение  $N_{\text{опт}}$ . Например, при фиксированном времени задержки  $T_s = \text{const}$  оптимальное значение  $N_{\text{опт}}$  выбирается путем решения задачи по минимизации целевой функции  $V = k_1\delta + k_2q$ , где  $k_1, k_2$  — весовые коэффициенты.

Таким образом, предложенный метод позволяет синтезировать физически реализуемый оптимальный фильтр. Выбор числа  $N$  обеспечивает передаточную функцию фильтра, полученную методом разложения в ряд Фурье аппроксимируемой функции, сколь угодно близкую к аппроксимируемой при практически нулевых фазовых искажениях и незначительной задержке. Анализируя выражение (3), можно



увидеть, что устройство с такой передаточной функцией легко реализуется в аналоговом и в цифровом виде, так как оно состоит из усилителей и линий задержки. Оптимальный фильтр с передаточной функцией (4) позволяет уменьшить среднеквадратическое значение ошибки фильтрации и увеличить отношение сигнал — шум на выходе устройства по сравнению с фильтром, полученным с помощью метода факторизации что повышает качество фильтрации сигналов из шумов.

Список литературы: 1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., 1986. 544 с. 2. *Гольденберг Л. Н., Поляк М. Н.* Цифровая обработка сигналов. Справочник. М., 1985. 312 с. 3. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. математ. 1941. № 5. С. 3—14. 4. *Теория автоматического управления. Нелинейные системы управления при случайных возмущениях* // А. В. Нетушил, А. В. Балтрушевич, В. В. Бурляев и др. М., 1983. 432 с.

Поступила в редколлегию 08.02.88

УДК 621.391

и. В. ЗОТОВ

### АЛГОРИТМ СИНТЕЗА АНСАМБЛЕЙ КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ СИГНАЛОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В связи с развитием теории передачи и обработки информации повышаются требования, предъявляемые к ансамблевым, структурным и корреляционным свойствам используемых систем сигнала-

лов. Поэтому актуальна разработка эффективных методов синтеза сложных сигналов с заданными свойствами.

Известно [1], что достаточное условие существования  $N$  — позиционного кода  $W$  с  $n$ -уровневой периодической функцией автокорреляции (ПФАК) заключается в том, чтобы имело место разностное множество, сбалансированное на  $n$  уровнях  $D(N, K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . При этом под разностным множеством  $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_k\}$  понимается подмножество  $K$  целых чисел по модулю  $N$  такое, что разность  $d_i - d_u \pmod{N}$ ,  $i \neq u$ ,  $i, u = 1, 2, \dots, K$  принимает каждое из  $n_1$  различных значений из множества чисел  $1, 2, \dots, N-1$  точно  $\lambda_1$  раз,  $n_2$  различных значений из этого же множества чисел  $\lambda_2, n_3 - \lambda_3, \dots, n_n - \lambda_n$  раз.

Аналогично [1] будем полагать, что элементы разностного множества  $d_i$  представляют собой локаторы единичных символов в коде бинарной фазоманипулированной последовательности  $W = \{W_1, W_2, W_3, \dots, W_N\}$ , а также то, что соответствие  $W \equiv D$  носит взаимнооднозначный характер. Необходимое условие при синтезе последовательностей с  $n$ -уровневой ПФАК — выполнение следующих равенств:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_n = N - 1; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n n_i \cdot \lambda_i = K(K - 1); \quad (2)$$

$$R_i = N - 4 \cdot (K - \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В работе [2] предложен алгоритм синтеза сигналов заданной уровневости и других свойств ПФАК. Для решения системы уравнений (1) — (3) определяли параметры требуемых разностных множеств  $D$ , а затем на их основании случайным перебором элементов  $d_i$  находили корректные в смысле ПФАК множества. Существенные недостатки этого алгоритма — большая вычислительная сложность и неоднозначность при решении (1) — (3), а также алгоритма перебора возможных вариантов. Кроме того, с увеличением длины  $N$  и значения уровневости  $n$  вычислительная сложность алгоритма увеличивается непропорционально  $N$ , что приводит к неэффективности метода уже при  $N \leq 30$ .

Исследования показали, что для синтеза сигналов с заданными свойствами можно использовать алгоритм, более эффективный с точки зрения быстродействия и программно аппаратной реализации. Замечено, что при формировании сигнала значительно проще оперировать не элементами разностного множества  $d_i = \overline{1, k}$  а разностями

$$l_j = (d_i - d_{i-1}), \quad j = \overline{2, K}, \quad (\text{мод } N); \quad (4)$$

$$l_1 = d_1 - d_k,$$

что позволяет снять задачу решения (1) — (3), и также более точно проводить отбор корректных множеств. Так, если на основании

определения разностного множества проверять разности  $d_u - d_i$ ,  $i \neq u$ ,  $i, u, = 1, k$ , то легко заметить, что при  $u = i + 1$  имеем

$$L = \sum_{i=1}^k d_u - d_i = (d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + (d_4 - d_3) + \dots \\ \dots + d_k - d_{k-1} = d_k - d_1 \pmod{N}. \quad (5)$$

Далее, после простых преобразований

$$P = L - (d_k - d_1) = (d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \dots \\ \dots + (d_k - d_{k-1}) + (d_1 - d_k) = 0 = N, \pmod{N} \quad (6)$$

видно, что сумма разностей элементов множества  $D$ , представленных в виде (4), всегда равна длине синтезируемого сигнала и инвариантна к параметрам разностного множества. Это позволяет вести перебор, оперируя не с числами-элементами разностного множества, а с заранее подготовленными корректными разностями между элементами  $d_i$ . В частности, при этом можно преодолеть ту часть прямого перебора, где получаются автоморфизмы, не приводящие к росту ансамбля сигналов. В то же время разброс значений слагаемых, составляющих  $P$  в (6) минимален, здесь всегда существуют одинаковые слагаемые, что также сокращает количество попыток при отборе множеств, так как перестановки слагаемых в  $P$  (назовем их дифферентами разностного множества) в этом случае являются некорректными.

**Пример 1.** Пусть имеется разностное множество с  $N = 28$ ,  $K = 14$  с трехуровневой ПФАК вида  $D(28, 14, 6, 7, 8) = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 18, 20, 24, 25, 26\}$ . Тогда дифферентами множества будут  $P = \{3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 2, 4, 1, 1\}$ ,

так что  $\sum_{i=1}^k P_i = 28$ .

Можно представить, как будет выигрыш в эффективности в этом случае при синтезе  $P$ , где всего  $P$  различных элементов, по сравнению с  $D$ , где 14 таких элементов. Так при формировании  $D$  потребуется  $C_{28}^{14}$  попыток, а при синтезе  $P$  —  $C_{14}^5$ , что соответствует сокращению процесса отбора и анализа корректных комбинаций приблизительно в 1000 раз.

Исследования показали, что к решению поставленной задачи можно подойти иначе. Разбиением числа  $N$  [3] называется конечная невозрастающая последовательность  $k$  натуральных чисел  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ , для которой выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i = N. \quad (7)$$

Н Каждое число  $N$  можно разложить на  $E(N)$  комбинаций. В [3] приводится вывод формулы для вычисления  $E(N)$ . Мы же ограничимся лишь тем, что приведем несколько ее значений:  $E(1) = 1$ ,  $E(4) = 5$ ,  $E(10) = 42$ ,  $E(50) = 204226$ ,  $E(200) = 04 \cdot 10^{12}$ .

Таким образом, с одной стороны, выражения (4), (7) эквивалентны по своим функциям, а с другой — количество возможных

разбиений числа растет очень быстро с увеличением  $N$ . Поэтому предлагается использовать алгоритм разбиений числа [3] с введением дополнительного критерия отбора, при котором производится анализ количества блоков одинаковых символов в синтезируемой последовательности.

**Пример 2.** Пусть имеются две последовательности дифферент множества  $D(12, 6, 2, 3, 4)$ ,  $P_1 = \{7, 1, 1, 1, 1, 1\}$  и  $P_2 = \{1, 2, 4, 3, 1, 1\}$ .

Нетрудно проверить, что последовательность, соответствующая  $P_2$ , имеет оптимальное число блоков [4], равное  $N/2$ , и близкие к оптимальным корреляционные свойства, в то время как последовательность, которой соответствует  $P_1$ , не удовлетворяет этому критерию, что и обуславливает плохие корреляционные свойства.

В связи с тем что сигналы, обладающие близкими к оптимальным корреляционными свойствами, следует искать среди последовательностей с числом блоков  $M_{\text{опт}} \cong N/2$  [4], можно исключить некорректные разбиения, тем самым сокращая количество попыток синтеза разбиений на их соответствие заданным свойствам.

Согласно сказанному сформулируем алгоритм формирования сигналов с заданными структурными, корреляционными свойствами; отличающийся от известных [1, 2, 4] более высокой эффективностью в отношении быстродействия и простоты устройств реализации, спектра возможных длин  $N$  в следующем виде.

1. Для заданных  $N$ ,  $K = N/2 \pm x_1$  из (3) определяются граничные значения  $\lambda_i$ . При этом значения максимальных боковых выбросов ПФАК выбираются оптимальными в смысле границ [1]:

$$R_{i \text{ мин}} = \begin{cases} 0, & N \equiv 0; \\ 1, & N \equiv 1; \\ 2, & N \equiv 2; \\ -1, & N \equiv 3; \end{cases} \pmod{4}. \quad (10)$$

Так,  $\lambda_i^{\text{сп}}$  вычисляется из (3) и имеет вид  $\lambda_i^{\text{сп}} = (4 \cdot K + R_i^{\text{сп}} - N)/4$ , (11), а остальные  $n - 1$  значений  $\lambda_i = \lambda_i^{\text{сп}} \pm (n - 1)$  (12).

2. Формируется одно из  $E(N)$  разбиений числа  $N$ .

3. Проверяется разбиение на корректность по блокам. Если  $M_i \neq M_{\text{опт}} \pm x_2$ , то возврат к п. 2.

4. Проверяется разностное множество, соответствующее данному разбиению на удовлетворение корреляционным свойствам.

4.1. Если параметры  $D$  не удовлетворяют условиям по ПФАК, т. е.

$$n_1 < \lambda_{\text{мин}}; n_2 > \lambda_{\text{макс}}, \quad (13)$$

то возврат к п. 2.

4.2. Множеству  $D$  ставится в однозначное соответствие код последовательности  $W$ , проверяются взаимокорреляционные свойства (ВКФ) данной последовательности с другими сигналами ансамбля.

Если не выполняется условие

$$|R_{0i}^n| < |R_{0i}^n \text{ зад}|, \quad (14)$$

то возврат к п. 2.

4.3. Анализ по критерию минимальности стыковой функции корреляции (СКФ). Если не выполняется условие

$$|R_{0i}^c| \leq |R_{0i}^c \text{ зад}|, \quad (15)$$

то возврат к п. 2.

5. Путем перестановки дифферент в исходном разбиении, что соответствует перестановкам блоков сигнала, строится новое разбиение. При этом исключаются циклические комбинации, а также перестановки одинаковых дифферент. Если число перестановок  $h < C_N^{m1}$ , где  $m1$  — число различных значений в  $P$ , то возврат к п. 4.

6. Если число синтезируемых разбиений  $E_i \leq E(N)$ , то возврат к п. 2.

7. Конец алгоритма синтеза ансамбля сигналов с заданными  $N, K$ , корреляционными и структурными свойствами.

Данный алгоритм позволяет синтезировать как строго оптимальные в смысле  $K, M$  сигналы, когда  $x_1 = x_2 = 0$ , так и близкие к ним, когда  $x_1, x_2 = 1, 2, \dots$ . Имеется также возможность синтеза системы сигналов как по критерию минимальности уровней боковых выбросов ПФАК (п. 4.1), так и ВКФ (п. 4.2), СКФ (п. 4.3). Предлагаемый алгоритм предпочтительнее по отношению к описанным в работах [1; 2] и в том, что позволяет без решения системы уравнений (1)–(3) синтезировать сигналы практически для любых длин  $N$ , различных значений  $K, n$ , без изменения сути алгоритма. Так, предложенный в работе [2] метод позволил автору синтезировать лишь отдельные сигналы с трехуровневой ПФАК для  $N \leq 28$ ,  $R_{\text{опт}}^a$ , в то время как примеры, сформулированные по предлагаемому алгоритму, имеют длины  $N > 28$ .

Пример 3.  $N = 32, K = 16, n = 3, |R_{\text{Смакс}}^a| = 4, M = 18; P = \{3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 3, 4, 2\}; D = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 17, 21, 24, 28, 29, 30\}; S = \{10111111001010101000100100011100\}; N = 40, K = 20, n = 3, |R_{\text{Смакс}}^a| = 4, M = 18; P = \{3, 5, 4, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 2, 1, 1\}; D = \{1, 6, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 32, 34, 36, 37, 38\}; S = \{10000100010010011111100111110000101011100\}$ .

Таким образом, приведенный алгоритм нерегулярного синтеза ансамблей сигналов с заданными свойствами более эффективен по сравнению с известными и позволяет синтезировать сигналы с  $N > 30$ .

Список литературы: 1. Сverdlik М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 192 с. 2. Пелехатый М. И. О некоторых блок-конструкциях, порождающих последовательности с хорошими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника. 1970. № 7. С. 771—785. 3. Эндрюс Г. Теория разбиений / Пер. с англ. Стечкина Б. С. М., 1982, 255 с. 4. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М., 1985. 383 с.

Поступила в редколлегию 10.02.88

В. С. ГОЛИКОВ, канд. техн. наук, В. В. СУМЦОВ,  
Т. Г. КАЛЕКИНА, канд. техн. наук

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ М-ИЧНЫХ СИСТЕМ МЕЖДУПЕРИОДНОЙ ОБРАБОТКИ

В  $M$ -ичных системах междупериодной обработки сигналов на фоне нормальных коррелированных стационарных аддитивных помех и шумов используются циркулянтные, или клеточно-циркулянтные, матрицы обработки. Это позволяет существенно снизить вычислительную сложность соответствующих алгоритмов обнаружения.

Основанием для построения таких систем служит асимптотическое равенство нулевой матрице разности  $\Phi^*V\Phi - \Phi^*\bar{V}\Phi \cong 0$  (1). Здесь  $V, \bar{V}$  — матрицы обработки оптимальной по критерию Неймана — Пирсона системы обнаружения флюктуирующих сигналов на фоне нормальных коррелированных стационарных аддитивных помех и шумов при стационарном ожидаемом сигнале и  $M$ -ичной системы междупериодной обработки;  $\Phi$  — матрица дискретного преобразования Фурье в базисе функций Виленкина — Крестенсона с параметром  $M$ .

Покажем, что методика расчета точных характеристик обнаружения, основанная на вычислении спектров определяющих матриц [1; 2], существенно упрощается для случая  $M$ -ичной междупериодной обработки.

Алгоритм оптимальной по критерию Неймана — Пирсона блочной  $M$ -ичной междупериодной обработки флюктуирующих сигналов на фоне нормальных коррелированных стационарных аддитивных помех и шумов представляет собой вычисление квадратичной формы над координатами входной реализации  $\xi$  в пространстве комплексных функций, заданном на множестве  $K_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ , на котором определена операция сложения по модулю  $M$ ,  $(p \oplus l) = p + l \pmod{M}$ ,  $n = \log_m N$ ,  $n$  — целое:

$$z_l = \frac{1}{2} \sum_{p, l=0}^{N-1} \bar{V}_{pl} \xi_{p \oplus l} \xi_{l \oplus p}^* \quad (2)$$

где  $\bar{V}_{pl}$  — элементы матрицы обработки, в общем случае равной

$$\bar{V} = [\Phi R^{(M)}]^{-1} - [{}^c R^{(M)} + \Phi R^{(M)}]^{-1}, \quad (3)$$

${}^c R^{(M)}$  и  $\Phi R^{(M)}$  —  $M$ -ичные корреляционные матрицы сигнала и фона. Элементы этих матриц связаны с элементами теплицевых корреля-

пионных матриц стационарного дискретного случайного процесса выражением

$$\|R_{pl}^{(M)}\| = \|N^{-1} \sum_{a=0}^{N-1} R_{p \oplus a, l \oplus a}^M\| = \|N^{-1} \sum_{a=0}^{N-1} R \times \\ \times (a \oplus (p \ominus l) - a)\| = N^{-1} \sum_{a=0}^{N-1} \|R(a \oplus (p \ominus l) - a)\|, \quad (4)$$

где  $R(t)$  — арифметическая корреляционная функция.

Примем в качестве модели полезного сигнала дискретный случайный нормальный процесс с корреляционной матрицей, элементы которой имеют вид

$${}^c R_{pl} = \sigma_c^2 \exp \{-|p-l|/T_c + j(p-l)\theta\}. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_c^2$  — дисперсия флюктуаций сигнала;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\theta$  — междупериодный набег фазы сигнала;  $T_c$  — постоянная времени корреляции сигнала.

Аналогичную модель примем и для фона, являющегося аддитивной смесью коррелированной составляющей и белого шума. Корреляционная функция фона

$$\Phi R_{pl} = \sigma_n^2 \exp \{-|p-l|/T_n + j(p-l)\varphi\} + \sigma_w^2 \delta_{pl}. \quad (5a)$$

Здесь  $\sigma_n^2$ ,  $\sigma_w^2$  — мощности коррелированной помехи и белого шума;  $\varphi$  — междупериодный набег фазы помехи;  $T_n$  — постоянная времени корреляции помехи;  $\delta_{pp} = 1$ ,  $\delta_{pl} = 0$  при всех  $p \neq l$ .

Матрица  $R^{(M)}$ , определяемая выражением (4) как нормированная сумма циркулянтных (клеточно-циркулянтных) матриц с одинаковой структурой, — циркулянтная (клеточно-циркулянтная). Следовательно и матрица  $\bar{V}$  обладает такой, как и  ${}^c R^{(M)}$  и  $\Phi R^{(M)}$ , структурой. Положительная определенность  $\bar{V}$  следует из (1), так как матрица  $V$  положительно определена, имеет положительные собственные значения, асимптотически равные собственным значениям матрицы  $\bar{V}$ . После преобразования нормального случайного дискретного процесса положительно определенной квадратичной формой вероятность превышения некоторого нормированного порога  $z_* = z/2\sigma^2$  [2] такова:

$$P = \sum_{\gamma=1}^L \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{d\lambda_\gamma^{\alpha-1}} \left[ \lambda_\gamma^{\alpha-1} \exp \left\{ -\frac{z_*}{\lambda_\gamma} \right\} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \gamma}}^L \left( 1 - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\gamma} \right)^{-\varepsilon} \right], \quad (6)$$

где  $L \leq N$  — число различных собственных значений  $\lambda_\gamma$  определяющей матрицы  $\Lambda$ , равной произведению матрицы обработки и корреляционной матрицы обрабатываемой последовательности:

$$\Lambda = \begin{cases} \bar{V} [\Phi R^{(M)}] & \text{— при отсутствии цели;} \\ \bar{V} [\Phi R^{(M)} + q^2 {}^c R^{(M)}] & \text{— при наличии цели;} \end{cases} \quad (7)$$

$\alpha$  — кратность собственных значений  $\lambda_p$ ;  $\epsilon$  — кратность собственных значений  $\lambda_\beta$ ;  $q^2 = \sigma_n^2 / (\sigma_n^2 + \sigma_{ш}^2)$  — относительный уровень сигнала. В (7) учтено, что при вероятности ложной тревоги  $F \ll D$  эффективность обработки в точке равна эффективности обработки на интервале [3], т. е. допустимо усреднение по  $i$ . Матрицы в квадратных скобках в (7) получены в результате такого усреднения.

Из соотношений (6), (7) следует, что для построения характеристик обнаружения  $M$ -ичной системы между периодной обработки необходимо найти спектр определяющей матрицы в соответствующем базисе функций Виленкина — Крестенсона (ВКФ) в отсутствие цели и при ее наличии.

Решение этой задачи для обычных систем обработки сопряжено с трудностями, связанными с нахождением спектров матриц  $V$ , определяемых как  $\text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_N \} = T \Lambda T^*$ , где  $T$  — матрица собственных векторов  $\Lambda$ , причем  $T T^* = I$ ;  $\text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_N \}$  — матрица собственных значений  $\Lambda$ .

Ортогональное преобразование  $T$  — преобразование Карунена — Лоэва, определяемое заданными корреляционными матрицами, не может быть вычислено с использованием быстрых алгоритмов. С увеличением  $N$  задача нахождения  $\text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_N \}$  существенно усложняется [4].

Нахождение спектра определяющей матрицы  $M$ -ичной системы между периодной обработки упрощается, так как эта матрица обладает циркулянтной (клеточно-циркулянтной) структурой. Поэтому спектр такой матрицы и ее первый вектор-столбец являются парой конечных Фурье-трансформант в соответствующем базисе ВКФ:  $[\lambda_1, \dots, \lambda_N] = [\Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{1N}] \Phi^*$  (8). Для ортогонального преобразования  $\Phi^* = \left\| \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{M} \sum_{i=1}^n p_i l_i \right\} \right\|$  существуют быстрые вычислительные алгоритмы.

Эта задача еще более упрощается в случае медленных флуктуаций и  $\sigma_n^2 \gg \sigma_{ш}^2$ . Тогда может быть факторизована  $M$ -ичная корреляционная матрица  $R^{(M)}$ . Такая матрица размером  $M^n \times M^n$  представляется кронекеровским произведением  $n$ -циркулярных  $M \times M$ -матриц:

$$R^{(M)} = \prod_{i=1}^n R_i^{(M)} = \prod_{i=1}^n \left\| M^{-1} \sum_{a=0}^{M-1} R(M^{n-i}(a \oplus (p_i \ominus l_i) - a)) \right\|, \quad (9)$$

где  $\prod$  — кронекеровское произведение матриц;  $p, l = \overline{0, M-1}$ ,  $p = \sum_{i=1}^n p_i M^{n-i}$ ,  $l = \sum_{i=1}^n l_i M^{n-i}$ ,  $p_i, l_i$  — номера строк и столбцов  $i$ -й слева  $M \times M$ -циркулянтной матрицы,  $p_i, l_i = \overline{0, M-1}$ .

Согласно теореме о собственных значениях и собственных векторах матрицы, являющейся кронекеровским произведением матриц [5], собственные значения клеточно-циркулянтной матрицы  $R^{(M)}$  равны

$$\mu_\nu = \prod_{i=1}^n \mu_{\nu_i} = \prod_{i=1}^n M^{-1} \sum_{p, a=0}^{M-1} R(M^{n-i}(a \oplus p - a)) e^{-j \frac{2\pi}{M} p \nu_i}. \quad (10)$$

Здесь  $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i M^{n-i}$ ;  $\mu_{\gamma_i}$  —  $\gamma_i$ -е собственное значение  $i$ -й слева  $M \times M$ -циркулянтной матрицы. Подставляя (5) и (5а) в (10), после преобразований получаем

$$\mu_{\gamma}^c = \prod_{i=1}^n \sigma_c^2 \left[ 1 + 2M^{-1} \sum_{\rho=1}^{M-1} (M-\rho) \exp \left\{ -\frac{|M^{n-i}\rho|}{T_0} \right\} \times \right. \\ \left. \times \cos \left( M^{n-i}\theta\rho - \frac{2\pi}{M} \rho\gamma_i \right) \right], \quad (11)$$

$$\mu_{\gamma}^{\phi} = \prod_{i=1}^n (\sigma_n^2 + \sigma_w^2) \left[ 1 + \frac{2\sigma_n^2 M^{-1}}{\sigma_n^2 + \sigma_w^2} \sum_{\rho=1}^{M-1} (M-\rho) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\frac{|M^{n-i}\rho|}{T_n} \right\} \cos \left( M^{n-i}\varphi\rho - \frac{2\pi}{M} \rho\gamma_i \right) \right]. \quad (11a)$$

Искомый спектр определяющий матрицы с учетом (3), (7), (8), (11) и (11a) запишется как

$$\text{diag} \{ \lambda_{\gamma} \} = \text{diag} \left\{ \frac{q^2 \mu_{\gamma}^c}{\mu_{\gamma}^{\phi} + q^2 \mu_{\gamma}^c} \right\} \text{ — при отсутствии цели,} \quad (12)$$

$$\text{diag} \{ \lambda_{\gamma} \} = \text{diag} \left\{ \frac{q^2 \mu_{\gamma}^c}{\mu_{\gamma}^{\phi}} \right\} \text{ — при наличии цели.} \quad (12a)$$

Используя (6), (12), находим характеристики обнаружения. Однако выполнение расчетов на ЭВМ с применением выражения (6) оказывается невозможным.

Приведем это соотношение к виду, удобному для его программной реализации:

$\alpha-1$ -ю частную производную произведения, состоящего из  $L+1$ -го сомножителя, запишем в виде

$$\frac{d^{\alpha-1}}{d\lambda_{\gamma}^{\alpha-1}} \left[ \prod_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} U_{i_{\alpha-1}}(\lambda_{\gamma}) \right],$$

где

$$U_1(\lambda_{\gamma}) = \lambda_{\gamma}^{\alpha-1}; \quad U_2(\lambda_{\gamma}) = \exp \left\{ -\frac{z_0}{\lambda_{\gamma}} \right\};$$

$$U_{\beta+2}(\lambda_{\gamma}) = \left( 1 - \frac{\lambda_{\beta}}{\lambda_{\gamma}} \right)^{-\beta}. \quad (13)$$

Последовательно понижая порядок дифференцирования с помощью правила нахождения производной произведения, имеем

$$\frac{d^{\alpha-1}}{d\lambda_{\gamma}^{\alpha-1}} \left[ \prod_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} U_{i_{\alpha-1}}(\lambda_{\gamma}) \right] = \frac{d^{\alpha-2}}{d\lambda_{\gamma}^{\alpha-2}} \left[ \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \frac{dU_{i_{\alpha-1}}(\lambda_{\gamma})}{d\lambda_{\gamma}} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{\substack{i_{\alpha-2}=1 \\ i_{\alpha-2} \neq i_{\alpha-1}}}^{L+1} U_{i_{\alpha-2}}(\lambda_{\gamma}) \Big] = \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \frac{d^{\alpha-2}}{d\lambda_{\gamma}^{\alpha-2}} \left[ \prod_{i_{\alpha-2}=1}^{i_{\alpha-1}} U_{i_{\alpha-2}}^{[\delta_{i_{\alpha-2}, i_{\alpha-1}}]}(\lambda_{\gamma}) \right] = \\
& = \dots \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \sum_{i_{\alpha-2}=1}^{L+1} \dots \sum_{i_2=1}^{L+1} \frac{d}{d\lambda_{\gamma}} \left[ \prod_{i_1=1}^{i_2} U_{i_1}^{[\sum_{k=2}^{\alpha-1} \delta_{i_{k-1}, i_k}]}(\lambda_{\gamma}) \right] = \\
& = \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \dots \sum_{i_1=1}^{L+1} \left[ \prod_{i_0=1}^{i_1} U_{i_0}^{[\sum_{k=1}^{\alpha-1} \delta_{i_{k-1}, i_k}]}(\lambda_{\gamma}) \right]. \tag{14}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\delta_{i_{k-1}, i_k} = \begin{cases} 1, & i_{k-1} = i_k; \\ 0, & i_{k-1} \neq i_k; \end{cases}$$

$$U_{i_k}^{[x]}(\lambda_{\gamma}) = \frac{d^x U_{i_k}(\lambda_{\gamma})}{d\lambda_{\gamma}^x}.$$

Следовательно,  $\alpha-1$ -я производная произведения вычисляется как сумма произведений производных сомножителей.

Подставляя (14) в (6) с учетом (13), записываем расчетную формулу

$$P = \sum_{\gamma=1}^L \frac{1}{(\alpha-1)!} \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \dots \sum_{i_1=1}^{L+1} \left[ \prod_{i_0=1}^{i_1} U_{i_0}^{[\sum_{k=1}^{\alpha-1} \delta_{i_{k-1}, i_k}]}(\lambda_{\gamma}) \right], \tag{15}$$

где при  $x \geq 1$  значения  $U_{i_0}^{[x]}(\lambda_{\gamma})$  находятся из выражений

$$\begin{aligned}
U_1^{[x]}(\lambda_{\gamma}) &= \frac{d^x \lambda_{\gamma}^{\alpha-1}}{d\lambda_{\gamma}^x} = \lambda_{\gamma}^{\alpha-x-1} \prod_{t=1}^x (\alpha-t); \\
U_2^{[x]}(\lambda_{\gamma}) &= \frac{d^x}{d\lambda_{\gamma}^x} \left[ \exp \left\{ -\frac{z_{*}}{\lambda_{\gamma}} \right\} \right] = \\
&= (-1)^{x-1} \exp \left\{ -\frac{z_{*}}{\lambda_{\gamma}} \right\} \sum_{t=0}^{x-1} \frac{C_{x-1}^t z_{*}^{x-t}}{(x-t)! \lambda_{\gamma}^{2x-t}}; \\
U_{\beta+2}^{[x]}(\lambda_{\gamma}) &= \frac{d^x}{d\lambda_{\gamma}^x} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda_{\beta}}{\lambda_{\gamma}} \right)^{-\varepsilon} \right] = \\
&= \frac{(-1)^{x-1}}{(\lambda_{\gamma} - \lambda_{\beta})^{\varepsilon+x}} \sum_{t=0}^{x-1} \frac{C_{x-1}^t}{(x-t)!} \lambda_{\gamma}^{\varepsilon-x+t} \prod_{s=0}^{x-t-1} (\varepsilon-s) \lambda_{\beta}.
\end{aligned}$$

Вероятности ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$  определяются выражением (15) ( $F = P$  при  $\{\lambda_{\gamma}\} = \{\lambda_{\gamma}^{\Phi}\}$  и  $D = P$  при  $\{\lambda_{\gamma}\} = \{\lambda_{\gamma}^{c\Phi}\}$ ).

Из (1) следует, что эффективность  $M$ -ичных систем междупериодной обработки стремится к эффективности оптимальных по критерию Неймана — Пирсона систем обнаружения сигналов при увеличении  $N$ .

Расчеты показывают, что в большинстве практически важных случаев эффективности обычных и  $M$ -ичных систем обработки оказываются равными с инженерной точностью уже при  $N > 10$ . Таким образом,  $M$ -ичные алгоритмы образуют новый класс асимптотически эффективных алгоритмов обработки, которые, вследствие указанных особенностей их матриц обработки, могут быть реализованы на основе быстрых вычислительных процедур. Причем эти алгоритмы обеспечивают высокую помехоустойчивость обработки.

Полученные соотношения (11), (12), (15) показывают, что при  $M$ -ичной междупериодной обработке характеристики обнаружения полностью обусловлены спектром циркулянтных (клеточно-циркулянтных) матриц обработки.

Заметим, что построение характеристик обнаружения обычных систем обработки с использованием спектра определяющей матрицы приводит к необходимости выполнения на ЭВМ ряда трудоемких процедур: нахождение собственных векторов и собственных значений матрицы  $N$ -го порядка; определение кратности собственных значений; обращение матрицы  $N$ -го порядка. Поэтому применение этого метода расчета в интервалах обработки  $N > 30$  для обычных систем весьма проблематично.

Приведенная же методика точного расчета характеристик обнаружения  $M$ -ичных систем междупериодной обработки пригодна для расчетов и при  $N > 30$ , причем в результате использования быстрых алгоритмов вычисления спектров значительно сокращаются объемы вычислений.

Список литературы: 1. Охрименко А. Е., Тосев И. Т. Анализ характеристик обнаружения систем междупериодной обработки // Радиотехника и электрон. 1971. № 1. С. 67—75. 2. Соколов Г. А., Иванов В. А. К расчету характеристик обнаружения сигналов на фоне коррелированных помех в системах междупериодной обработки // Повышение эффективности и надежности радиоэлектронных систем. 1979. Вып. 9. С. 78—88. 3. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г. П. Тартаковского, М., 1963. Т. 1. 424 с. 4. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., 1980. 248 с. 5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1976. 352 с.

Поступила в редколлегию 09.07.87

УДК 537.86:519.517

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, д-р физ.-мат. наук, Ю. Н. ГОЛОБОРОДЬКО

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОГО  
ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННОЙ  
АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. СООБЩЕНИЕ 1**

В классической задаче многоальтернативного обнаружения сигналов по результатам наблюдения необходимо принять решение о наличии сигнала и к какому из заданных сигналов он относится. В ряде прикладных задач возникают ситуации, когда наблюдения

не принадлежат ни помехе, ни одному из заданных сигналов. Кроме того, некоторые из сигналов не представляют интереса для наблюдателя и к тому же отсутствует информация для их различия.

В литературе аналогичные условия обсуждались для задач проверки бинарных гипотез. Так, известно решение классической задачи классификации аномальных наблюдений [1], использование в этих условиях для обнаружения сигналов статистики, родственной  $t$ -статистике Стьюдента [2], применение небайесовского критерия оптимальности, обеспечивающего заданную вероятность правильного обнаружения при минимизации собственной области сигнала [3].

Поставлена и решена подобная задача для случая распознавания сигналов как задача распознавания в условиях повышенной априорной неопределенности [4]. Она обобщена для случая, когда учитывается ограниченность ресурсов, отпущенных на построение устройства распознавания, рассмотрена многокритериальная задача распознавания в условиях повышенной априорной неопределенности [5].

Рассматривается многокритериальная задача многоальтернативного обнаружения гауссовских сигналов на фоне гауссовской помехи в условиях повышенной априорной неопределенности. Оптимизация решения осуществляется по совокупности показателей качества, включающей показатели, характеризующие эффективность многоальтернативного обнаружения, затраты на проектирование и реализацию устройства.

*Постановка задачи.* Пусть обнаружению подлежит  $M + 1$  сигнал, действующий на фоне помехи. Полагаем, что задана совокупность условий работы и ограничений на структуру и параметры устройства, решающего задачу. Пусть введены  $M + 2$  гипотезы, которые могут быть сделаны в отношении помехи и сигналов:  $H^0$  — гипотеза об отсутствии сигнала;  $H^i$ ,  $i = 1, M$  — гипотезы о заданных сигналах;  $H^{M+1}$  — гипотеза о действии неизвестного сигнала из объединенного  $M + 2$ -го класса.

Полагается, что плотность вероятности вектора  $\vec{X}$ , по реализации которого  $\vec{x}$  принимается решение, при справедливости гипотезы  $H^i$ ,  $i = \overline{0, M}$ , известна с точностью до случайного векторного параметра:  $N(\vec{x}|H^i, \vec{\alpha}^i)$ ,  $i = \overline{0, M}$ , где  $N(\vec{x}|H^i, \vec{\alpha}^i)$  — нормальное распределение. Считается, что  $M$  сигналов гауссовские и действуют на фоне гауссовской помехи; дополнительно предполагается, что  $M + 1$ -й сигнал представляет совокупность неизвестного числа сигналов, о которых нет априорных данных. Заданы априорные вероятности гипотез  $P(H^i) = P_i$ , причем  $\sum_{i=0}^{M+1} P_i = 1$ . Известны также обучающие выборки помехи и смеси заданных сигналов с помехой

$$\vec{x}^i(n_i) = (\vec{x}_1^i, \dots, \vec{x}_r^i, \dots, \vec{x}_{n_i}^i), \quad i = \overline{0, M},$$

объемом  $n_i$ .

Ставится задача: обнаружить и различить  $M$  заданных сигналов и отнести в объединенный  $M+1$ -й класс сигналы, о которых нет априорных данных, необходимых для их различения. Требуется оптимизировать решение по векторному критерию

$$\vec{k}(\vec{\alpha}) = (\hat{k}_{\text{нз}}, \hat{k}_V, \hat{k}_{\text{зп}}, \hat{k}_{\text{зр}}), \quad (1)$$

где  $\hat{k}_{\text{нз}}$  — показатель неэффективности, вводимый специальным образом в формулируемой задаче многоальтернативного обнаружения;  $\hat{k}_V$  — показатель объема критической области отклонения гипотезы о сигнале из  $M+1$ -го класса, учитывающий специфику повышенной априорной неопределенности [5];  $\hat{k}_{\text{зп}}$  — показатель затрат на проектирование устройства;  $\hat{k}_{\text{зр}}$  — показатель затрат на реализацию устройства;  $\vec{\alpha}_{\text{зр}}$  — оценка неизвестного векторного параметра, найденная по обучающей выборке.

Обсудим особенности задания частных показателей из (1).

При наличии всей необходимой информации о  $M+1$ -ом сигнале и помехе средняя вероятность ошибки принятия  $M+2$ -х гипотез равна

$$P_{\text{ош}}^{\Sigma(M+2)} = P_{\text{ош}}^{\Sigma(M+1)} + \sum_{l=0}^M P_l P(G^{M+1}/l) + \sum_{l=0}^M P_{M+1} P(G^l/M+1).$$

Здесь 
$$P_{\text{ош}}^{\Sigma(M+1)} = \sum_{i=0}^M \sum_{l=0}^M P_i P(G^l/i), \quad l \neq i, \quad (2)$$

— составляющая средней вероятности ошибки, определяемая неправильным принятием  $M+1$ -ной гипотезы  $H^i$  ( $i = \overline{0, M}$ );

$$\sum_{l=0}^M P_l P(G^{M+1}/l) \quad (3)$$

— составляющая средней вероятности ошибки, полученная выбором гипотезы о действии неизвестного  $M+1$ -го сигнала, когда фактически никакого сигнала нет или на фоне помехи действует один из  $M$  заданных сигналов;

$$\sum_{l=0}^M P_{M+1} P(G^l/M+1) \quad (4)$$

— составляющая средней вероятности ошибки, определяемая принятием гипотезы  $H^0$  об отсутствии сигнала или о действии одного из  $M$  заданных сигналов, когда фактически присутствует неизвестный  $M+1$ -й сигнал;

$$G^i, \quad i = 0, \overline{M+1}, \quad G^i \cap G^j = \emptyset, \quad i \neq j$$

— области, на которые нераandomизированное решающее правило разделяет выборочное пространство.

По имеющейся априорной информации о сигналах и помехе можно оценить составляющие (2), (3) ошибки, а для учета составляющей (4) рационально ввести [5] объем собственной области  $G = \bigcup_{i=0}^M G^i$  помехи и смеси заданных сигналов с помехой. При этом показатель неэффективности  $\hat{k}_{нз}$  может быть определен соответствующим образом через составляющие (2), (3), а показатель объема  $k_V$  — через объем области  $G$ .

В предположении, что проектирование и реализация обнаружителя осуществляются на базе средств вычислительной техники, показатели затрат на проектирование и реализацию  $\hat{k}_{зп}$ ,  $\hat{k}_{зр}$  рационально ввести через динамическую меру сложности решения [5] — объемы памяти и вычислений, необходимые для реализации этих этапов.

*Построение эффективного решения по сокращенной совокупности показателей качества.* В соответствии с разработанной методологией построения решений многокритериальных задач распознавания сигналов [5] здесь также сначала необходимо найти решение, эффективное по сокращенной совокупности показателей качества, а далее на его основе построить решения, слабее эффективные по всей совокупности показателей (1).

Найдем эффективное решение по сокращенной совокупности показателей качества

$$\vec{k}_c(\vec{\alpha}) = (\hat{k}_{нз}, \hat{k}_V). \quad (5)$$

Можно показать, что векторный критерий (5) приводит к задаче

$$\begin{aligned} \max \sum_{l=0}^M P_l \int_{G^l} \hat{W}(\vec{\varepsilon} | H^l) d\vec{\varepsilon}; \\ \sum_{l=0}^M \int_{G^l} d\vec{\varepsilon} = V_{G_{\text{доп}}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $V_{G_{\text{доп}}}$  — ограничение на объем критической области;  $\hat{W}(\vec{\varepsilon} | H^l)$  — оценка плотности вероятности, используемой при принятии решения статистики  $\vec{\varepsilon}$  сигнала при условии, что справедлива гипотеза  $H^l$ .

Отсюда получается следующее правило:

$$\begin{aligned} H^l : \max_{l=0, \overline{M}} P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon} | H^l) \geq \lambda, \\ P_i \hat{W}(\vec{\varepsilon} | H^i) \geq P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon} | H^l), \quad l = \overline{0, M}, \quad l \neq i \end{aligned} \quad (7)$$

— принимается гипотеза  $H^0$  ( $i = 0$ ) об отсутствии сигнала или гипотеза  $H^i$  ( $i = \overline{1, M}$ ) о действии  $i$ -го заданного сигнала;

$$H^{M+1} : \max P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon} | H^l) < \lambda, \quad l = \overline{0, M}$$

— принимается гипотеза  $H^{M+1}$  о действии неизвестного сигнала из  $M + 1$ -го класса. Порог  $\lambda$  определяется при решении (6).

Обсудим особенности второго этапа решения задачи. Применение к задаче (1) метода последовательных уступок приводит к следующей задаче скалярной оптимизации

$$\begin{aligned} \hat{k}_{зр \text{ мин}} &= \underset{C \in M_d}{\text{МИН}} \hat{k}_{зр}; \quad \hat{k}_{нэ} \leq \hat{k}_{нэ \text{ мин}} + \Delta k_{нэ}; \\ \hat{k}_V &\leq \hat{k}_V \text{ мин} + \Delta k_V; \quad \hat{k}_{зп} \leq \hat{k}_{зп \text{ мин}} + \Delta k_{зп}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\hat{k}_{нэ \text{ мин}}$ ,  $\hat{k}_V \text{ мин}$ ,  $\hat{k}_{зп \text{ мин}}$  — минимальные значения показателей качества,  $\Delta k_{нэ}$ ,  $\Delta k_V$ ,  $\Delta k_{зп}$  — «уступки», характерные для решения задачи методом уступок;  $M_d$  — множество допустимых решений;  $C$  — некоторое решение.

Известно, что решение, удовлетворяющее (8), зависит от величины уступок, но, задав множество различных уступок, можно прийти к решению, которое получается при использовании и любого другого метода [6].

Согласно (8) решение задачи (1) ищем среди решений, в определенном смысле близких к эффективным по первым двум показателям качества, которые удовлетворяют заданным ограничениям на показатель затрат на проектирование. Полагая, что проектирование выполняется на ЭВМ, последнее ограничение можно задать эквивалентно как ограничение на общий объем вычислений на ЭВМ [5]. Указанные решения задаются на основе (7) при варьировании используемых моделей сигналов и изменении базисов представления сигналов и принятии решений не только по наблюдаемым реализациям сигналов, но и по некоторым удобным статистикам, найденным по выборкам сигналов. Такие меры позволяют существенно изменять затраты на реализацию устройства.

Приведем примеры решающих правил многоальтернативного обнаружения сигналов, полученные описанным образом.

Считая, что решение принимается по реализации гауссовского сигнала, т. е.  $\vec{e} = \vec{x}$ , из (7) получаем

$$\begin{aligned} H^l: & (\vec{x} - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^l) \leq \Lambda^l, \quad l = \overline{0, M}; \\ & (\vec{x} - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^l) - \hat{\lambda}_{nl} \leq (\vec{x} - \vec{\mu}^i)^{\text{tr}} (\hat{R}^i)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^i) - \hat{\lambda}_{ni}, \\ & \quad l = \overline{0, M}, \quad l \neq i, \quad i = \overline{0, M}, \\ H^{M+1}: & (\vec{x} - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^l) > \Lambda^l, \quad l = \overline{0, M}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Lambda^l = \ln \left\{ \frac{(2\pi)^{2N} |\hat{R}^l| \lambda^2}{P_l^2} \right\};$$

$\vec{\mu}^l$ ,  $\hat{R}^l$  — выборочное среднее и выборочная корреляционная матрица вектора  $\vec{X}^l$ .

Если решение принимается по выборке  $\vec{x}^{(v)}$  объема  $v$ , т. е.  $\vec{\varepsilon} = \vec{x}^{(v)}$ ,

$$\begin{aligned}
 H^l: \sum_{r=1}^v (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l) &\leq \Lambda^{(v)l}, \quad l = \overline{0, M}, \\
 \sum_{r=1}^v (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l) - \hat{\lambda}_{ni}^{(v)} &\leq \\
 \leq \sum_{r=1}^v (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l) - \hat{\lambda}_{ni}^{(v)}, \quad l = \overline{0, M}, \quad l \neq i; \\
 H^{M+1}: \sum_{r=1}^v (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \vec{\mu}^l) &> \Lambda^{(v)l}, \quad l = \overline{0, M}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Lambda^{(v)l} = \ln \left\{ \frac{\lambda^2 (2\pi)^{2vN} |\hat{R}^l|^v}{P_l^2} \right\};$

$N$  — размерность вектора  $\vec{X}$ ;  $\text{tr}$  — символ транспонирования.

Используя модели сигналов с одинаковыми средними векторами, находим [7]

$$\begin{aligned}
 H^l: \text{Sp} \{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0v}\} &\leq \Lambda^{(v)l}, \quad l = \overline{0, M}; \\
 \text{Sp} \{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0v}\} - \hat{\lambda}_{ni}^{(v)} &\leq \text{Sp} \{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0v}\} - \hat{\lambda}_{ni}^{(v)}, \quad l = \overline{0, M}, \quad l \neq i; \\
 H^{M+1}: \text{Sp} \{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0v}\} &> \Lambda^{(v)l}, \quad l = \overline{0, M}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где  $\hat{R}_0^l = \frac{1}{n_l} \sum_{r=1}^{n_l} (\vec{x}_r - \vec{\mu}_0)(\vec{x}_r - \vec{\mu}_0)^{\text{tr}}; \quad \hat{R}_{0v} = \sum_{r=1}^v (\vec{x}_r - \vec{\mu}_0)(\vec{x}_r - \vec{\mu}_0)^{\text{tr}};$

$$\vec{\mu}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{r=1}^{n_i} \vec{x}_r^i, \quad n = \sum_{i=0}^M n_i;$$

$\text{Sp}$  — след матрицы.

Основным источником задания практически произвольного множества решений является замена базиса представления сигналов и получения решающих правил типа (9) — (11) в этих базисах.

Решающие правила можно также строить, используя те или иные статистики сигналов. При этом в наиболее общем виде получаются правила типа (7), в которых используются функции правдоподобия соответствующих статистик. Однако для упрощения реализации обнаружителя можно применять более простые решающие правила, в которых и статистики и сами алгоритмы выбраны на эвристической основе. В частности, выбирая в качестве признаков совокупности координат энергетических спектров сигналов в некотором ортонор-

мированном базисе и применяя критерий минимума евклидова расстояния до эталона, получаем правило

$$H^l: \sum_{j=1}^N [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2 \leq \Lambda_G^l, \quad l = \overline{0, M}; \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^N [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2 \leq \sum_{j=1}^N [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2, \quad l = \overline{0, M}, \quad l \neq l;$$

$$H^{M+1}: \sum_{j=1}^M [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2 > \Lambda_G^l, \quad l = \overline{0, M}.$$

Здесь

$$\hat{G}_j^l = \frac{1}{n_l} \sum_{r=1}^{n_l} |c_{jr} - \hat{\mu}_{jc}^l|^2$$

— оценка  $j$ -й координаты энергетического спектра  $l$ -го сигнала, найденная по обучающей выборке объема  $n_l$ ;

$$\hat{G}_j = \frac{1}{v} \sum_{r=1}^v |c_{jr} - \hat{\mu}_{jc}|^2$$

— оценка  $j$ -й координаты энергетического спектра принятого сигнала

по выборке объема  $v$ ;  $v \ll n_i$ ;  $\hat{\mu}_{jc} = \frac{1}{v} \sum_{r=1}^v e_{jr}$ ;  $\hat{\mu}_{jc}^l = \frac{1}{n_l} \sum_{r=1}^{n_l} c_{jr}^l$ ;  $c_{jr}$  —  $j$ -я

координата представления  $r$ -й реализации сигнала в выбранном базисе.

Применимы и другие правила выбора решений, но в соответствии с особенностями задачи многоальтернативного обнаружения сигналов они характеризуются двухэтапностью применяемых процедур: сначала в результате сравнения значения используемой статистики с некоторым порогом принимается решение о том, какой сигнал действует (заданный или неизвестный), а далее по тем или иным признакам принимается решение о различии заданных сигналов.

Приведенные примеры иллюстрируют особенности правил выбора решений из формируемого множества полностью описанных решений [5]. Число таких правил, как отмечено, определяется из условия, чтобы общий объем вычислений на этапе проектирования не превышал допустимой величины. В критериальном пространстве [5] из этого множества по совокупности показателей ( $k_{нз}$ ,  $k_{зп}$ ) стандартными методами (например, методом прямоугольников) выделяются нехудшие решения. Их совокупность и является искомым множеством решений рассматриваемой многокритериальной задачи обнаружения. Для нахождения таких решений существенно используется моделирование на ЭВМ и заданная обучающая выборка сигналов. При наличии дополнительной априорной информации об относительной важности част-

ных показателей  $\hat{k}_{\text{нз}}$  и  $\hat{k}_{\text{зр}}$  можно ввести результирующий показатель, оптимизируя который, из найденного множества решений алгоритмически получаем единственное [5].

Список литературы: 1. Андерсон Т. В. Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963. 500 с. 2. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М., 1984. 440 с. 3. Сенин А. Г. Распознавание случайных сигналов. Новосибирск, 1974. 76 с. 4. Омельченко В. А. Основы спектральной теории распознавания сигналов. Х., 1983. 159 с. 5. Омельченко В. А. Многокритериальные задачи распознавания радиосигналов. Ч.2. Распознавание сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности // Отбор и передача информации. К., 1987. С. 84—85. 6. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982. 254 с. 7. Омельченко В. А., Омельченко А. В., Колесников О. А. Распознавание сигналов по выборкам различного объема. Сообщение 1 // Радиотехника. 1985. Вып. 73. С. 3—9.

Поступила в редколлегию 10.02.88

УДК 621.391

И. Н. ПРЕСНЯКОВ, канд. техн. наук, Ю. В. АФАНАСЬЕВ

### МЕТОДЫ КОСВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При оценивании марковских последовательностей, наблюдаемых на фоне шумов измерения, возможны прямой [1; 2] и косвенный [3] подходы, причем в ряде случаев косвенный метод нелинейной фильтрации имеет преимущества по апостериорной дисперсии оценки и условиям сходимости. Известные алгоритмы косвенной фильтрации [3; 4] ориентированы лишь на скалярные марковские последовательности и не охватывают те практически важные задачи, которые связаны с фильтрацией на фоне небелого шума измерения, фильтрацией марковских последовательностей при наличии сопутствующих случайных (марковских) параметров, оценкой состояния систем, описываемых дифференциальными уравнениями выше первого порядка и др.

Предложены три алгоритма различного приближения для косвенного оценивания векторных марковских последовательностей. На основе одного из них решается практическая задача фильтрации марковской фазы квазигармонического колебания с флюктуирующей амплитудой. Анализируется характер нелинейности уравнения наблюдения, при котором косвенные алгоритмы обеспечивают наибольший выигрыш по апостериорной дисперсии оценки. Проводится сравнение с алгоритмом расширенного фильтра Калмана.

*Алгоритмы косвенной фильтрации.* Пусть дискретные модели состояния и наблюдения определяются следующими соотношениями:

$$x_n = F(x_{n-1}) + \xi_n; \quad (1)$$

$$y_n = H(x_n) + \eta_n. \quad (2)$$

Здесь  $x_n$  —  $N$ -мерный вектор состояний;  $F(x_{n-1})$  —  $N$ -мерная векторнозначная функция;  $\xi_n$  —  $N$ -мерный вектор шума состояния;  $y_n$  —  $K$ -мерный вектор наблюдения;  $H(x_n)$  —  $K$ -мерная векторнозначная функция,  $K \leq N$ ;  $\eta_n$  —  $K$ -мерный вектор шума измерения.

$\xi_n, \eta_n$  — независимые нормальные случайные последовательности типа белого шума с параметрами

$$E\{\xi_i \xi_j^T\} = V_1 \delta(i - j); \quad E\{\eta_i \eta_j^T\} = V_2 \delta(i - j),$$

где  $E\{\cdot\}$  — символ операции математического ожидания;  $\delta(i - j)$  — символ Кронекера;  $V_1, V_2$  — положительно определенные симметрические матрицы ковариаций размером  $N \times N$  и  $K \times K$  соответственно. Пусть также известна априорная плотность вероятности вектора оцениваемых параметров  $p(x_0)$ .

Получим оценку  $\hat{H}_n$  косвенного параметра  $H_n = H(x_n)$ , оптимальную по критерию максимума апостериорной плотности вероятности  $p(H_n | Y_n)$ , где  $Y_n = \{y_i, i = \overline{1, n}\}$  — последовательность измеряемых векторов.

Предположим вначале, что размерности векторов состояния и наблюдения равны:  $N=K$  и ограничимся функциями  $F(\cdot)$  и  $H(\cdot)$ , которые могут быть разложены в ряд Тейлора. Предположим далее, что в области изменения значений последовательности  $X_n = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$  существует функция, обратная  $H(\cdot)$ :  $x_n = G(H_n)$ . Тогда, переходя к косвенной модели состояния и наблюдения

$$H_n = H[F(x_{n-1}) + \xi_n]; \quad y_n = H_n + \eta_n$$

и применяя методику [4], записываем следующие уравнения для текущей косвенной оценки  $\hat{H}_n$  и матрицы ее апостериорной дисперсии  $V_{n,H}$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}_n = y_n + V_2 \left[ \frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right]^T V_1^{-1} \{R(\hat{H}_n) - G(\hat{H}_n)\} + \\ + V_2 \left[ \frac{d}{d\hat{H}_n} \ln \left| \det \left( \frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right) \right| \right]^T; \end{aligned} \quad (3)$$

$$V_{n,H} = E[\hat{H}_n \hat{H}_n^T] - E[\hat{H}_n] E[\hat{H}_n^T], \quad (4)$$

где

$$R(\hat{H}_n) = \frac{\int F[G(H_{n-1})] p(H_{n-1} | Y_{n-1}) p(\hat{H}_n | H_{n-1}) \prod_{i=1}^k dh_{n-1,i}}{\int p(H_{n-1} | Y_{n-1}) p(\hat{H}_n | H_{n-1}) \prod_{i=1}^k dh_{n-1,i}}; \quad (5)$$

$h_{n-1,i}$  — элементы вектора  $H_{n-1}$ , а математическое ожидание в (4) вычисляется по апостериорной плотности  $p(\hat{H}_n | Y_n)$ :

$$\begin{aligned} p(\hat{H}_n | Y_n) = C p(y_n | \hat{H}_n) \int p(\hat{H}_n | H_{n-1}) \times \\ \times p(H_{n-1} | Y_{n-1}) \prod_{i=1}^k dh_{n-1,i}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$p(y_n | \hat{H}_n) = N(\hat{H}_n; V_2); \quad (7)$$

$$p(\hat{H}_n | H_{n-1}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} (\det V_1)^{-\frac{1}{2}} \left| \det \left( \frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right) \right| \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [G(\hat{H}_n) - F(G(H_{n-1}))]^T V_1^{-1} [G(\hat{H}_n) - F(G(H_{n-1}))] \right\}. \quad (8)$$

Здесь плотность вероятности  $p(H_{n-1} | Y_{n-1})$  определяется на предыдущем  $(n-1)$ -м шаге, а постоянная  $C$  может быть найдена из условия нормировки.

Как и при прямом методе фильтрации полный алгоритм (3)—(8) получается сложным, а решение уравнения косвенной фильтрации (3) — трудоемким. Поэтому в практических приложениях приходится прибегать к различным аппроксимациям. Так, если в апостериорной плотности (6) положить  $p(H_{n-1} | Y_{n-1}) = N(H_{n-1}; V_{n-1,H})$ , а в переходной плотности (8) разложить функцию  $F[G(H_{n-1})]$  в ряд Тейлора вблизи точки  $\hat{H}_{n-1}$  с сохранением только линейных членов (модифицированный метод гауссовской аппроксимации), получим алгоритм

$$\hat{H}_n = y_n + V_2 \left[ \frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right]^T V^{-1} \{ F[G(\hat{H}_{n-1})] - G(\hat{H}_n) \}; \quad (9)$$

$$V_{n,H} = E[\hat{H}_n \hat{H}_n^T] - E[\hat{H}_n] E[\hat{H}_n^T], \quad (10)$$

где  $V = V_1 + Z_H(\hat{H}_{n-1}) V_{n-1,H} [Z_H(\hat{H}_{n-1})]^T; \quad (11)$

$$Z[\hat{H}_{n-1}] \triangleq F[G(\hat{H}_{n-1})]; \quad (12)$$

$$p(\hat{H}_n | Y_n) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_n - \hat{H}_n)^T V_2^{-1} (y_n - \hat{H}_n) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [G(\hat{H}_n) - Z(\hat{H}_{n-1})]^T V^{-1} [G(\hat{H}_n) - Z(\hat{H}_{n-1})] \right\}. \quad (13)$$

Структура приближенного уравнения (9) совпадает со структурой полного алгоритма (3), за исключением последнего слагаемого, отсутствие которого эквивалентно разложению функции  $G(\hat{H}_n)$ , стоящей в определителе под знаком производной, в ряд Тейлора с сохранением только линейных членов. Результаты моделирования показали, что добавление точного слагаемого  $V_2 \left[ \frac{d}{d\hat{H}_n} \ln \left| \det \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \left( \frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right) \right| \right]^T$  в алгоритм (9) ухудшает качество его работы, вплоть до расхождения оценки. Объясняется это тем, что здесь погрешность приближенного нахождения интегрального выражения (5) компенсируется приближенностью вычисления функции  $G(\hat{H}_n)$ . Наконец, аппроксимация обеих плотностей  $p(H_{n-1} | Y_{n-1})$  и  $p(H_n | H_{n-1})$  нормальным законом приводит к алгоритму, который по вычислительной сложности примерно соответствует алгоритму расширенного фильтра Калмана:

$$\hat{H}_n = V_g (V_2 + V_g)^{-1} y_n + V_2 (V_2 + V_g)^{-1} \psi(\hat{H}_{n-1}); \quad (14)$$

$$V_{n,H} = \{ [G_H(\hat{H}_n)]^T V^{-1} G_H(\hat{H}_n) + V_2^{-1} \}^{-1}, \quad (15)$$

где

$$\psi(\hat{H}_{n-1}) \equiv \psi_{n-1} \triangleq H \{F[G(\hat{H}_{n-1})]\}; \quad (16)$$

$$V_g = [G'_\psi(\psi_{n-1})]^{-1} V [G'_\psi(\psi_{n-1})]^{-\tau}, \quad (17)$$

а остальные обозначения соответствуют принятым в предыдущем алгоритме.

Приведенные алгоритмы позволяют вычислить косвенную оценку  $\hat{H}_n$ . Конечной целью фильтрации является, однако, получение оценки текущего значения  $x_n$  последовательности  $X_n$ . В соответствии с основным принципом косвенного нелинейного оценивания [3] во всех трех алгоритмах оценка  $\hat{x}_n$  определяется нелинейным преобразованием  $x_n = G(\hat{H}_n)$  (18). При этом матрица ковариаций оценки

$$V_{n,x} = E[G(\hat{H}_n)G^{\tau}(\hat{H}_n)] - E[G(\hat{H}_n)]E[G^{\tau}(\hat{H}_n)], \quad (19)$$

причем для первых двух алгоритмов математическое ожидание находится по апостериорной плотности (6) и (13), а для алгоритма (14) — (17) — по апостериорной плотности  $p(\hat{H}_n | Y_n) = N(\hat{H}_n, V_{n,H})$ .

Разлагая в (19) функцию  $G(\hat{H}_n)$  в ряд с сохранением линейных членов, можно для всех трех алгоритмов получить более простую приближенную формулу

$$V_{n,x} \approx G'_H(\hat{H}_n) V_{n,H} [G'_H(\hat{H}_n)]^{\tau}. \quad (20)$$

Для последнего алгоритма из (15), (20) имеем

$$V_{n,x} = \{V^{-1} + [G'_H(\hat{H}_n)]^{-\tau} V_2^{-1} [G'_H(\hat{H}_n)]^{-1}\}^{-1}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V &= V_1 + Z'_H(\hat{H}_{n-1}) V_{n-1,H} [Z'_H(\hat{H}_{n-1})]^{\tau} = \\ &= V_1 + F'_x(x_{n-1}) V_{n-1,x} [F'_x(x_{n-1})]^{\tau}. \end{aligned} \quad (22)$$

Следует иметь в виду, что оптимальность оценки (18) в смысле максимума апостериорной плотности достигается лишь при несобственном равномерном априорном распределении  $p(H_n)$  параметра  $H_n$  [3]. В этом случае апостериорная плотность совпадает с функцией правдоподобия  $p(H_n | Y_n) = Cp(Y_n | H_n)$ , а оценка максимума правдоподобия инвариантна по отношению к нелинейному преобразованию  $G(\cdot)$ . Тогда начальные условия запишутся в виде

$$\hat{H}_1 = y_1; \hat{x}_1 = G(y_1); V_{1,H} = V_2; V_{1,x} = G'_y(y_1) V_2 [G'_y(y_1)]^{\tau}. \quad (23)$$

При необходимости можно получить оценку  $\hat{x}_n$ , оптимальную по критерию максимума апостериорной плотности вероятности и при произвольном априорном распределении  $p(H_n)$ . Для этого достаточно воспользоваться формулой  $p_x(x_n) = H'_x(x_n) p_H[H(x_n)]$  и максимизировать плотность  $p_x(x_n)$ . Однако эта операция повлечет за собой дополнительные вычислительные затраты, которые могут оказаться сравнимыми с затратами на весь алгоритм (14) — (17). Исключение составляет скалярный случай, когда соответствующее уравнение часто имеет аналитическое решение.

Заметим, что скалярный вариант алгоритма (14) — (17), (18), (20), (21) — (23) отличается от предложенного в работе [3] лишь заменой

при вычислении апостериорной дисперсии  $H'_F [F(\hat{x}_{n-1})]$  на  $H'_x(\hat{x}_n)$ . Так как  $\hat{x}_n$  в среднем ближе к  $x_n$ , чем экстраполированная оценка  $F(\hat{x}_{n-1})$ , то можно ожидать некоторого улучшения работы алгоритма.

Для сравнения приведем матрицу апостериорной дисперсии расширенного фильтра Калмана [2]

$$V_n = \{V^{-1} + [H'_F(F(\hat{x}_{n-1}))]^T V_2^{-1} H'_F(F(\hat{x}_{n-1}))\}^{-1}, \quad (24)$$

где  $V$  находится в соответствии с (22). Сопоставление (21) с (24) показывает, что при одинаковых начальных условиях  $\hat{x}_{n-1}$ ,  $V_{n-1,x}$  отличие заключается в слагаемых  $[G'_H(\hat{H}_n)]^{-1} V_2^{-1} [G'_H(\hat{H}_n)]^{-1}$  и  $[H'_F \times (F(\hat{x}_{n-1}))]^T V_2^{-1} H'_F(F(\hat{x}_{n-1}))$ . В частности, если матрица  $G'_H(\cdot)$  — диагональна, то  $[G'_H(H(\hat{x}_{n-1}))]^{-1} = H'_x(\hat{x}_{n-1})$  и выигрыш по дисперсии оценки  $i$ -й компоненты  $x_{i,n}$  ( $i = \overline{1, N}$ ) вектора состояния  $x_n$  определяется отношением

$$\lambda_i = \left\{ \frac{h'_{ii}(x_{i,n})}{h'_{ii}(x_{i,n-1})} \right\}^2. \quad (25)$$

Здесь  $h'_{ii}$ ,  $f_i$  — элементы матрицы  $H'_x(\cdot)$  и вектора  $F(\cdot)$ . Если  $\lambda_i > 1$  эффективность косвенной фильтрации по соответствующей компоненте  $x_{i,n}$  выше.

Асимптотически при  $V_1 = 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_i \rightarrow 1$ , как и в одномерном случае, для нефлуктуирующего сигнала эффективность обоих фильтров одинакова. Наибольшие различия между числителем и знаменателем (25) достигаются в том случае, когда экстраполированное значение  $f_i(\hat{x}_{i,n-1})$  существенно отличается от оценки  $x_{i,n}$ , что следует ожидать при больших дисперсиях — диагональных элементах матрицы шума состояния  $V_1$ . При этом знак неравенства  $\lambda_i \geq 1$  определяется характером нелинейности функции  $H(\cdot)$ . Несложно видеть, что  $\lambda_i > 1$ , когда  $h''_{ii} > 0$  и  $\lambda_i < 1$  — в противном случае. Чтобы иметь выигрыш в случае функции  $G(\cdot)$  с противоположным типом нелинейности, требуются дополнительные меры [3].

Пусть теперь векторы состояния и наблюдения имеют различную размерность, т. е.  $N \neq K$ . Особенно часто встречается на практике скалярное наблюдение многомерного марковского процесса:  $N > 1$ ,  $K = 1$ . При  $N \neq K$  в общем случае обратная функция  $G(\cdot)$  неоднозначна. Однако косвенная фильтрация может выполняться и при этих условиях. Действительно, для получения однозначной векторной функции  $G(\cdot)$ , обратной  $H(\cdot)$ , достаточно дополнить систему

$$\begin{aligned} h_{n,1} &= h_1(x_n); \\ h_{n,2} &= h_2(x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ h_{n,K} &= h_K(x_n) \end{aligned} \quad (26)$$

недостающими  $N - K$  уравнениями. При оценивании вектора постоянных параметров  $x_n = x_{n-1}$  ( $V_1 \equiv 0$ ) для этого следует взять  $M$  последовательных наблюдений  $y_n \dots y_{n+M}$  таким образом, чтобы выполнялось

неравенство  $M \times K \geq N$ . В более общем случае, когда  $V_1 \neq 0$ , функцию  $G(\cdot)$  можно найти приближенно, дополняя систему (26)  $N-K$  уравнениями относительно экстраполированного значения оцениваемого процесса  $x_{n+1}^3 = F(x_n)$ :

$$\begin{aligned} h_{n,1} &= h_1(x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ h_{n,K} &= h_K(x_n); \\ h_{n+1,1} &\approx h_1(x_{n+1}^3); \\ &\dots \dots \dots \\ h_{n+1,N-K} &\approx h_{N-K}(x_{n+1}^3). \end{aligned} \quad (27)$$

Решение системы (27) относительно  $h_{ij}$  представляет собой искомую функцию  $G(\cdot)$ .

**Фильтрация квазигармонического колебания.** Рассмотрим пример использования алгоритма (14)—(17), (18), (20), (21)—(23). Пусть необходимо получить оценку нормальной марковской фазы квазигармонического сигнала с флюктуирующей амплитудой, плотность вероятности которой может быть описана  $m$ -распределением (Накагами)

$$\rho(a) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Phi}\right)^m a^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Phi} a^2}, \quad (28)$$

где  $m$ ;  $\Phi$  — параметры  $m$ -распределения [1].

Очевидно, в дискретном времени флюктуации фазы описываются разностным уравнением  $\varphi_n + R_\varphi \varphi_{n-1} + \xi_{\varphi,n}$  (29). Здесь  $E\{\xi_{\varphi,t} \xi_{\varphi,j}\} = \sigma_{\xi_\varphi}^2 \delta(i-j)$ ;  $|R_\varphi| < 1$  — коэффициент корреляции между  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n-1}$ . Априорная дисперсия фазы в установившемся режиме  $\sigma_\varphi^2 = \sigma_{\xi_\varphi}^2 / (1 - R_\varphi^2)$ .

Для синтеза уравнения, соответствующего (25), необходимо привлечь дополнительные априорные сведения о процессе  $a(t)$ . Пусть известно, что  $a(t)$  — стационарный односвязный марковский процесс с экспоненциальной функцией корреляции (в частности, таким процессом во многих случаях являются релеевские замирания,  $m=1$ ). Тогда динамика процесса  $a(t)$  выражается стохастическим дифференциальным уравнением  $\dot{a}(t) = f(a) + n(t)$  (30), где  $f(\cdot)$  — некоторая нелинейная функция;  $n(t)$  — нормальный белый шум с нулевым средним и спектральной плотностью  $N_a/2$ .

Полагая, что плотность вероятности (28) является стационарным решением соответствующего (30) уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, находим функцию  $f(\cdot)$ :

$$f(a) = \frac{N_a}{4} \frac{2m-1}{a} - \frac{N_a}{2} \frac{m}{\Phi} a.$$

Перейдя обычным способом к дискретному времени, имеем разностное уравнение для огибающей

$$a_n = \frac{\alpha}{a_{n-1}} + \beta a_{n-1} + \xi_{a,n}. \quad (31)$$

Здесь  $\alpha = 0,25 N_a \tau_d (2m - 1)$ ;  $\beta = 1 - 0,5 N_a \tau_d m / \Phi$ ;  $\xi_{a,n}$  — нормальная случайная последовательность типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_{\xi,a}^2 = 0,5 N_a \tau_d$ ;  $\tau_d$  — интервал дискретизации.

Можно показать, что для (31) дисперсия в установленном режиме  $\sigma_a^2 = \Phi \left\{ 1 - \frac{\Gamma^2(m+0,5)}{m\Gamma^2(m)} \right\}$ , а коэффициент корреляции между  $a_n$  и  $a_{n-1}$   $R_a = \exp(-m\sigma_{\xi,a}^2/\Phi)$ .

Будем вести фильтрацию в двух квадратурных каналах. При этом окончательно модели состояния и наблюдения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi_n &= R_\varphi \varphi_{n-1} + \xi_{\varphi,n}; \\ a_n &= \alpha/a_{n-1} + \beta a_{n-1} + \xi_{a,n}; \\ y_n^- &= a_n \sin(\omega n + \varphi_n) + \eta_n^-; \\ y_n^+ &= a_n \cos(\omega n + \varphi_n) + \eta_n^+, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\omega = 2\pi\tau_d/T$ ;  $T$  — период колебаний;  $E\{\eta_i^- \eta_j^-\} = (\sigma_\eta^-)^2 \delta(i-j)$ ;  $E\{\eta_i^+ \eta_j^+\} = (\sigma_\eta^+)^2 \delta(i-j)$ .

Привлечение дополнительного квадратурного канала  $y_n^+$  необходимо здесь по следующим причинам: размерность вектора наблюдения  $y_n = \{y_n^-, y_n^+\}^T$  приводится к размерности вектора состояния  $x_n = \{a_n, \varphi_n\}^T$ ; исключается неоднозначность обратной функции  $G(\cdot)$  при случайных скачках фазы, превышающих  $\pm 90^\circ$ ; появляется возможность использования в качестве компоненты  $G(\cdot)$  функции арктангенс, которая имеет желательный вид кривизны.

Обозначим  $\theta_n = \varphi_n + \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n = \omega n - 2\pi l$  — неинформативный набег фазы;  $l = \lfloor \omega n / 2\pi \rfloor$ ; квадратные скобки обозначают целую часть. Тогда векторную функцию  $G(\cdot)$ , соответствующую наблюдениям  $y_n^-$  и  $y_n^+$ , можно представить в виде

$$G(\hat{H}_n) = \begin{bmatrix} g^-(\hat{h}_n^-, \hat{h}_n^+) \\ g^+(\hat{h}_n^-, \hat{h}_n^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(\hat{h}_n^-)^2 + (\hat{h}_n^+)^2} \\ \text{arctg}(\hat{h}_n^-/\hat{h}_n^+) - \varepsilon_n + i\pi \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где  $i = 1$ , если  $\hat{h}_n^+ < 0$ ,  $i = 2$ , если при  $\varepsilon_n > \pi$   $\hat{h}_n^- > 0$  и  $\hat{h}_n^+ > 0$  или  $\hat{h}_n^- < 0$  и  $\hat{h}_n^+ > 0$ . Иначе  $i = 0$ .

В соответствии с (14) — (17), (32), (33) алгоритм косвенной оптимальной фильтрации огибающей  $a_n$  и фазы  $\varphi_n$  определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{H}_n &= V_g (V_2 + V_g)^{-1} y_n + V_2 (V_2 + V_g)^{-1} \psi(\hat{x}_{n-1}); \\ V_{n,H} &= \{ [G_H^+(\hat{H}_n)]^T V^{-1} G_H^-(\hat{H}_n) + V_2^{-1} \}^{-1}; \hat{x}_n = G(\hat{H}_n); \\ V_{n,x} &= G_H^-(\hat{H}_n) V_{n,H} [G_H^+(\hat{H}_n)]^T, \end{aligned}$$

где

$$V_g = [G_\psi(\psi_{n-1})]^{-1} V [G_\psi(\psi_{n-1})]^{-T}; V = V_1 + F_x^+(\hat{x}_{n-1}) V_{n-1,x} [F_x^+(\hat{x}_{n-1})]^T;$$

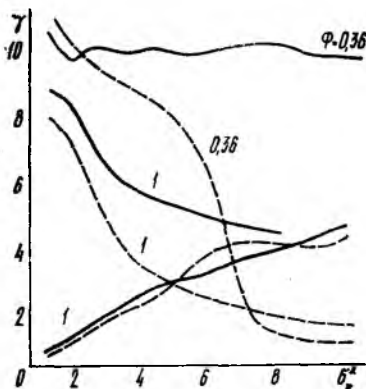
$$V_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi,a}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi,\varphi}^2 \end{bmatrix}; V_2 = \begin{bmatrix} (\sigma_\eta^-)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_\eta^+)^2 \end{bmatrix};$$

$$\psi(\hat{x}_{n-1}) \triangleq \psi_{n-1} = \begin{bmatrix} \psi_{n-1}^- \\ \psi_{n-1}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha/\hat{a}_{n-1} + \beta\hat{a}_{n-1}) \sin(\omega n + R_\Phi \hat{\varphi}_{n-1}) \\ (\alpha/\hat{a}_{n-1} + \beta\hat{a}_{n-1}) \cos(\omega n + R_\Phi \hat{\varphi}_{n-1}) \end{bmatrix};$$

$$G_{\hat{H}}(\hat{H}_n) = \frac{1}{\hat{a}_n} \begin{bmatrix} \hat{h}_n^- & \hat{h}_n^\perp \\ \hat{h}_n^\perp/\hat{a}_n & -\hat{h}_n^-/\hat{a}_n \end{bmatrix};$$

$$G_\psi^\perp(\psi_{n-1}) = \begin{bmatrix} \psi_{n-1}^-/\sqrt{(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2} & \psi_{n-1}^\perp/\sqrt{(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2} \\ \psi_{n-1}^\perp/[(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2] & -\psi_{n-1}^-/[(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2] \end{bmatrix};$$

$$F_x^\perp(\hat{x}_{n-1}) = \begin{bmatrix} -\alpha/\hat{a}_{n-1} + \beta & 0 \\ 0 & R_\Phi \end{bmatrix}.$$



Некоторые результаты моделирования полученного алгоритма приведены на рисунке. Параметры уравнений состояния и наблюдения, кроме указанных на чертеже, для всех графиков приняты следующие:  $R_a(\tau_n) = 0,9$ ;  $R_\Phi(\tau_n) = 0,96$ ;  $\sigma_\Phi^2 = 0,5 \text{ рад}^2$ ;  $m = 2$ ;  $\omega = 5$ . Параметр  $m = 2$  задает распределение амплитуды по закону Релея — Райса. Сплошные кривые соответствуют косвенному фильтру, пунктирные — расширенному фильтру Калмана. Начальные условия выбраны одинаковыми в соответствии с (23). По оси абсцисс от-

ложена дисперсия шума наблюдения  $(\sigma_\eta^-)^2 = (\sigma_\eta^\perp)^2$ ; по оси ординат — относительные величины

$$\gamma_\Phi = E \{ (\arctg(y_n^-/y_n^\perp) + t\pi - \varepsilon_n - \varphi_n)^2 \} / E \{ (\hat{\varphi}_n - \varphi_n)^2 \};$$

$$\gamma_a = E \{ (\sqrt{(y_n^-)^2 + (y_n^\perp)^2} - a_n)^2 \} / E \{ (\hat{a}_n - a_n)^2 \},$$

характеризующие выигрыш от применения фильтрации. Возрастающие кривые относятся к огибающей, остальные — к фазе. Результаты моделирования подтверждают, что предложенный алгоритм для рассмотренных характеристик оцениваемых процессов имеет более высокую эффективность.

**Список литературы:** 1. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, М., 1975. 704 с. 2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении, М., 1976. 495 с. 3. Шлома А. М. Косвенный метод нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника и электрон. 1986. Т. 31, № 7. С. 1304—1310. 4. Пресняков И. Н., Афанасьев Ю. В. Обобщенный алгоритм косвенной нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника. 1989. Вып. 89. С. 76—78.

Поступила в редколлегию 22.01.88

В. Н. БЫКОВ, канд. техн. наук, А. С. ВИЛЬЧИНСКИЙ,  
В. А. КУЛАКОВ, А. С. СУЛТАНОВ, канд. техн. наук

## ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА УПЛОТНЕНИЯ КАНАЛОВ С ШУМОВЫМИ СИГНАЛАМИ

Известные методы линейного уплотнения и разделения каналов основаны на использовании в качестве канальных сигналов ансамблей ортогональных функций [1]. При временном уплотнении и разделении каналов (ВРК) — это последовательность неперекрывающихся между собой во времени импульсов; частотном уплотнении и разделении каналов (ЧРК) — любые функции, имеющие неперекрывающиеся между собой частотные спектры; уплотнении и разделении каналов по форме сигналов (РКФ) — ортогональные системы тригонометрических функций, функций Радемахера — Уолша, полиномы Лежандра, Чебышева и др. Для реализации указанных методов уплотнения каналов используются детерминированные канальные сигналы, у которых закон изменения амплитуды, частоты и фазы во времени известен.

Существует другой класс сигналов. Это так называемые широкополосные шумовые сигналы, формируемые путем модуляции по закону передаваемого сообщения широкополосной шумовой несущей по одному из параметров (амплитуда, фаза и т. п.) [2; 3]. По отношению к шумовым сигналам могут применяться все перечисленные методы уплотнения каналов, однако практическая реализация метода ЧРК шумовых сигналов с большой шириной спектра затруднена. Метод ВРК не всегда удобен вследствие дефицита времени, отводимого на передачу информации по радиолинии.

Представляет интерес метод уплотнения и разделения каналов, подобный линейному РКФ, заключающийся в том, что квазиортогональность канальных шумовых сигналов достигается путем создания некоррелированных несущих колебаний отдельных каналов, каждое из которых представляет собой стационарный случайный процесс.

Поясним сущность данного метода уплотнения каналов. Структурная схема радиолинии с шумовыми сигналами приведена на рис. 1. На передающей (ПРД) стороне радиолинии в результате сложения сигналов  $n$  формирующих каналов образуется групповой сигнал с периодической корреляционной функцией, имеющей  $n$  пиков (рис. 2), а в приемном (ПРМ) устройстве с помощью  $n$  автокорреляторов, настроенных на соответствующие пики корреляционной функции, осуществляется выделение отдельно каждого из  $n$  канальных сигналов. Сигнал на выходе каждого из уплотняемых каналов представляет собой сумму задержанной и незадержанной шумовых компонент, одна из которых промодулирована по закону

передаваемого сообщения. Сигнал на выходе ПРД определим следующим образом:

$$u_{\text{ПРД}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n [u_{c i}(t) + u_{c i}(t - \tau_i)], \quad (1)$$

где  $u_{c i}$  — модулированный сигнал на выходе канального ПРД;  $1/\sqrt{2}$  — множитель, характеризующий деление шумового сигнала по мощности на два.

Отличие интервалов задержки соседних каналов составляет величину, большую времени корреляции шумового сигнала. Длительность задержки каждого канала также выбирается из этого условия:

$$|\tau_i - \tau_{i-1}| \geq (2-3)\tau_k = \frac{(2-3)}{2\Delta f_c}; \quad \tau_i \geq \frac{(2-3)}{2\Delta f_c} \quad (2)$$

( $2\Delta f_c$  — полоса спектра шумового сигнала).

В линейной части приемника (ЛЧП) к сигналу добавляются внутренние шумы ПРМ, затем сигнал делится по мощности на два и на  $n$ . Запишем сигналы на двух входах каждого коррелятора:

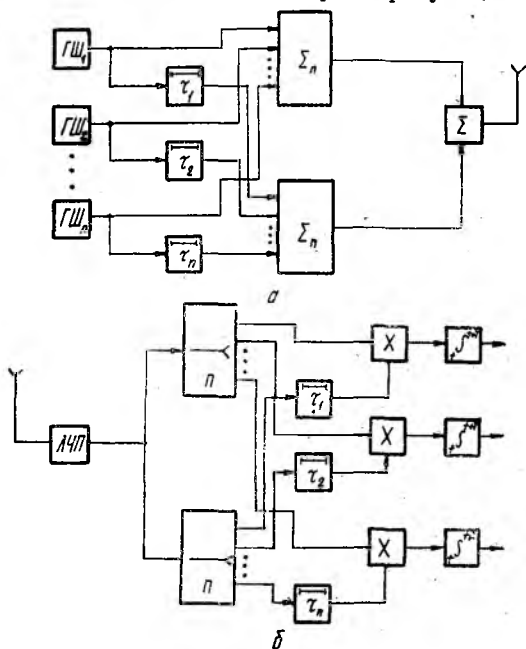


Рис. 1

$$u_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [u_{c i}(t) + u_{c i}(t - \tau_i)] + \frac{1}{\sqrt{2n}} u_{ш}(t);$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [u_{c i}(t - \tau_j) + u_{c i}(t - \tau_i - \tau_j)] + \frac{1}{\sqrt{2n}} u_{ш}(t - \tau_j). \quad (3)$$

Здесь  $\tau_j$  — интервал задержки  $j$ -го канала ПРМ. Учитывая, что  $\tau_i = \tau_j$ , на выходе  $j$ -го канала ПРМ в результате статистического усреднения получаем сигнальную составляющую, пропорциональную средней мощности соответствующего канального сигнала ПРД:

$$\bar{u}_{\text{вых } j} = \frac{1}{4nT} \int_t^{t+T} u_{c j}^2(t - \tau_j) dt = \frac{1}{4n} \bar{P}_{c i}, \quad (4)$$

где  $\bar{P}_{c i}$  — средняя мощность сигнала передатчика  $i$ -го канала.

Пользуясь известным выражением для отношения сигнал-шум на выходе ПРМ [4] и производя соответствующие преобразования, находим шумовую компоненту на выходе любого из каналов ПРМ. Окончательное выражение для отношения сигнал-шум  $q_{\text{вых}}$  на выходе  $j$ -го канала получим в виде ✓

$$q_{\text{вых}} = \frac{1}{2\sqrt{2n}(1+q_{\text{ш}})} \sqrt{\frac{\Delta f_c}{\Delta F}}, \quad (5)$$

где  $q_{\text{ш}}$  — отношение шумов приемного устройства и внешних широкополосных помех к сигналу на входе ПРМ;  $\Delta F$  — полоса передаваемой информации, обратно пропорциональная времени интегрирования (накопления) сигнала в ПРМ  $T$ .

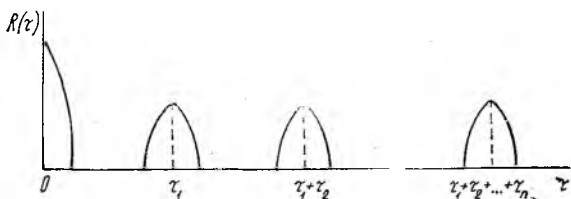


Рис. 2

Соотношение (5) позволяет оценить помехоустойчивость радиолинии с шумовыми сигналами по уровню несущего колебания без учета вида передаваемой информации. При передаче по соседним каналам многоканальной радиолинии речевых сообщений и недостаточной их декорреляции в  $j$ -м канале они будут приняты в виде сигнала, т. е. будут служить «разборчивой» помехой, которая в большей степени, чем флюктуационный шум, приводит к снижению помехоустойчивости приема. С целью оценки межканальных помех выражение (5) уточнено с учетом плавно изменяющейся относительной отстройки соседних канальных линий задержки  $\Delta\tau$  и может быть представлено как

$$q_{\text{вых}} = \frac{[1 - m_j(t)] \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i \rho_i(\Delta\tau) m_i(t)}{1 - m_j(t)} \right]}{2\sqrt{2n} \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta f_c} \left[ (1 + q_{\text{ш}})^2 + \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n-1} q_i \rho_i(\Delta\tau) (1 + 2\Delta f_c \Delta\tau_i) \right]}}, \quad (6)$$

где  $m_j(t)$ ,  $m_i(t)$  — модулирующая функция  $j$ -го и соседнего  $i$ -го каналов;  $\rho_i(\Delta\tau)$  — коэффициент корреляции сигналов соседних  $j$ -го и  $i$ -го каналов;

$$q_i = \frac{\bar{P}_{c i}}{\bar{P}_{c j}}, \quad \bar{P}_{c. \text{вх}} = n \bar{P}_{c j}.$$

Второе слагаемое под корнем в квадратных скобках, обусловленное вкладом в шумовую компоненту составляющих вида  $\rho_i(0)\rho_i(\Delta\tau)$ , является малой добавкой шума и при оценке помехоустойчивости не учитывается. В связи с этим выражение (6) перепишем так:

$$q_{\text{вых}} = q_{\text{вых}0} \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i \rho_i(\Delta\tau) m_i(t)}{1 - m_j(t)} \right] = L q_{\text{вых}0}. \quad (7)$$

Здесь  $q_{\text{вых}0}$  — выходное отношение сигнал-шум в выражении (5).

На рис. 3 приведена зависимость параметра  $L$ , характеризующую

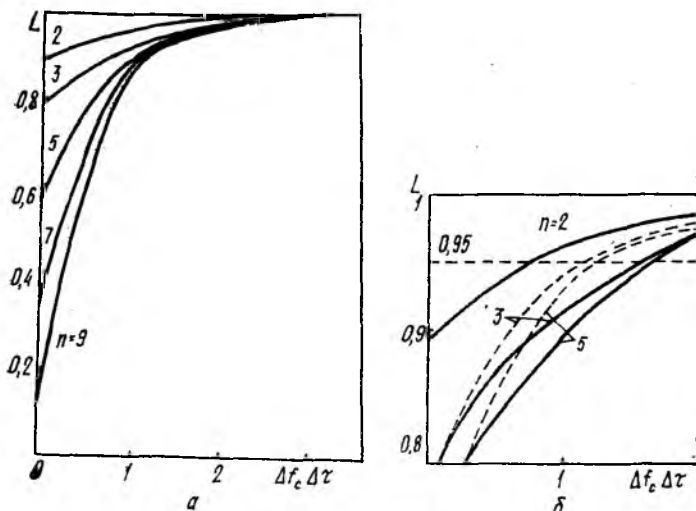


Рис. 3

щего степень снижения отношения сигнал-шум в  $j$ -м канале из-за межканальных помех, от относительной отстройки соседних канальных линий задержки. При расчетах выбрано значение модуляционной характеристики, соответствующее неискаженной передаче речи,  $m_j(t) = m_i(t) = 0,1$ , а также  $q_i = 1$ ; параметром служило число каналов  $n$ . Расчеты проведены для двух случаев: корреляционные функции соседних каналов расположены симметрично относительно корреляционной функции  $j$ -го канала (рис. 3, а); корреляционные функции соседних каналов расположены с одной из сторон по отношению к корреляционной функции  $j$ -го канала, как показано на рис. 3, б. Этот случай касается расположения первого и  $n$ -го каналов многоканальной радиолнии. Второму случаю, соответствуют пунктирные кривые на рис. 3, б.

Результаты анализа выражения (7) показывают, что отношение сигнал-шум резко уменьшается с ростом числа каналов в области, где  $0 < 2\Delta f_c \Delta\tau < 1$ . Для  $2\Delta f_c \Delta\tau \geq 2$  практически при любом коли-

честве каналов не наблюдается уменьшение отношения сигнал-шум более чем на 4—5 %.

Таким образом, предложен метод уплотнения каналов, использующий свойство статистической независимости сигналов с шумовой структурой. Полученное выражение для отношения сигнал-шум многоканальной радиолинии с шумовыми сигналами позволяет оценить помехоустойчивость радиолинии по отношению к внутренним шумам ПРМ, внешним широкополосным и межканальным помехам.

Список литературы: 1. *Радиосистемы передачи информации* / Под ред. И. М. Теплякова, М., 1982. 264 с. 2. *Харкевич А. А.* Передача сигналов модулированным шумом // *Электросвязь*. 1957. № 11. С. 42—46. 3. *Семенов А. М., Сикарев А. А.* Широкополосная радиосвязь, М., 1970. 280 с. 4. *Николаев А. Г., Перцов С. В.* Радиотеплокация, М., 1970. 132 с.

*Поступила в редколлегию 03.07.87*

УДК 681.326.74.06

*Н. Г. БЕЛИНСКАЯ, А. Н. БЛИНКОВ*, канд. техн. наук, *Т. В. ИВАНИЦКАЯ, В. А. ЛЯХОВЕЦ, В. С. МАЛЬЦЕВ, С. Л. СЫРЦОВ, В. И. ТВЕРДОХЛЕБ*

#### **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ТЕСТЕР ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Эффективное решение задач контроля и диагностики неисправностей — необходимое условие обеспечения высокого качества цифровых устройств и систем. Сложность современных цифровых устройств такова, что затраты на выполнение операций контроля и диагностики доходят до 45 % общего объема затрат на их разработку, изготовление и эксплуатацию. Снизить затраты и повысить достоверность контроля и диагностики позволяет высокопроизводительное автоматизированное испытательное оборудование. В процессе изготовления цифровых устройств с помощью такого оборудования контролируются несмонтированные печатные платы, компоненты, устанавливаемые на эти платы (в том числе большие интегральные схемы (БИС) и сверхбольшие интегральные схемы (СБИС)), смонтированные схемные платы и устройства в целом.

Наиболее сложная из перечисленных задач — задача контроля функционирования в реальном масштабе времени и диагностики неисправностей СБИС, схемных плат и устройств через внешние разъемы. Общий алгоритм функционального контроля цифровых устройств заключается в подаче в реальном масштабе времени на входы проверяемого устройства тестовых воздействий, имитирующих входные сигналы, и одновременном сравнении реакций на выходах проверяемого устройства с эталонными реакциями.

При контроле цифровых устройств обработки сигналов применение такого алгоритма предъявляет повышенные требования к характеристикам функциональных тестеров. Это вызвано широким использованием в устройствах цифровой обработки сигналов архи-

тектурных, схемотехнических и технологических решений, обеспечивающих близкие к потенциально достижимым скорости обработки информации, сложностью алгоритмов преобразования данных, малым числом промежуточных точек анализа сигналов. Поэтому архитектура функциональных тестеров, применяемых для тестирования устройств цифровой обработки сигналов, должна обеспечить генерацию тестовых последовательностей, длина которых соизмерима с длиной выборок сигналов при частоте изменения тестовых воздействий до нескольких десятков мегагерц, фиксацию всех результатов обработки на выходах устройства с высокой разрешающей способностью, анализ характера ошибок и локализацию неисправных элементов или узлов.

В наибольшей степени удовлетворяет сформулированным требованиям архитектура функционального тестера с поконттактными наборами ресурсов, предложенная компанией Megatest (США) и реализованная в системе Mega One [1]. Тестер Mega One содержит 256 идентичных каналов, каждый из которых обслуживает один контакт проверяемого устройства. В канале объединены индивидуально программируемые быстродействующий генератор, схема формирования тестового сигнала, фиксатор для запоминания реакцией, регулируемая нагрузка. Тестер формирует и анализирует сигналы с частотой 40 МГц на любом контакте контролируемого устройства или с частотой до 80 МГц на заранее выбранных контактах. Тестовые программы пишутся на языке Паскаль и выполняются под управлением ОС UNIX. Высокие технические характеристики тестера достигаются за счет использования большого объема аппаратуры (около 60 тыс. БИС и СБИС), что определяет его стоимость от 1,2 до 2,7 млн долларов.

К этому же классу относится тестер L290, предназначенный для функциональных испытаний быстродействующих электронных модулей и схемных плат [2]. Тестер L290 обеспечивает контроль устройств с 1152 контактами при частоте смены тестовых воздействий 40 МГц, которая на отдельных контактах может быть увеличена до 80 МГц. Длина тестовой последовательности на каждом контакте 32К бит, временное рассогласование тестовых сигналов — 1,5 нс, временное разрешение — 250 пс. Стоимость тестера L290 0,8—3,2 млн долларов.

Возможности перечисленных тестеров обеспечивают решение большинства задач контроля и диагностики цифровых устройств обработки сигналов, однако такое их применение не всегда экономически целесообразно. Многие задачи из этой области можно решить с помощью более дешевых быстродействующих тестеров, обладающих меньшими функциональными возможностями. К такому классу испытательного оборудования относится рассматриваемый тестер. Он содержит 128 идентичных каналов, блок управления, микроЭВМ с терминалом и устройством внешней памяти. Основной элемент канала — быстродействующая память емкостью 4К бит, позволяющая либо выдавать на входной контакт проверяемого устройства последовательность тестовых воздействий

с частотой 40 МГц, либо записывать с такой же частотой реакции проверяемого устройства. Кроме того, в состав канала входят программируемые преобразователи уровней выходных сигналов памяти в выходные тестовые сигналы и сигналов реакций проверяемого устройства в уровни входных сигналов памяти. Это обеспечивает возможность тестирования устройств, использующих интегральные микросхемы, выполненные по технологиям ТТЛ и ЕСЛ. В состав блока управления входят формирователи тактовых импульсов, определяющих момент смены тестовых воздействий и фиксации реакций с разрешающей способностью по времени 12,5 нс и схемы, обеспечивающие обмен информацией между памятью микроЭВМ и памятью каналов.

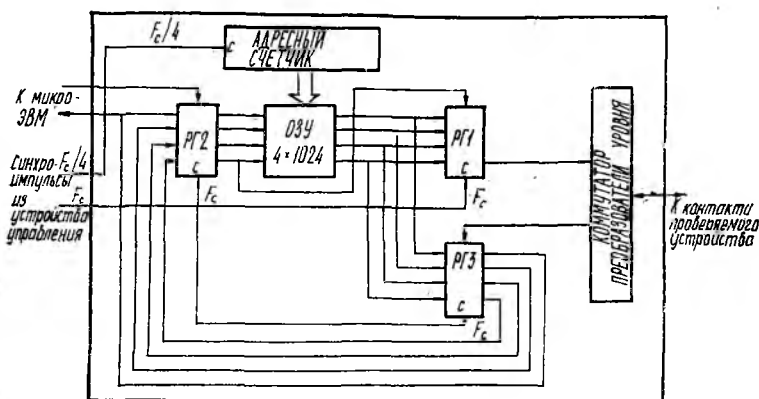


Рис. 1

Тестер выполнен на интегральных микросхемах серии 100 и содержит 72 модуля размером  $240 \times 135 \times 15$  мм. На 64-х модулях расположено 128 каналов, а на 8-ми идентичных модулях — блок управления.

На рис. 1 изображена структурная схема канала. Применение сдвиговых регистров для расслоения ОЗУ позволило при частоте обращения к ОЗУ 10 МГц, обеспечить выдачу и запись тестовой информации с частотой 40 МГц. При решении ряда технологических вопросов эта частота может быть увеличена до 80 МГц.

Для того чтобы с помощью тестера выполнить операцию тестирования конкретного цифрового устройства обработки сигналов, необходим тест, представляющий собой записи последовательностей тестовых воздействий и эталонных реакций для каждого контакта этого устройства. Тесты разрабатываются в процессе проектирования проверяемых устройств и хранятся на магнитных носителях. Собственно операция тестирования выполняется автоматически и включает в себя выполнение следующих операций: последовательности тестовых воздействий под управлением микроЭВМ считываются с магнитного носителя и записываются в быстродействующие ОЗУ соответствующих каналов; тестовые воздействия

с заданной частотой подаются на входные контакты проверяемого устройства. Одновременно с такой же частотой реакции на эти воздействия записываются в память каналов, подключенных к выходам проверяемого устройства; зафиксированные реакции передаются в микроЭВМ и сравниваются с эталонными реакциями, считанными с магнитного носителя. В тестере использована микроЭВМ «Электроника НМС 11100.1» (ДВК-2) с операционной системой РТ-11, дополненной специальными программными средствами для генерации теста и управления процессом тестирования.

Важнейшее достоинство тестеров с контактными наборами ресурсов — простота их программирования. Это позволяет выполнять генерацию тестов автоматическим методом, который вследствие простоты и наглядности обладает высокой надежностью и эффективен при решении задач диагностики неисправностей. Программа генерации теста конкретного цифрового устройства обработки сигналов составляется пользователем и должна включать в себя описание электрических параметров сигналов на входных и выходных контактах, алгоритм формирования тестовых воздействий и алгоритм преобразования этих воздействий проверяемым устройством и последовательность выходных сигналов, представляющих собой программную модель проверяемого устройства.

Возможности диагностики неисправностей тестером закладываются в тест при его разработке. В частности, если тест построен в форме последовательности сегментов, каждый из которых ориентирован на контроль одного из узлов проверяемого устройства, то для диагностики в тестере предусмотрена выдача на терминал наименований неисправных узлов и индикация эталонных и фактических сигналов на выходных контактах при выполнении соответствующих сегментов теста.

Для эффективной реализации программы генерации теста на языке Фортран в состав операционной системы микроЭВМ включена специальная библиотека объектных модулей. При выполнении программы генерации теста ЭВМ вычисляет и записывает на внешний магнитный носитель последовательности тестовых воздействий, производит имитационное моделирование проверяемого устройства, рассчитывает последовательности эталонных реакций и записывает их на магнитный носитель. На рис. 2 представлен пример, иллюстрирующий взаимодействие программных и аппаратных средств теста. На ЭВМ «Электроника НМС 11100.1» программа автоматической генерации теста устройства, содержащего 70 интегральных микросхем средней и малой степени интеграции, длиной 4К тестовых векторов выполняется за 10—15 мин.

Программа управления тестированием, входящая в состав программного обеспечения тестера, управляет обменом тестовой информацией между ЭВМ и ОЗУ каналов, отражает на терминале процесс тестирования, выполняет сравнение эталонных и фактически зафиксированных реакций, выдает информацию, необходимую для диагностики неисправностей. В программе имеется возможность вывода на терминал любого заданного участка последова-



тельности входных, эталонных или принятых тестовых сигналов в форме временных диаграмм или таблиц логических состояний. Для удобства диагностики неисправностей в тестере предусмотрены режимы пошагового выполнения теста и циклической выдачи на рабочей частоте определенного участка тестовой последовательности входных сигналов.

Рассмотренный тестер с поконтактными наборами ресурсов позволяет при относительно небольших затратах аппаратных средств реализовать задачи динамического функционального контроля и диагностики неисправностей цифровых устройств обработки сигналов, работающих с потоками входных и выходных сигналов до 40 МГц. В такой структуре едиными техническими средствами решаются задачи генерации тестов, тестирования контролируемых устройств и диагностики неисправностей. Возможности аппаратных и программных средств тестера, позволяющие легко модернизировать тесты и наглядно представлять результаты тестирования, делают эффективным его применение не только для производства цифровых устройств обработки сигналов, но и при их разработке и эксплуатации.

**Список литературы:** 1. Говард Бирман. Развитие и совершенствование испытательного оборудования для СБИС // Электрон. 1984. № 8. С. 24—30. 2. Сверхбыстродействующий тестер для испытаний печатных плат и гибридных модулей // Электрон. 1985. № 23. С. 53—59.

Поступила в редколлегию 06.01.88

УДК 621.372

С. И. ГРИДЧИН, канд. техн. наук, М. А. ИВАНОВ, канд. техн. наук

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

В области теории систем передачи дискретной информации недостаточно полно учитываются нелинейные свойства каналов [1]. В связи с этим представляется целесообразным провести моделирование и изучение специфики влияния нелинейных эффектов в каналах цифровой связи на качество передачи дискретных сигналов с целью оптимизации процедуры их обработки.

Класс исследуемых нелинейных объектов ограничим каналами связи с аналитическими [2; 3] характеристиками, описанными в виде функционального ряда Вольтерра [2]:

$$\begin{aligned}
 y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow Y(f_1, f_2, \dots) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(f_1, \dots, f_n) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n(f_1, \dots, f_n) \prod_{i=1}^n X(f_i), \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$ ,  $X(\cdot)$ ,  $Y(\cdot)$  — входной и выходной сигналы и их Фурье образы соответственно;  $h_n(\cdot)$ ,  $H_n(\cdot)$  — ядро Вольтерра  $n$ -го порядка и его Фурье образ, причем последний можно представить следующим общим соотношением [2]:

$$H_n(f_1, \dots, f_n) = Q(f_1 + \dots + f_n) F_n \{ [k_f(\cdot), Q(\cdot)]_2^n \prod_{i=1}^n H_1(f_i) \}, \quad (2)$$

где  $Q(\cdot)$  — передаточная функция ассоциированной линейной части исследуемого объекта.

Выражение (1) адекватно характеризует математическую модель исследуемого канала цифровой связи. Функциональный ряд (1) имеет смысл обычного для сходящихся рядов Вольтерра [2] или асимптотического [3] в случае расходимости данного разложения описания выходного сигнала нелинейного канала передачи дискретной информации.

Оптимальный прием дискретных сигналов сопряжен с решением задачи проверки гипотез [1; 4], причем реальные возможности разрешения различных сигналов полностью определяются степенью их коррелированности. Поэтому исследование влияния нелинейных эффектов на качество передачи цифровой информации проведем путем оценки степени нарушения ортогональности принимаемых дискретных сигналов. Полагается, что используемые сигналы — простые [1; 4] и, следовательно, их структурные свойства можно не учитывать, а значит, и не рассматривать возможность деортогонализации данных сигналов по форме [1].

Нарушение ортогональности во времени происходит вследствие дополнительного «затягивания» переходных процессов в нелинейных каналах передачи сигналов [2]:

$$t_{n(\Delta f)} = \{ \tau_1 \ln [ |Y_1(\cdot)| / Y_0 ] \} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^m \tau_{2j+1} \ln [ |Y_{2j+1(\Delta f)}(\cdot)| / Y_0 ] \right\} \geq \\ \geq t_{\text{плин}} \stackrel{\circ}{=} \{ \tau_1 \ln [ |Y(\cdot)| / Y_0 ] \}, \quad (3)$$

где  $t_{n(\Delta f)}$  — верхняя граница полной длительности переходных процессов в полосе пропускания  $\Delta f$  исследуемого нелинейного канала связи;  $\tau_k$  — постоянная времени подсистемы Вольтерра  $k$ -го порядка. Анализ структуры (2) нелинейных передаточных функций указанных подсистем показывает, что  $\tau_{k1} \geq \tau_{k2}$ ,  $\forall k_1 > k_2$ ;  $Y_0$  — некоторый уровень выходного сигнала, начиная с которого и ниже переходные процессы в канале связи условно считаются закончившимися.

Данное «затягивание» переходных процессов в нелинейных каналах связи обусловлено невозрастающим характером зависимости ширины полос «прозрачности» подсистем Вольтерра общей функциональной модели (1) этих каналов от значения порядка указанных подсистем [4]. Повышение инерционности подсистем Вольтерра с возрастанием их порядка имеет место в связи с каскадной структурой выражения (2). Поэтому «глубина» межсимвольной интерференции дискретных сигналов увеличивается не менее чем на  $2[\Delta t_{n(\Delta f)}]_{\text{вкл}}/T$ , где  $T$  — длительность тактового

интервала. В целом явление дополнительного затягивания переходных процессов в нелинейных каналах может приводить к значительному повышению уровня и глубины межсимвольной интерференции дискретных информационных сигналов [2].

Нарушение ортогональности по частоте обусловлено нелинейным «размытием» спектра передаваемых сигналов. Действительно, компоненты нелинейных искажений  $r$ -го порядка ( $r=2q+1$ , где  $q=0, 1, 2, \dots$ ) сосредоточены в полосе с шириной  $\sim r\Delta f_c$  в окрестности несущей частоты и ее  $(r-2)l$ -х гармоник [2]. Здесь  $\Delta f_c$  — полоса частот передаваемых сигналов,  $l=0, 1, 2, \dots, \lfloor r/2 \rfloor - 1$ ;  $a[\cdot]$  — обозначение наибольшего целого от частного, заключенного в квадратные скобки. Тогда мощность мешающего отклика в окрестности  $j$ -й информационной частоты вследствие «размытия» спектра («нелинейного влияния» третьего порядка) сигнала с  $i$ -й информационной частотой при  $i \neq j$  можно оценить следующим образом [2]:

$$P_{j3}(i) = \int \left\{ \left\{ \int \int \int_{-\infty}^{\infty} |H_3(f_1, f_2, f_3)|^2 \prod_{i=1}^3 x(f_i) \right\} df_1 df_2 df_3 \right\} df, \quad (4)$$

где  $\Delta f^{(j)} = N(1/T)$  —  $j$ -я спектральная область вынесения решения о текущем значении мгновенной частоты дискретного информационного сигнала.

Область интегрирования в фигурных скобках формулы (4) ограничивается условием  $f \triangleq |\pm f_1 \pm f_2 \pm f_3| \in \Delta f^{(j)}$ , причем  $f_1, f_2, f_3 \in \Delta f^{(i)}$ .

В случае многоканальной передачи с частотным разделением информационных потоков дополнительно к (4) имеют место также перекрестные и интермодуляционные искажения. Поэтому степень нарушения частотной ортогональности для  $m$ -го канального сигнала из-за перекрестного или интермодуляционного влияния сигналов  $k$ -го и  $l$ -го или  $r$ -го,  $k$ -го и  $l$ -го соседних каналов характеризуется мощностью указанных нелинейных мешающих компонент, которые определяются соотношениями

$$P_{m3}''(k, l) = \int_{\Delta f_m} \left\{ \int \int \int_{-\infty}^{\infty} |H_3(f_1^*, f_2^*, f_3^*) x_m(f_1^*) x_k(f_2^*) x_l(f_3^*) df_1^* df_2^* df_3^* \right\} (5)$$

или

$$P_{m3}'''(n, k, l) = \int_{\Delta f_m} \left\{ \int \int \int_{-\infty}^{\infty} |H_3(f_1^{\#}, f_2^{\#}, f_3^{\#}) x_n(f_1^{\#}) x_k(f_2^{\#}) \times \right. \\ \left. \times x_l(f_3^{\#}) df_1^{\#} df_2^{\#} df_3^{\#} \right\} df^{\#}, \quad (6)$$

где  $n, k, l \neq m$ , причем  $f^* \triangleq |\pm f_1^* \pm f_2^* \pm f_3^*| \in \Delta f_m$  и  $f^{\#} \triangleq |\pm f_1^{\#} \pm f_2^{\#} \pm f_3^{\#}| \in \Delta f_m$ , а  $f_1^* \in \Delta f_n$ ;  $f_2^*, f_2^{\#} \in \Delta f_k$ ;  $f_3^*, f_3^{\#} \in \Delta f_l$  и  $\Delta f_{z1} \cap \Delta f_{z2} \neq \emptyset$ ,  $z_1 \neq z_2$ ;  $\Delta f_z$  — полоса частот, выделяемая для  $z$ -го канала ( $z = n, m, k, l$ ). В общем случае ширина полосы различных каналов может быть неодинаковой, т. е. возможно  $\Delta f_{z1} = \Delta f_{z2}$ ,  $z_1 \neq z_2$ .

Необходимо отметить, что  $\Delta f_z = \cup \Delta f_z^{(i)}$ , причем  $\Delta f_z \geq \sum_i \Delta f_z^{(i)}$  только при использовании системы сигналов ортогональных в усиленном смысле [1]. Значение  $\{\cup \Delta f_z^{(i)} \setminus \sum_z \Delta f_z\}$  характеризует межканальные «защитные» частотные интервалы. В формулах (4)–(6) под величинами  $x(\cdot)$  понимается смесь полезного информационного сигнала, канальных шумов и мешающих воздействий. Интегральная степень нарушения «частотной» ортогональности при одноканальной передаче оценивается величиной средней (по ансамблю из  $k$  информационных значений частот) мощности мешающего отклика:

$$\langle P_3' \rangle_k = \sum_{j=1}^k P(j) P_{f_3}(\Sigma) = \sum_{j=1}^k P(j) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k P(i) P_{f_3}(i). \quad (7)$$

Здесь  $P(j)$  или  $P(i)$  — вероятность появления  $j$ -го или  $i$ -го информационного значений частоты используемого сигнала, как правило, обеспечивается [1; 4]:

$$P(i) = P(j) = \text{const} (i, j) = 1/k, \quad \forall i, j \in [1, k]. \quad (8)$$

Для многоканальных систем цифровой связи с частотным разделением  $L$  каналов передачи дискретных сообщений справедливо также:

$$\langle P_3'' \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L P_{m3}''(\Sigma) = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \sum_{\substack{k, l=1 \\ k, l \neq m}}^L P_{m3}(k, l); \quad (9)$$

$$\langle P_3''' \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L P_{m3}'''(\Sigma) = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L p \sum_{\substack{n, k, l=1 \\ n, k, l \neq m}}^L p_{m3}(n, k, l). \quad (10)$$

Таким образом, имеем среднюю по совокупности  $L$  частотно-разделимых каналов степень суммарного нарушения частотной ортогональности в общем случае:

$$\langle P_{3\Sigma} \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{\gamma=1}^L \{ \langle P_3' \rangle_{k\gamma} \}_{\gamma} + \langle P_3'' \rangle_L + \langle P_3''' \rangle_L. \quad (11)$$

Здесь  $\{ \cdot \}_{\gamma}$  — обозначение средней (по ансамблю из  $L$  информационных значений частот степени нарушения частотной ортогональности вследствие нелинейного «размытия» спектра сигналов в  $\gamma$ -м канале передачи цифровой информации. Из выражений (5), (6), (9), (10) следует также, что при прочих равных условиях (фиксированных межканальных частотных интервалах, постоянных полос и уровне канальных сигналов и т. п.) мощность перекрестных, особенно интермодуляционных составляющих быстро возрастает с увеличением числа каналов. Это свойство нелинейных систем многоканальной цифровой связи дополняет исследованные ранее [2] явления накопления нелинейных искажений сигналов по

полосе их передачи, по количеству каскадов приемопередающего оборудования и физической длине линий передачи с распределенными параметрами. Следовательно, нарушение «частотной» ортогональности сигналов в нелинейных системах цифровой связи может приводить к существенным потерям помехоустойчивости передачи дискретных сообщений.

Третий вид нарушения ортогональности принимаемых дискретных сигналов в нелинейных каналах цифровой связи наиболее существенно влияет на когерентные системы передачи и обусловлен явлением амплитудно-фазовой конверсии [2]. Данное нарушение фазовой ортогональности сигналов можно объяснить свойством однородности  $n$ -й степени функционала Вольтерра  $n$ -го порядка  $n$ -го члена ряда (1). Действительно, после ассоциирования комплексных переменных [2; 3; 7] выражение (1) приводится к виду

$$Y^A [cx(f)] = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^A [cx(f)] = \sum_{n=1}^{\infty} c^n Y_n^A [x(f)]. \quad (12)$$

Поскольку в соотношении (12) выходной сигнал  $Y^A [cx(f)]$  представлен линейной комбинацией комплексных величин  $Y_n^A [x(f)]$  с линейно зависящими коэффициентами, то фаза произвольной спектральной составляющей указанного выходного сигнала в общем случае будет зависеть от уровня  $c$  входного сигнала [4]. Тогда степень нарушения «фазовой» ортогональности дискретных сигналов в нелинейных каналах цифровой связи можно оценить следующим значением дополнительного фазового сдвига:

$$\Delta\varphi_{\text{доп}} = \arg [Y^A(f) - Y_1(f)] = \text{arctg} \frac{J_m \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} Y_m^A [x(f)] \right\}}{\text{Re} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} Y_m^A [x(f)] \right\}}. \quad (13)$$

Из выражения (13) следует, что в нелинейных каналах связи расщепление принимаемых сигналов на синфазную и квадратурную составляющие необратимо. В случае безынерционной нелинейности третьего порядка имеем

$$\Delta U_{s3}(t) = \Delta U_{s3} [U_s(t); U_c(t)] = k_3 [(3/4)A_s^3 + (2/3)A_c^2 A_s] \sin(\omega_0 t + \varphi_s) - 3/4 A_c^2 A_s \sin(\omega_0 t + 2\varphi_c - \varphi_s), \quad (14)$$

$$\Delta U_{c3}(t) = \Delta U_{c3} [U_c(t); U_s(t)] = k_3 [(3/4)A_c^3 + (2/3)A_s^2 A_c] \cos(\omega_0 t + \varphi_c) - (3/4)A_s^2 A_c \cos(\omega_0 t + 2\varphi_s - \varphi_c), \quad (15)$$

где  $A_s$  ( $A_c$ ) и  $\varphi_s$  ( $\varphi_c$ ) — амплитуда и фаза синфазной (квадратурной) составляющей информационного сигнала с центральной частотой  $\omega_0$ .

Интересно отметить, что если первые слагаемые правых частей выражений (14) и (15) характеризуют лишь «амплитудные» взаимные помехи между синфазным и квадратурным каналами приема, то вторые слагаемые описывают амплитудно-фазовые перекрестные искажения между этими каналами.

Поэтому и «фазовая» деортогонализация сигналов в нелинейных каналах может приводить к некоторому возрастанию вероятности ошибки передачи цифровых сообщений, наиболее заметному для когерентных систем связи, особенно при использовании высокоинформативных многопозиционных дискретных сигналов.

Вместе с тем основным предметом исследования является не столько анализ особенностей влияния нелинейных эффектов на качество передачи цифровых сообщений, сколько разработка эффективных методов оптимального приема дискретных информационных сигналов в нелинейных каналах связи. Для решения последней задачи оценим закон распределения выходного отклика нелинейного канала. При полосно-эффективной передаче дискретных сообщений [1] данный канал цифровой связи узкополосный как по отношению к полной ширине спектра входных воздействий  $\Delta f_c \geq \Delta f \doteq \Delta f_1$ , так и по сравнению с несущей частотой  $(\omega_0/T) \gg \Delta f_1$ . Однако ранее показано, что ширина полосы прозрачности подсистем Вольтерра общей функциональной модели изучаемого нелинейного канала — неубывающая функция значения порядка данных подсистем [2]. Эти подсистемы Вольтерра высших порядков, как правило, более узкополосные, чем линейная подсистема первого порядка, т. е.  $\Delta f_k \geq \Delta f_1$ ,  $\forall k \geq 2$ . С учетом известного свойства нормализации выходного отклика узкополосной линейной системы при ее широкополосном возбуждении [4], можно утверждать, что сигнал на выходе нелинейного канала представляет собой сумму в общем случае счетного количества нормализованных выходных откликов  $Y_n(t)$  подсистем Вольтерра соответствующих порядков общей функциональной модели (1) указанного канала связи. Закон распределения полного выходного сигнала  $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$  нелинейного канала также является гауссовским, причем моменты первого и второго порядков этого нормального закона определяются как

$$\overline{y(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n(t)}, \quad (16)$$

$$D[y(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} D[y_n(t)] + 2 \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} k[y_p(t), y_q(t)]. \quad (17)$$

Отсюда следует, что при приеме дискретных информационных сигналов на фоне широкополосных шумов методы оптимальной обработки данных сигналов в линейных и нелинейных узкополосных каналах в принципиальном отношении совпадают. Различие настройки решающих схем оптимальных приемников дискретных сигналов в таких каналах цифровой связи обусловлено количественными отличиями параметров распределения канальных шумов  $y_1(t)$ ,  $D[y_1(t)]$  и  $y(t)$ ,  $D[y(t)]$  (см. формулы (17) и (18)), а также большей степенью «окрашенности» спектра гауссовских шумов на выходе нелинейных каналов.

При воздействии сосредоточенных по спектру мешающих сигналов закон распределения выходного отклика каналов связи отличается от гауссовского [1; 4]. Вместе с тем для нелинейных каналов неоптимальны и хорошо известные в линейной теории [1] методы приема сигналов с предварительным «отбеливанием» спектра входных воздействий и последующей стандартной оптимальной обработкой дискретных информационных сигналов на фоне нормализованных канальных шумов. Сосредоточенные помехи в нелинейных каналах связи вследствие нелинейного размытия спектра приводят к появлению значительного количества нелинейных компонент с широкой полосой частот. Их образование может быть обусловлено и влиянием интенсивных внеполосных мешающих сигналов [1; 2], которые в линейных каналах связи не оказывают влияния на качество приема информации [1].

Поскольку данные нелинейные компоненты в значительной мере перекрываются по спектру с полезными дискретными сигналами [2], то режекция или иное подавление первых неизбежно сопровождается существенными потерями информативности последних [1; 4]. Отсюда следует принципиальная непригодность традиционных в линейной теории методов построения эффективных «обеляющих» фильтров для нелинейных каналов цифровой связи с сосредоточенными помехами.

Чтобы применить для нелинейных каналов широко используемый в теории и практике оптимального радиоприема способ «приведения» линейного канала с сосредоточенными помехами к гауссовскому виду путем режекции данных помех [1], необходимо локализовать порождаемые этими помехами компоненты нелинейных искажений в достаточно узкой спектральной области. Только тогда ослабление влияния нелинейных искажений на качество передачи цифровых сообщений на основе подавления указанных искажений не будет сопровождаться значительными потерями информативности принимаемых дискретных сигналов. Проведенный анализ показал, что подобная локализация спектра нелинейных компонент в сравнительно узкой полосе частот возможна лишь путем искусственного усиления инерционности нелинейных характеристик используемого канала цифровой связи. Практически оно может осуществиться на основе использования так называемых частотно-избирательных ограничителей (ЧИО), общую функциональную модель которых представим в виде

$$Y(f_1, f_2, \dots) = G(f_1)M_1(f_1)N(f_1)x(f_1) + \sum_{n=1}^{\infty} G(f_1 + \dots + f_{2n+1}) \times \\ \times \left\{ \prod_{l=1}^n M_{2n+1}^{(l)}(f_1, \dots, f_{2n+1}) \right\} \prod_{l=1}^{2n+1} N(f_l)x(f_l). \quad (18)$$

Здесь  $\Delta f_{M_{2n+1}}^{(l)} \cap \Delta f_{M_{2n+1}}^{(l_2)} = \emptyset, \forall n \in \{(1, \infty)\}$  и  $\forall l_1 \neq l_2, \prod_{l=1}^L \Delta f_{M_{2n+1}}^{(l)} = \Delta f_n = \text{const}(n), \Delta f_n \geq \max\{\Delta f_G, \Delta f_M, \Delta f_N\} = \Delta f_N$ , причем  $\Delta f_n \cap \Delta f_N = \Delta f_N$ .

Таким образом, совокупность наборов по  $L$  узкополосных нелинейных блоков  $(2n + 1)$ -го порядка в каждом из данных наборов с взаимно неперекрывающимися полосами поглощения моделирует эффект частотно-избирательного ограничения интенсивных спектральных составляющих входных воздействий на нелинейном участке амплитудной характеристики ЧИО. При этом обеспечивается концентрация компонент нелинейных искажений в сравнительно узкой полосе поглощения  $\Delta f_{M2n+1}^{(l)}$  в окрестности центральной частоты ограничиваемого сосредоточенного по спектру мешающего сигнала. Очевидно, что при выборе достаточно большого значения  $l$  величина  $\Delta f_{M2n+1}^{(l)}$ ,  $\forall n, l$  гораздо меньше ширины полосы передачи информационных сигналов  $\Delta f_c$  (обычно  $\Delta f_c \leq \min \{\Delta f_G, \Delta f_M, \Delta f_N\} = \Delta f_G$ ),  $\Delta f \cap \Delta f_G = \Delta f$ . Отсюда следует, в частности, что использование ЧИО позволяет почти полностью устранить влияние внеполосных сосредоточенных помех. Кроме того, применение ЧИО предпочтительно и для наиболее важного на практике случая воздействия интенсивных сосредоточенных по спектру помех.

Следовательно, процедура обработки дискретных сообщений в связанных нелинейных каналах цифровой передачи информации с сосредоточенными помехами предполагает выполнение операции частотно-избирательного ограничения с целью локализации спектра порождаемых ими нелинейных искажений в сравнительно узкой полосе поглощения в окрестности центральных частот данных помех, а затем осуществляется подавление указанных локализованных искажений и ограниченных помех в этих частотных областях с последующим оптимальным приемом полезных сигналов на фоне нормализованных канальных шумов.

**Список литературы:** 1. *Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации* / А. Г. Зюко, А. И. Фалько, И. П. Панфилов и др. под редакцией Зюко. М., 1985. 272 с. 2. *Иванов М. А., Гридин С. И.* Анализ особенностей переходных процессов в нелинейных динамических системах // *Вестн. Харьк. политех. ин-та. Автоматика и приборостроение.* 1985. Вып. 11. № 221. С. 30—33. 3. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Часть первая. Основные операции анализа / Пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. М., 1963. 344 с. 4. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М., 1982. 624 с.

*Поступила в редколлегию 16.09.87*

УДК 621.391

С. В. НАУМЕНКО, канд. техн. наук, О. П. МАЛОФЕЙ, канд. техн. наук,  
А. В. СТАВРОВ, В. Н. ТУПКАЛО, канд. техн. наук

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОСВЕННОЙ ЛОКАЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Наиболее существенные характеристики большинства систем связи — точность передачи информации и ее количество, передаваемое при заданной точности. Имеет значение и то, насколько полно используются возможности системы связи. Все это характе-

ризует эффективность системы связи, для оценки которой вводят различные коэффициенты, описывающие наиболее важный параметр системы связи. Считается [1], что при многостанционном доступе в ретранслятор более полный и совершенный критерий эффективности — критерий использования пропускной способности ретранслятора, а в качестве обобщенного критерия эффективности предлагается использовать пороговое отношение энергии сигналов к удельной интенсивности помехи, когда в заданных условиях обеспечивается требуемое количество передачи  $\omega_{\text{порог}}$  [2].

Таким образом, устоявшейся методики оценки эффективности системы связи пока нет. Поэтому применяют критерии, наиболее удобные в конкретных случаях.

Воспользуемся системой коэффициентов для оценки эффективности системы связи, приведенной в работе [3]. Она характеризует лишь метод передачи, не оценивая способы технического воплощения, более проста и привычна.

Будем оценивать эффективность способов передачи с помощью коэффициентов  $\beta$ -,  $\gamma$ - и  $\eta$ -эффективности. Коэффициент  $\beta$ -эффективности, характеризующий мощность сигнала, определяется по формуле

$$\beta = \frac{C}{P/\sigma^2}. \quad (1)$$

Здесь  $C$  — скорость передачи информации, (бит/с);  $P$  — средняя мощность сигнала на входе приемника;  $\sigma^2$  — удельная мощность (интенсивность) помехи на входе приемника, или  $\beta = C/Q_{\text{вч}}\Pi_0 = CB/\Pi_0 Q_{\text{нч}}$  (2), где  $Q_{\text{вч}}$  — отношение средних мощностей сигнала и помехи на входе приемника;  $Q_{\text{нч}}$  — отношение средних мощностей сигнала и помехи на выходе приемника;  $\beta$  — отношение средних мощностей сигнала и помехи на выходе;  $\Pi_0$  — ширина спектра сигнала;  $B$  — выигрыш системы,  $B = Q_{\text{нч}}/Q_{\text{вч}}$  (3).

Для оценки использования полосы частот канала вводится понятие  $\gamma$ -эффективности,  $\gamma = C/\Pi_0$  (4). Степень использования пропускной способности канала характеризуется  $\eta$ -эффективностью,  $\eta = C/C_0$  (5) ( $C_0$  — пропускная способность канала). Выбор того или иного коэффициента для оценки эффективности системы связи зависит от того, какой параметр является важнейшей характеристикой системы.

Если мощность передатчика ограничена, что часто бывает на космической радиолинии Борт — Земля, целесообразно оценить эффективность системы связи с помощью коэффициента  $\beta$ -эффективности.

Для доказательства эффективности применения метода косвенной локации сигналов в системе связи с использованием искусственного спутника Земли (ИСЗ) рассмотрим две системы связи с различными ИСЗ: первая — международная система спутниковой связи «Интелсат VI», в которой используется ИСЗ типа «Интелсат VI», осуществляющий ретрансляцию при помощи многолучевой узконаправленной антенны с использованием подавления боковых лепестков на излучение; метод доступа — система многостанцион-

ного доступа с частотным разделением; вторая — международная система «Интерспутник» (ИСЗ типа «Горизонт») с глобальной зоной обслуживания (или полусфера); метод частотной модуляции (ЧМ), система работает по принципу частотного многостанционного доступа.

Поскольку системы являются многоканальными и асинхронными со свободным доступом в системе связи всех корреспондентов, в этом случае через общий ретранслятор осуществляется независимая связь между любыми двумя точками.

Когда в данной системе связи используются многолучевые антенные устройства с узкой диаграммой направленности («узкий луч» [4]), то в любом случае для повышения эффективности связи можно применить метод косвенной локации сигналов. Пусть его проще рассмотреть на примере косвенной локации сигналов в узком луче. Указанный метод характеризуется тем, что дополнительно от двух пространственно разнесенных передатчиков излучаются два мощных узконаправленных электромагнитных колебания, которые создают вещественную область взаимодействия, излучающую во все стороны взаимомодулированные компоненты, которые принимаются и обрабатываются разведприемником для оценки параметров исследуемого радиосигнала. Данная область имеет свойства, описываемые нелинейной передаточной функцией типа

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos[\omega_0 t + \arctg(y/x) + f(\sqrt{x^2 + y^2})], \quad (6)$$

где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  — квадратурные составляющие входного процесса:

$$U_{\text{ВХ}}(t) = \sum_{i=1}^L A_i \cos[\omega_0 + \omega_i t + \varphi_i t + \Theta_i]. \quad (7)$$

Здесь  $A_i$ ;  $\omega_0 + \omega_i$ ;  $\varphi_i(t)$ ;  $\Theta$  — амплитуда, несущая частота, закон угловой модуляции (манипуляции), начальная фаза  $i$ -го сигнала соответственно;  $\omega_0$  — угловая частота, соответствующая средней частоте сигнала  $U_{\text{ВХ}}(t)$ ;  $g(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  — амплитудная (АХ) и фазоамплитудная (ФАХ) характеристики области.

Как показано в [5], после прохождения области совокупность сигналов предстанет в виде

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_L = -\infty}^{\infty} A_{k_1, k_2, \dots, k_L}(t) \cos\left\{\omega_0 t + \sum_{i=1}^L k_i [\omega_i t + \varphi_i(t) + \Theta_i] + \psi_{k_1, k_2, \dots, k_L}(t)\right\},$$

где

$$A_{k_1, k_2, \dots, k_L}(t) \exp[j\psi_{k_1, k_2, \dots, k_L}(t)] = \int_0^{\infty} r \prod_{i=1}^L I_{k_i}(A_i r) I_0[U(t)r] \dot{H}(r) dr. \quad (8)$$

Здесь

$$\dot{H}(r) = \int_0^{\infty} r g \rho \exp[jf(\rho)] I_1(r\rho) d\rho. \quad (9)$$

Кроме того, должно быть выполнено условие

$$\sum_{i=1}^L k_i = 1. \quad (10)$$

Из выражения (8) хорошо видно, что параметры отдельных комбинационных составляющих выходного сигнала зависят от параметров входного, а следовательно, несут информацию о законах изменения сразу нескольких сигналов.

Выделение необходимых составляющих производится по частотному, фазовому либо кодовому признакам. Например, если изменяемому радиосигналу присвоить индекс «1», а зондирующему — «2», то общее выражение выходного сигнала можно представить как

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(t) = & \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} A_{k_1, k_2}(t) \cos \{(\omega_0 t + k_1 \omega_1 t + k_2 \omega_2 t) + \\ & + [k_1 \varphi_1(t) + k_2 \varphi_2(t)] + k_1 \Theta_1 + k_2 \Theta_2 + \psi_{k_1, k_2}(t)\} + \\ & + \sum_{k_1, k_2 = 0}^{\infty} A_{k_1, k_2, \dots, k_L = -\infty}(t) \cos \{\omega_0 t + k_i [\omega_i t + \varphi_i(t) + \Theta_i] + \\ & + \psi_{k_1, k_2, \dots, k_L}(t)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно выражению (11), составляющие, удовлетворяющие условию (10), несут информацию о законе изменения параметров измеряемого сигнала.

Так, для  $k_2 = 2$ ,  $k_1 = -1$ ,  $k_2 + k_1 = 1$  имеем

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(t) = & A_{-1,2}(t) \cos \{\omega_0 t - \omega_1 t + 2\omega_2 t - \varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) - \\ & - \Theta_1 + \Theta_2 + \psi_{-1,2}(t)\} + \sum_{k_1 = -1, k_2 = 2, k_3 = \dots = k_L = -\infty}^{\infty} A_{-1,2, k_3, \dots, k_L}(t) \cos \{\omega_0 t - \omega_1 t + \\ & + 2\omega_2 t - \varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) - \Theta_1 + \Theta_2 + \sum_{i=3}^{\infty} k_i (\omega_i t - \\ & - \varphi_i(t) + \Theta_i) + \psi_{-1,2, k_3, \dots, k_L}(t)\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Как следует из выражения (12), параметры взаимной составляющей зондирующего и измеряемого радиосигналов содержат законы изменения обоих сигналов и легко могут быть обработаны на приемной стороне, где параметры сигнала разведстанции известны. Если к тому же известно значение угловой частоты измеряемого сигнала, то задача измерения  $\varphi_1(t)$  значительно упрощается. В оставшейся сумме содержатся и другие составляющие, прием которых увеличивает точность измерения. Например, для  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = -1$  и т. д. с учетом условия (10).

На рис. 1 представлены зависимости изменения амплитуд взаимомодуляционной составляющей третьего порядка с  $k_1 = -1$  и  $k_2 = 2$  от отношения амплитуд сигнала и измеряемого сигнала  $A_{3c}/A_n$  при различных отношениях сигнал-шум на входе области взаимодействия, рассчитанные в соответствии с (12).

Приведенные зависимости свидетельствуют о том, что уже при незначительном превышении сигнала ЗС № 1 над уровнем исследуемого сигнала значение взаимомодуляционной составляющей  $A_{1,2}$  становится практически соизмеримой с уровнем  $A_n$ , а следовательно, трудности измерения параметров наблюдаемого колебания становятся такого же уровня, что и непосредственно постороннего электромагнитного колебания в области взаимодействия. В то же время излучение от области взаимодействия, в отличие от исследуемого сигнала, происходит в разные стороны с интенсивностью, соизмеримой с интенсивностью рассматриваемого колебания, что позволяет приемнику ЗС № 1 вести достоверный прием переданного им сигнала, а значит, возможна подстройка передатчика по качеству принимаемого сигнала, которое будет характеризоваться в основном вероятностью ошибочного приема единичного символа.

Таким образом, появляется возможность создания наилучших условий для приема сигналов приемной станцией ЗС № 2. Способы создания таких условий аналогичны для обеих систем связи.

Рассмотрим применение метода в системе связи с антеннами, использующими широкую диаграмму направленности. Применение таких антенн позволяет передающей земной станции (ЗС) № 1 принять групповой сигнал, ретранслируемый с ИСЗ, и при необходимости сдвинуть во времени сигнал своего передатчика, чтобы обеспечить оптимальные условия для приема его своим корреспондентом — ЗС № 2. Следовательно, передающая станция каждого направления, кроме собственно передающего тракта, должна содержать тракт, который обеспечивает прием и анализ группового сигнала от ИСЗ (рис. 2).

Поясним общий принцип работы систем космической связи при помощи структурной схемы (рис. 2). Допустим, что ретранслятор на ИСЗ в данный момент используется  $n$ -направлениями. Передающая станция  $i$ -го направления передает дискретную информацию на несущей частоте  $f_i$ , при этом можно использовать любой способ передачи дискретной информации, например ЧМ или ФТ, с длительностью элементарной посылки  $T$ . Индекс  $i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) свидетельствует о том, что схема относится к  $i$ -му направлению. Сигнал с несущей частотой  $f_i$  совместно с сигналами основных направлений поступает в приемную часть антенны ретранслятора, усиливается в приемном устройстве и расфильтровывается гребенкой из  $n$ -фильтров сосредоточенной селекции, полоса пропускания которых выбирается так, чтобы обеспечить неискаженную передачу посылки сигнала и очистить его от помех,

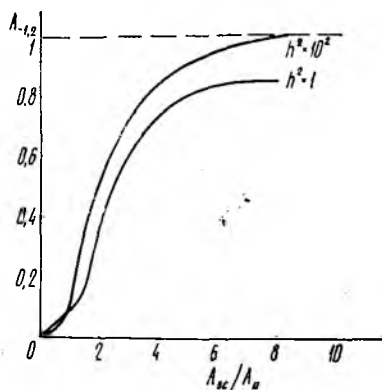


Рис. 1

В этом случае предлагаемый способ косвенной локации сигнала и подстройки по цепи обратной связи позволит максимально сузить полосы пропускания таких фильтров, а отсюда — уменьшить их габаритно-весовые и стоимостные показатели, так как здесь есть возможность принять меры по устранению смещений частоты радиолинии Земли — ИСЗ из-за нестабильностей передатчика, гетеродина приемника и влияния эффекта Допплера, который возникает за счет перемещения спутника относительно ЗС и приводит к искажению спектра сигнала. Сигналы с выходов канальных фильтров поступают на сместитель, куда одновременно поступает напряжение

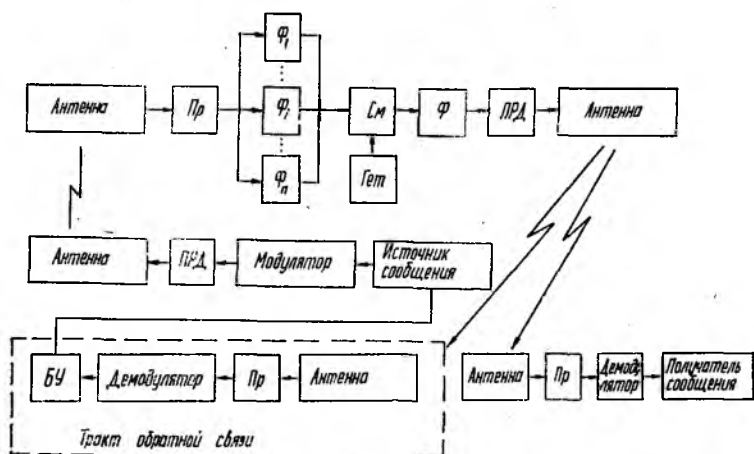


Рис. 2

от генератора «прыгающей» частоты (гетеродина). Сетка частот гетеродина соответствует расстановке несущих частот передатчиков ЗС.

Таким образом, с выхода фильтра последовательно поступают посылки сигналов различных ЗС длительностью  $T/n$ , соответствующие несущим частотам  $f_1, \dots, f_i, \dots, f_n$ . Укороченные в  $n$  раз элементарные посылки  $n$  ЗС поступают в передатчик и излучаются передающей частью антенного устройства.

Групповой сигнал, переизлученный ретранслятором, поступает на вход приемной части ЗС  $i$ -го направления и на приемник передающей части того же направления. В демодуляторе из группового сигнала выделяются посылки, несущие сообщение  $i$ -й передающей ЗС. Проводится их анализ.

Если «вырезанная» в ретрансляторе посылка попадает на границу двух соседних посылок противоположного знака, то блок управления несколько изменяет частоту дискретизации, чтобы стробирующий импульс в ретрансляторе приходился на середину посылки. Очевидно, что для выделения из группового сигнала сообщений отдельной станции в сигналы станций необходимо вводить соответствующую «окраску».

Как известно, большинство национальных и международных спутниковых линий связи работают в полосах 6/4 и 8/7 ГГц (числитель соответствует полосе частот на участке линии Земля — ИСЗ, знаменатель — ИСЗ — Земля). В более высоких диапазонах выделены полосы 14/12 и 30/20 ГГц.

Основные явления, сопровождающие распространение волн таких частот, сводятся к затуханию в атмосферных газах и осадках, изменению поляризации волн в результате эффекта Фарадея и осадков, случайным флюктуациям и фазе принимаемого поля, вариациям углов прихода, ограничению полосы частот, передаваемой без искажений.

При передаче дискретных сообщений по симметричному каналу с постоянными параметрами скорость передачи информации  $C$  можно выразить через основание кода  $m$ , техническую скорость передачи символов  $V$  и вероятность ошибочного приема символа  $p$  следующим образом:

$$C = V [\log_2 m + p \log_2 p / (m - 1) + (1 - p) \log_2 (1 - p)],$$
$$\beta = (V \sigma^2 / p) [1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p)].$$

(для случая передачи бинарной информации).

При постоянной технической скорости передачи информации, мощности сигнала  $P$ , спектральной интенсивности помехи  $\sigma^2$  коэффициент  $\beta$ -эффективности полностью определяется вероятностью ошибочного приема единичного символа  $p$ . Лучшим будет тот способ передачи, который обеспечит минимум вероятности ошибок (применение методов помехоустойчивого кодирования). Чтобы увеличить  $P$ -мощность принимаемого сигнала, а следовательно, и  $\beta$ -эффективность, следует применять предлагаемый метод косвенной локации сигналов в системе связи в те периоды, когда перечисленные явления, сопровождающие распространение радиоволн указанного диапазона, оказывают сильное неблагоприятное влияние на качество связи. При этом снижаются экономические затраты на эксплуатацию дополнительных приемных трактов в ЗС. Для увеличения стабильности работы системы с обратной связью с использованием метода косвенной локации сигналов можно применять создание области взаимодействия зондирующего и исследуемого сигнала, облучая непосредственно ретранслятор.

Список литературы: 1. Долуханов М. П. Дальнее распространение ультракоротких волн. М., 1961. 324 с. 2. Зенкевич О. А. Энергетические характеристики космических радиолиний. М., 1972. 214 с. 3. Зюко А. Г. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. М., 1972. 243 с. 4. Компанелла Дж., Харрингтон Дж. В. Сети спутниковой связи // Тр. ин-та инж. по электронике и радиоэлектронике, 1985. Т. 72, № 44. С. 84—96. 5. Тузов Г. И. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами. М., 1985. 328 с.

Поступила в редколлегию 29.03.88

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗЫ ВОЛНОВОГО ФРОНТА МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

При рассмотрении вопросов распространения лазерного излучения в технологических установках, формирования заданного распределения интенсивности необходима информация об амплитудно-фазовом распределении в сечении пучка. Применение сложной оптической системы и громоздкость традиционного интерферометрического метода делают его практически непригодным для определения фазы поля с использованием автоматизированных систем комплексного измерения параметров пучка. В то же время в таких системах обычно измеряются распределения интенсивности, а в работе [1] показана принципиальная возможность построения по ним комплексной волновой функции. Наиболее эффективным считается метод с использованием распределений интенсивности  $F_0^2(\omega)$  и  $f_0^2(x)$  в сечениях пучка, поля в которых связаны преобразованием Фурье:

$$F_0^2(\omega) = |\mathcal{F}\{f_0(x) \exp[i\varphi(x)]\}|^2, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ;  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  — координаты в пространствах сигналов и Фурье-образов;  $\varphi(x)$  — искомая фазовая функция;  $\mathcal{F}$  — оператор прямого преобразования Фурье. Для лазерных источников указанные распределения — это модули волновой функции в ближней и дальней зонах излучателя, именно там, где и требуется определение полей в комплексном виде.

Некорректность фазовой проблемы в виде (1) выражается в нарушении требований однозначности и устойчивости решения, что связано с нелинейностью и неаналитическим характером осуществляемых преобразований и с наличием погрешности дискретизации при получении и обработке исходных данных. Если класс возможных фазовых функций не задан, то один из эффективных методов решения обратной задачи (1) — параметрический, когда результат имеет вид разложения по системе базисных функций:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^k a_n \psi_n(x). \quad (2)$$

Теперь количество неизвестных при подстановке в уравнение (1) будет зависеть от размерности  $k$  вектора весовых коэффициентов и выбором базисных функций может быть сделано много меньшим, чем число отсчетов в измеренных распределениях.

Высокая пространственная когерентность излучения предполагает гладкость  $\varphi(x)$  и ограниченность ее носителя и значений. Наличие постоянной составляющей не влияет на вид волновой функции, поэтому условие положительности не ведет к регуляризации

задачи, а условие монотонности чрезмерно ограничивает класс возможных решений. Оптимальным представляется разложение в степенной ряд, когда  $\varphi_n = x_n$ . Его преимущество — простота достижения необходимого компромисса между снижением точности решения и усилением степени регуляризации некорректной задачи (1) путем уменьшения размерности вектора весовых коэффициентов. К тому же линейный набег фазы соответствует пространственному смещению пучка в дальней зоне, а квадратичная составляющая определяет дополнительную к дифракционной расходимость излучения. Следовательно, коэффициенты  $a_1, a_2$  приближенно могут быть вычислены по взаимному расположению и размерам распределений интенсивности до начала решения и использованы в качестве начального приближения.

Подстановка (2) в (1) приводит к системе трансцендентных уравнений относительно весовых коэффициентов. В качестве ее решения была принята такая функция  $\varphi_m(x)$ , которая минимизирует функционал ошибки вида

$$M_m = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(p) - \Phi_m(p)| dp, \quad (3)$$

где  $\Phi(p) = \mathcal{F}\{F_0^2(\omega)\}$ ,  $\Phi_m(p)$  — корреляционная функция для  $f_m(x) = f_0(x) \exp[i\varphi_m(x)]$ . Функционал (3) содержит информацию о двух исходных распределениях интенсивности и в результате фактической ограниченности носителя входящих в него функций обеспечивает сглаживание высокочастотных составляющих спектра  $\varphi_m(x)$ . Размерность  $k$  также должна соответствовать выбранному количеству точек в распределениях и для реализации алгоритма не превосходить десяти при дискретизации по 32 точкам. Функционалы, отличающиеся от (3), содержат  $F_0(\omega)$ ,  $f_0(x)$  в явном виде. Для их определения необходимо на каждом шаге осуществлять преобразование Фурье, что значительно замедляет процесс решения, не давая преимуществ.

В связи с многоэкстремальностью рельефа  $M_m$  решение осуществлялось модифицированным методом сопряженного градиента, известным также как метод Давидона — Флетчера — Пауэлла [3]. Начиная со второго шага в алгоритме учитывается информация о предыдущих итерациях. После определения направления спуска решением задачи одномерной оптимизации определяется размер шага. Такой итерационный процесс обеспечивает быструю сходимость даже при сильно изрезанном рельефе функционала ошибки.

Работа алгоритма оценивалась по скорости сходимости итерационного процесса и устойчивости решения к возмущению исходных данных при фиксированной частоте дискретизации распределений интенсивности. На рис. 1 показана зависимость функционала ошибки от числа итераций при различной размерности вектора весовых коэффициентов для пробной функции  $\varphi(n) = \sin(n\pi/4) - \sin(5\pi/3)$  при девяти отсчетах. С усложнением модели затраты машинного времени быстро возрастают, поэтому восстановление следует начинать с минимально возможной размерности:  $k=2, k=3$ . Критерием

окончания процесса при данном  $k$  целесообразно выбрать уменьшенные скорости сходимости до заданного значения. Если при этом достигнуто установленное предельное значение функционала, то полученный вектор коэффициентов принимается в качестве решения. В противном случае размерность увеличивается и процесс повторяется с учетом уже полученных значений. Нечетность пробной функции на рис. 1 предопределила лучшие результаты для нечетных  $k$ , что также выясняется уже при малых значениях размерности, и дальнейшее усложнение модели может вестись с удвоенным шагом.

Устойчивость решения проверялась наложением на исходные данные в (1) случайной погрешности, равномерно распределенной в диапазоне  $\pm \Delta$ . Результирующая невязка  $M_m$  с увеличением числа итераций  $m$  не убывает ниже уровня  $\Delta$ , причем с ростом погрешности уменьшается различие между начальным и конечным

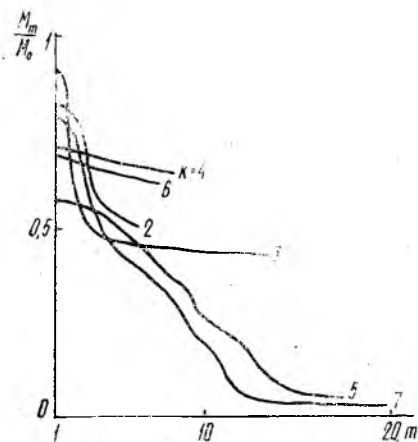


Рис. 1

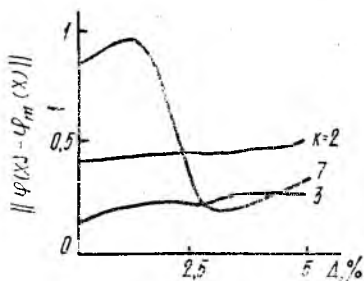


Рис. 2

значениями функционала и между его конечными значениями для разных  $k$ . С ростом  $\Delta$  влияние сложности модели снижается и становится невозможным использование (3) как критерия решения задачи.

На рис. 2 приведена зависимость от исходной ошибки погрешности восстановления:  $\delta = N^{-1} \sum_{n=-N}^N |\Delta\varphi(n) - \Delta\bar{\varphi}|$ , где  $\Delta\varphi(n) = \varphi(n) - \varphi_m(n)$ ,  $\Delta\bar{\varphi}$  — среднее значение невязки. Пробная функция имеет вид  $\varphi(n) = 4 \exp(-0,25n) - (n-1) \exp(-0,5n)$ . Хотя наименьшим является  $M_m$  при  $k=7$ , ошибка восстановления фазовой функции при этом больше, чем для  $k=2$  и  $k=3$ , что свидетельствует о неустойчивости решения с более сложной моделью. Такой эффект является прямым следствием некорректности исходной задачи, и сложность модели не гарантирует достоверности решения. С увеличением погрешности в исходных данных точность решения при  $k=2$  и  $k=3$  несколько снижается. В то же время для  $k=7$  происходит значительное увеличение точности при  $\Delta \approx 2,5\%$  и погрешность выступает в данном случае регуляризирующим фактором.

Сглаживание различий в решениях при наличии ошибок измерения позволяет утверждать, что практически представление фазы в виде степенного ряда перспективно при количестве членов ряда не более пяти-семи. Поэтому метод параметризации эффективен для получения начальных приближений фазовых распределений при дальнейшем итерационном восстановлении алгоритмами типа Гершберга — Сакстона [2], которые мало чувствительны к ошибкам исходных данных и обладают усредняющим действием, однако требуют достаточно близкого к истинному начального приближения.

Список литературы: 1. Ферверда Х. К. Проблема восстановления фазы волнового фронта по амплитудному распределению и функциям когерентности. Обратные задачи в оптике. М., 1984. 200 с. 2. Gonsalves R. A. Phase retrieval from modulus data//J. Opt. Soc. Amer. 1976. Vol. 66, N 9. P. 961 — 964. 3. Риглер А., Педжис Р. Методы оптимизации в оптике//Компьютеры в оптических исследованиях. М., 1983. 488 с.

Поступила в редколлегию 11.11.87

УДК 621.396

Н. И. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, В. А. ТИХОНОВ

#### АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ УЗКОПОЛОСНЫХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

---

Цель статьи — выявление особенностей авторегрессионной модели пассивных помех, знание которых необходимо при определении оптимальной структуры обесцвечивающего фильтра как важной составной части системы селекции движущихся целей. Кроме того, рассматривается специфика определения параметров авторегрессионной модели пассивных помех при наличии регулярного доплеровского смещения частоты.

Пассивные помехи, под которыми понимают отражения зондирующих сигналов РЛС от объектов, не являющихся целями, представляют собой узкополосные случайные процессы. Для пассивных помех, образованных отражениями периодических когерентных импульсных зондирующих сигналов от объектов, имеющих постоянную радиальную составляющую скорости относительно РЛС, характерно наличие регулярного доплеровского смещения несущей частоты и соответственно регулярного набега фазы. В связи с этим пассивные помехи, представляющие собой коррелированный случайный процесс, нельзя получить с помощью классической схемы формирования процесса авторегрессии (рис. 1). Такая схема содержит генератор шума, коммутатор К (замыкаемый с периодом Т), сумматор, Р линий задержек (для каждой линии задержки время задержки  $T_z = T$ ) и Р усилителей с коэффициентами усиления  $\Phi_i$ .

Отсчеты коррелированного дискретного случайного процесса  $z_n$ , являющегося процессом авторегрессии  $P$ -го порядка, связаны между собой следующим соотношением [1]:

$$z_n = \sum_{i=1}^{i=P} \Phi_i z_{n-i} + a_n, \quad (1)$$

где  $P$  — порядок процесса авторегрессии;  $\Phi_i$  — параметры процесса авторегрессии ( $i = 1, \overline{P}$ );  $a_n$  — статистически независимые отсчеты шума, которые получаются путем дискретизации с помощью коммутатора  $K$  выходного эффекта генератора шума. Период дискретизации  $T$  выбирают так, чтобы отсчеты  $a_n$  были статистически независимы, т. е.

$$\overline{a_i a_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \sigma_a^2, & i = j. \end{cases}$$

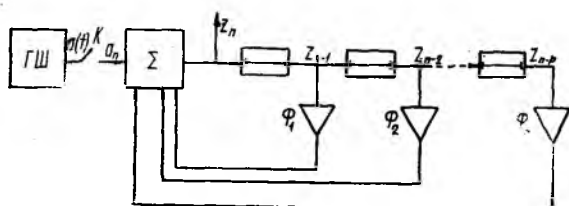


Рис. 1

В данном случае предполагается, что выходной сигнал генератора шума  $a(t)$ , будучи скалярной величиной, полностью характеризуется в каждый момент времени значением и знаком.

Дискретный случайный процесс, описываемый соотношением (1) — коррелированный процесс. Его коэффициенты межпериодной корреляции  $\rho[(n-k)T] = \rho_{n-k} = \rho_i = \overline{z_n z_k} / z_n^{-2}$  зависят от порядка ( $P$ ) и параметров ( $\Phi_i$ ) процесса авторегрессии [АР( $P$ )]. Уравнения связи (2) параметров  $\Phi_i$  процесса АР( $P$ ) с коэффициентами корреляции  $\rho_i$ , называемые уравнениями Юла—Уокера [1], можно получить из соотношения (1) последовательным умножением левой и правой частей на  $z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_{n-P}$ , статистически усредняя и нормируя относительно  $z_n^{-2} = \sigma_z^2$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \Phi_1 + \rho_1 \Phi_2 + \dots + \rho_{P-1} \Phi_P; \\ \rho_2 &= \rho_1 \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \rho_{P-2} \Phi_P; \\ &\vdots \\ \rho_P &= \rho_{P-1} \Phi_1 + \rho_{P-2} \Phi_2 + \dots + \Phi_P. \end{aligned} \quad (2)$$

Как известно, пассивную помеху, образованную отражениями от отражателей выбранного разрешаемого объема в  $n$ -м периоде повторения можно представить в виде

$$z_n(t) = E_n(t) \cos[\omega_0 t + n\Omega_d T + \varphi_n(t)]. \quad (3)$$

Такое напряжение характеризуется медленно флуктуирующей амплитудой  $E_n(t)$ , несущей частотой  $\omega_0$ , набегом фазы  $\Omega_d n T$  за  $n$  периодов

повторения из-за регулярного доплеровского смещения  $\Omega_d$  и медленно флуктуирующей начальной фазой  $\varphi_n(t)$ . Чтобы получить подобное напряжение с помощью аналогичной схемы (см. рис. 1), генератор шума должен вырабатывать напряжение вида  $a(t) = A(t) \times \cos[\omega_0 t + \psi(t)]$ , где  $A(t)$ ,  $\psi(t)$  — медленно флуктуирующие по сравнению с  $\cos \omega_0 t$  амплитуда и начальная фаза. Период коммутации  $T$  выбирается большим интервала корреляции случайного процесса  $a(t)$ . Подавая такое напряжение через временной дискретизатор на один вход сумматора, а на другие  $P$  его входы, задержанные на  $iT$  отсчеты  $z_{n-i}$ , преобразованные по амплитуде с помощью усилителей в  $\Phi_i$  раз и смещенные по фазе с помощью фазовращателя на  $\varphi_{\Phi}$

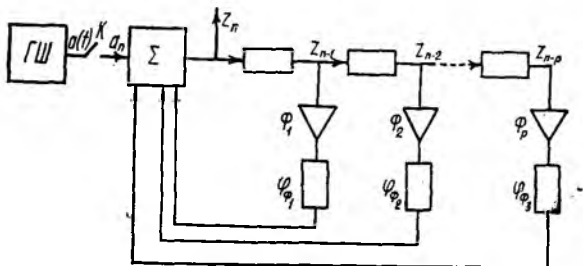


Рис. 2

(рис. 2), получаем выходное напряжение, которое в комплексном виде запишется следующим образом:

$$\dot{z}_n = \Phi_1 e^{j\varphi_{\Phi 1}} \dot{z}_{n-1} + \Phi_2 e^{j\varphi_{\Phi 2}} \dot{z}_{n-2} + \dots + \Phi_P e^{j\varphi_{\Phi P}} \dot{z}_{n-P} + \dot{a}_n. \quad (4)$$

Схема рис. 2 отличается от схемы рис. 1 не только разными генераторами шумов, но и наличием в ней фазовращателей.

Из выражения (3) видно, что регулярный набег фазы пассивной помехи из-за регулярного доплеровского смещения частоты  $\Omega_d$  за один период  $T$  составляют величину  $\alpha = \Omega_d T$ , а за  $i$  периодов —  $i\alpha$ .

Чтобы регулярный сдвиг фазы выходного напряжения  $\dot{z}_n$  схемы (рис. 2) относительно напряжения  $\dot{z}_{n-1}$  составлял  $\alpha$ , очевидно, необходимо, чтобы  $\varphi_{\Phi 1} = \alpha$ ,  $\varphi_{\Phi i} = i\alpha$ .

Обозначив  $\Phi_i e^{j\varphi_{\Phi i}} = \Phi_i$ , выражение (4) для отсчета выходного напряжения в момент времени  $t$   $\dot{z}_n = |\dot{z}_n| e^{j[\omega_0 t + n\alpha + \varphi_n(t)]}$ , формируемого в  $n$ -м периоде, можно представить как

$$\dot{z}_n = \Phi_1 \dot{z}_{n-1} + \Phi_2 \dot{z}_{n-2} + \dots + \Phi_P \dot{z}_{n-P} + \dot{a}_n. \quad (5)$$

После умножения левой и правой частей уравнения (5) последовательно на  $\dot{z}_{n-1}^*$ ,  $\dot{z}_{n-2}^*$ , ...,  $\dot{z}_{n-P}^*$ , статистического усреднения и нормировки получим

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \Phi_1 + \Phi_2 \rho_1^* + \Phi_3 \rho_2^* + \dots + \Phi_P \rho_{P-1}^*; \\ \rho_2 &= \Phi_1 \rho_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \rho_1^* + \dots + \Phi_P \rho_{P-2}^*; \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho_P = \Phi_1 \rho_{P-1} + \Phi_2 \rho_{P-2} + \Phi_3 \rho_{P-3} + \dots + \Phi_P,$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_i &= \hat{\rho}(iT) = \frac{\hat{z}_n^* \hat{z}_k^*}{|\hat{z}_n|^2} = |\hat{\rho}_i| e^{j\alpha} = \rho_i e^{j\alpha}, \quad i = n - k; \\ \hat{\rho}_i^* &= \hat{\rho}^*(iT) = \frac{z_n^* \hat{z}_k}{|\hat{z}_n|^2} = |\hat{\rho}_i| e^{-j\alpha} = \rho_i e^{-j\alpha}, \quad i = n - k.\end{aligned}$$

Поскольку  $\hat{\rho}_i = \rho_i e^{j\alpha} = \rho_i \cos \alpha + j \rho_i \sin \alpha$ , то, обозначая  $\rho_i \cos \alpha = \rho_{ic}$ ,  $\rho_i \sin \alpha = \rho_{is}$ , имеем  $\rho_i = \rho_{ic} + j \rho_{is}$  (7), а  $|\hat{\rho}_i| = \rho_i = \sqrt{\rho_{ic}^2 + \rho_{is}^2}$ . Учитывая выражения для  $\hat{\rho}_i$ ,  $\hat{\rho}_i^*$ ,  $\hat{\Phi}_i$ , уравнения (6) после подстановки соответствующих перемножений и сокращений приводится к системе уравнений (2). Это означает, что по измеренным модулям коэффициентов междупериодной корреляции  $\rho_i$  можно, решив систему уравнений (2), найти параметры АР ( $P$ )  $\hat{\Phi}_i$ , необходимые для определения потенциальных возможностей по обнаружению полезных сигналов на фоне пассивных помех, моделируемых процессами авторегрессии.

Рассмотрим особенности определения значений  $\rho_i$ . В связи с ограниченным быстродействием цифровых систем обработки для возможности работы в реальном масштабе времени дискретизации подвергаются квадратурные составляющие, получаемые на выходах фазовых детекторов, опорные напряжения которых смещены друг относительно друга по фазе на  $90^\circ$ . Очевидно, нормированная автокорреляционная функция выходного напряжения фазового детектора косинусного (синусного) канала  $\rho_{ic} = \rho_i \cos \alpha$ , а нормированная взаимно-корреляционная функция  $\rho_{is} = \rho_i \sin \alpha$ . Зная  $\rho_{ic}$ ,  $\rho_{is}$ , используя (7), имеем  $\rho_i$ .

Представление коррелированных случайных процессов процессами авторегрессии позволяет указывать способ их прогнозирования и находить структуру фильтров предсказания [2]. В частности, такие устройства, используемые для обеления коррелированных помех, являются важной частью систем селекции движущихся целей.

В качестве прогнозируемого значения  $\hat{z}_n$  по  $P$  предыдущим отсчетам  $z_{n-i}$  ( $i = 1, \overline{P}$ ) целесообразно использовать значение  $\hat{z}_n = \sum_{i=1}^{i=P} \times \Phi_i \hat{z}_{n-i}$ .

При обработке в квадратурных каналах прогнозируемое значение определяется следующим образом:

$$\hat{z}_n = \sum_{i=1}^{i=P} (\Phi_{ic} + j\Phi_{is}) [z_{(n-i)c} + jz_{(n-i)s}] = \sum_{i=1}^{i=P} \{ (\Phi_{ic} z_{(n-i)c} - \Phi_{is} z_{(n-i)s}) + j (\Phi_{ic} z_{(n-i)s} + \Phi_{is} z_{(n-i)c}) \}.$$

Для указанного значения  $\hat{z}_n$  дисперсия обеленного процесса будет минимальной и равной  $|\hat{z}_n - z_n|^2 = \sigma_a^2$ .

Итак, найдена обобщенная авторегрессионная модель коррелированных процессов, отличающаяся наличием регулярных фазовых сдвигов, и рассмотрены особенности определения параметров авторегрессии узкополосных коррелированных случайных процессов.

Список литературы: 1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Пер. с англ.; Под ред. В. Ф. Писаренко, М., 1974. Вып. 1. С. 406. 2. Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // Тр.

УДК 621.396

В. Э. ГОЛУБИЦКИЙ, Е. П. ПУТЯТИН, д-р техн. наук, А. И. СИДОРОВ,  
канд. техн. наук, В. И. СТРЕЛЬЧЕНКО

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА, РАССЕЯННОГО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

При создании алгоритмов обработки сигналов, формирующихся в результате рассеяния электромагнитного импульса некоторой случайной шероховатой поверхностью, необходимо знание статистических характеристик флуктуаций этих сигналов. Во многих работах рассматривались вопросы статистической теории рассеяния зондирующих электромагнитных волн, например [1; 2]. Однако полученные результаты в основном относятся к рассеянию монохроматических волн и модулированных гармонических колебаний, что ограничивает их практическое использование.

В работе получена пространственно-временная корреляционная функция флуктуаций сигнала, рассеянного шероховатой поверхностью для произвольного импульсного зондирующего сигнала на основе применения метода касательной плоскости.

Рассеивающую поверхность представим суммой двух функций, соответствующих регулярной и стохастической составляющим поверхности  $\varphi(x, y) = f(x, y) + \xi(x, y)$ , причем  $f(x, y)$  — медленно меняющаяся в пределах облучаемого участка регулярная составляющая поверхности,  $\xi(x, y)$  — стохастическая составляющая, однородна и изотропна в широком смысле. Предполагается, что  $\xi(x, y)$  описывается гауссовским законом распределения с нулевым математическим ожиданием, дисперсией  $\sigma^2$  и автокорреляционной функцией  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — параметры смещения. Неоднородности поверхности, заданные функцией  $\xi(x, y)$ , крупномасштабные по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , где  $\lambda = c/v_0$ ,  $v_0$  — центральная частота в спектре сигнала  $s(t)$ .

Предполагаем, что передающая и приемная антенны находятся в зоне Фраунгофера относительно облучаемой поверхности и совмещены. Зондирующий сигнал падает на шероховатую поверхность под таким углом к  $f(x, y)$ , при котором отсутствуют затенение и переотражение.

Известно [3], что при указанных предположениях флуктуации поля в плоскости приемной антенны описываются гауссовским законом распределения. Следовательно, математическое ожидание и автокорреляционная функция однозначно характеризуют данный стохастический процесс.

Для оценки указанных характеристик воспользуемся спектральным разложением зондирующего сигнала  $\vec{s}(\vec{r}, t)$  по плоским монохроматическим волнам, где  $\vec{r}$  — радиус вектор. Пусть

$$S(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{s}(\vec{r}, t) e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} d\vec{r} dt$$

( $\vec{k}$  — волновой вектор).

Тогда отраженный сигнал в плоскости антенны можно представить в виде

$$s_n(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{k}, \omega) A(E) e^{j\omega t} d\vec{k} d\omega,$$

где  $A$  — оператор, учитывающий преобразование монохроматической волны  $E$  при отражении от шероховатой поверхности. Примем, что на поверхность падает плоская волна, тогда для указанных предположений справедливо приближение метода касательной плоскости [4], и в плоскости антенны

$$A(E) \approx -j \frac{\omega \gamma}{2\pi R_0 c} e^{j\omega \frac{R_0}{c}} \int_{\Omega_0} \exp \left[ j\omega \frac{(u-x)^2 + (v-y)^2}{cR_0} \right] \times \\ \times \exp \left[ j \frac{2\omega}{c} f(x, y) \right] \exp \left[ j \frac{2\omega}{c} \xi(x, y) \right] dx dy, \quad (1)$$

здесь  $\gamma$  — коэффициент отражения поверхности;  $R_0$  — расстояние от центра роскрыва антенны до координатной плоскости  $xoy$ ;  $(u, v)$  — координата точки во вспомогательной системе координат, расположенной в плоскости приемной антенны с центром, совмещенным с центром роскрыва антенны и осями, параллельными осям  $ox$  и  $oy$ ;  $\Omega_0$  — ортогональная проекция облучаемого участка поверхности на плоскость  $xoy$ .

Вычисление математического ожидания и автокорреляционной функции  $s_n(\vec{r}, t)$  по ансамблю реализаций случайной функции  $\xi(x, y)$  сводится к определению этих характеристик для отраженных монохроматических волн. Усредняя (1) и учитывая, что

$$M \left\{ \exp \left[ j \frac{2\omega}{c} \xi(x, y) \right] \right\} = \exp \left( -\frac{2\omega^2 \sigma^2}{c^2} \right),$$

получаем

$$M[A(E)] = -j \frac{\omega}{2\pi R_0 c} e^{j\omega \frac{R_0}{c}} \exp \left( -\frac{2\omega^2 \sigma^2}{c^2} \right) \times \\ \times \int_{\Omega_0} \exp \left[ j\omega \frac{(u-x)^2 + (v-y)^2}{cR_0} \right] \exp \left[ j \frac{2\omega}{c} f(x, y) \right] dx dy.$$

Здесь  $M[\cdot]$  — операция усреднения по ансамблю.

При принятых исходных предположениях  $M[A(E)] \approx 0$ , следовательно,  $M[s_n(\vec{r}, t)] \approx 0$ . Пространственно-временная автокорреляционная функция  $K(u_1, v_1, t_1, u_2, v_2, t_2)$  выражается через корреляционную двухчастотную функцию  $R(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2)$ , где

$$R(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2) = M\{A[E(u_1, v_1, \omega_1)]E^*[E^*(u_2, v_2, \omega_2)]\}. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), с учетом

$$\begin{aligned} & M\left\{\exp\left\{j\frac{2}{c}[\xi(x_1, y_1)\omega_1 - \xi(x_2, y_2)\omega_2]\right\}\right\} = \\ & = \exp\left\{-j\frac{2\sigma^2}{c^2}[\omega_1^2 - 2\rho(\bar{x}, \bar{y})\omega_1\omega_2 + \omega_2^2]\right\}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} R(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2) &= \frac{\omega_1\omega_2\gamma^2}{4\pi R_0^2 c^2} \exp\left(-j\frac{R_0}{c}\Delta\omega\right) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{2\sigma^2}{c^2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)\right] \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \exp\left\{j\frac{1}{cR_0}[(u_1 - x_1)^2 + \right. \\ &+ (v_1 - y_1)^2]\omega_1 - [(u_2 - x_2)^2 + (v_2 - y_2)^2]\omega_2\left.\right\} \exp\left\{j\frac{2}{c}\right. \\ &\times [f(x_1, y_1)\omega_1 - f(x_2, y_2)\omega_2]\left.\right\} \exp\left[\frac{4\sigma^2}{c^2}\rho(\bar{x}_1\bar{y})\omega_1\omega_2\right] \times \\ &\times dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\bar{x} = x_2 - x_1, \quad \bar{y} = y_2 - y_1, \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

При условии, что радиус корреляции функции  $\xi(x, y)$  значительно меньше размеров  $\Omega_0$  и

$$\frac{2\sigma^2\omega_1\omega_2}{c^2} \gg 1,$$

для упрощения (3) воспользуемся методом перевала [4]. Тогда получим

$$\begin{aligned} R(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2) &= \frac{\gamma^2}{8\pi R_0^2 \sigma^2 |\rho_{xx}(0, 0)|} \times \\ &\times \exp\left(-j\frac{R_0}{c}\Delta\omega\right) \exp\left(-2\frac{\sigma^2}{c^2}\Delta\omega^2\right) \int_{\Omega_0} \exp\left\{j\frac{1}{cR_0}[(u_1 - x_1)^2 + \right. \\ &+ (v_1 - y_1)^2]\omega_1 - [(u_2 - x_1)^2 + (v_2 - y_1)^2]\omega_2\left.\right\} \times \\ &\times \exp\left[-j\frac{2}{c}f(x_1, y_1)\Delta\omega\right] dx_1 dy_1. \end{aligned}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x, y, u, v) = \left\{R_0 + \frac{1}{R_0}[(u - x)^2 + (v - y)^2] + 2f(x, y)\right\}l_0,$$

тогда

$$R(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2) = \frac{\gamma^2}{8\pi R_0^2 \sigma^2 |\rho_{xx}(0, 0)|} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{2\sigma^2}{c^2} \Delta\omega^2\right) \int_{\omega_0} \exp\{j[\Phi(x_1, y_1, u_1, v_1)\omega_1 - \Phi(x_1, y_1, u_2, v_2)\omega_2]\} dx_1 dy_1. \quad (4)$$

Связь между пространственно-временной автокорреляционной и двухчастотной корреляционной функциями определяется формулой [5]

$$K(u_1, v_1, t_1, u_2, v_2, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{k}_1, \omega_1) S^*(\vec{k}_2, \omega_2) \times \\ \times R(u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2) e^{j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\vec{k}_1 d\omega_2 d\vec{k}_2, \quad (5)$$

где  $S(\vec{k}, \omega)$  — спектр падающего на рассеивающую поверхность зондирующего сигнала. Подставив (4) в (5) и проделав несложные преобразования, найдем

$$K(u_1, v_1, t_1, u_2, v_2, t_2) = C \int_{\omega_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t + t_1 + \Phi(x_1, y_1, u_1, v_1)) \times \\ \times s(t + t_2 + \Phi(x_1, y_1, u_2, v_2)) \exp\left[-\frac{c^2(t_2 - t_1)^2}{8\sigma^2}\right] dt dx_1 dy_1. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } C = \frac{\gamma^2}{2\pi R_0^2 c \sigma |\rho_{\vec{x}}(0, 0)|}.$$

Как видно из (6), влияние крупномасштабных шероховатостей эквивалентно временному гауссовскому фильтру. Фильтрующее воздействие шероховатостей приводит к уменьшению ширины спектра сигнала. В случае, если частотная полоса  $s(t)$  значительно меньше  $1/2\sigma$ , то экспоненциальный член, учитывающий влияние шероховатостей, можно считать равным  $\delta$ -функции и, следовательно,

$$K(u_1, v_1, t_1, u_2, v_2, t_2) = \frac{2C\sigma\sqrt{\pi}}{c} \int_{\omega_0} s(t_1 + t_2 + \Phi(x, y, u_1, v_1)) s(2t_2 + \Phi(x, y, u_2, v_2)) dx dy.$$

Полученные выражения (6) и (7) позволяют производить корреляционный анализ для импульсных зондирующих сигналов, условия рассеяния которых соответствуют исходным предположениям.

Проведенный сравнительный анализ формулы (6) с результатами, полученными в работах [1; 2], для случая, когда зондирующий сигнал — гармоническое колебание, промодулированное заданной временной финитной функцией, подтверждает ее справедливость.

Список литературы: 1. Зубкович С. Г. Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. М., 1968. 224 с. 2. Андреев Г. А., Потапов А. А. Влияние хаотических неровностей поверхности на отраженный импульсный сигнал миллиметровых волн // Радиотехника и электрон. 1986. Т. 7. С. 1404—1405. 3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую

радиофизику и оптику. М., 1981. 640 с. 4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. Т. 1. 547 с. 5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., 1968. 463 с.

Поступила в редколлегию 28.03.88

УДК 621.371.32

В. В. ЕМЕЛЬЯНОВ, канд. техн. наук, Т. П. ПЕТРУЧЕК, канд. техн. наук

## ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ УКВ РАДИОКАНАЛА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНОЙ

Одним из возможных вариантов построения систем низовой радиосвязи (например, системы оповещения о цунами) может быть система, состоящая из берегового приемного пункта (БПП) и буйковой геофизической станции (БГФС), расположенной на расстоянии 100 км от побережья.

Задача анализа — оценка возможности построения такой системы, обеспечивающей связь между автоматической буйковой геофизической станцией и береговым приемным пунктом, установленным на высоте 750 м над уровнем моря.

Исходные данные для анализа: рабочая частота  $f=400$  МГц; вид модуляции — ОФМ с когерентным способом демодуляции; скорость передачи информации  $B=100$  бод; мощность передатчика БГФС  $P_{\text{пд}}=10$  Вт; вид кода — двоичный, безызбыточный; вероятность ошибки  $P_{\text{ош}}=10^{-4}$ ; антенна БПП — «Волновой канал» с коэффициентом усиления 8 дБ; передающая антенна БГФС — четверть-волновый вертикальный вибратор с высотой подвеса 3 м над уровнем моря.

Согласно [1] вероятность ошибки определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = 0,5 [1 - \Phi^2(\sqrt{2}q)], \quad (1)$$

где  $q = U_{\text{с.эф}}/U_{\text{ш.эф}}$  — отношение эффективных значений напряжений сигнал-шум на входе приемника;  $\Phi(d)$  — интеграл вероятности.

Уровень сигнала на входе приемника, обеспечивающий заданную вероятность ошибки, определяется соотношением  $P_{\text{с.вх}} = q^2 P_{\text{ш.вх}}$  (2) и зависит от уровня входных шумов. Как известно [2], в диапазоне 30...1000 МГц преобладают промышленные помехи в городской и промышленной зонах, космические шумы за ее пределами. Начиная с 200 МГц и выше, существенное влияние оказывают внутренние шумы приемных устройств. Так как в рассматриваемом районе промышленные помехи отсутствуют, то необходимо учитывать только космические и собственные тепловые шумы приемника.

Если приемная антенна не направлена на Солнце, Луну, планеты и другие дискретные космические источники [3], что имеет место в нашем случае, эквивалентная шумовая температура излучения космического пространства мала и космические шумы можно не учитывать. Таким образом, в дальнейших рассуждениях будем

учитывать только собственные шумы приемника. Тогда выражение (2) можно представить в виде

$$P_{с. вх} = q^2 n K T_0 \Delta f_{п}. \quad (3)$$

Здесь  $n = 15$  — коэффициент шума приемника;  $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Вт/Гц;  $T_0 = 300$  К;  $\Delta f_{п} = 25$  кГц — полоса пропускания приемника. Определив согласно [4] значение интеграла вероятности, из выражения (1) найдем значение параметра  $q$ :  $q = 1,951$ . Мощность входного сигнала приемника согласно (3) составит  $P_{с. вх} = 0,582 \cdot 10^{-14}$  Вт. Следовательно, для обеспечения вероятности ошибки  $P_{ош} = 10^{-4}$  уровень полезного сигнала на входе приемника не должен быть ниже уровня  $P_{с. вх} = 0,582 \cdot 10^{-14}$  Вт. Для оценки возможности построения радиоканала между БГФС и береговым приемным пунктом необходимо установить уровень сигнала, создаваемый передатчиком БГФС на входе приемника БПП, и сравнить с величиной, полученной согласно выражению (3). Уровень сигнала на входе приемника БПП можно найти согласно первому уравнению передачи при связи на УКВ [5]:  $P_{с. вх} = P_{пд}/A$  (4), где  $A$  — полные потери сигнала на трассе.

$$A = (4\pi\Gamma_0/\lambda)^2/\eta_{\Phi_1}\eta_{\Phi_2}G_1G_2V_{мин}. \quad (5)$$

Здесь  $\lambda$  — рабочая длина волны;  $r_0$  — расстояние между БГФС и БПП;  $\eta_{\Phi_1}\eta_{\Phi_2}$  — КПД передающего и приемного фидеров;  $G_1G_2$  — коэффициент усиления приемной и передающей антенн;  $V_{мин}$  — множитель ослабления, учитывающий реальные условия распространения радиоволн. Для определения множителя ослабления следует построить продольный профиль интервала и определить тип трассы. Профиль интервала строится относительно условного нулевого уровня, описываемого параболой [6]:

$$Z = \Gamma_0\Gamma(1 - \Gamma/\Gamma_0)/2R, \quad (6)$$

где  $\Gamma_0$  — расстояние между БГФС и БПП;  $\Gamma$  — расстояние от БПП до точки, в которой получают величину  $Z$ ;  $R$  — радиус Земли. При анализе необходимо учитывать то обстоятельство, что трасса проходит над водной поверхностью океана, которая может быть как спокойной, так и взволнованной.

Из рисунка продольного профиля трассы, который здесь не приводится, следует, что точка отражения находится на расстоянии 4 км от БГФС. Тогда относительная координата точки отражения  $K = \Gamma/\Gamma_0 = 0,96$ . Просвет  $H_0$ , при котором напряженность поля в точке приема равна напряженности поля свободного пространства, определяется выражением [6]

$$H_0 = \sqrt{\Gamma_0\lambda K(1 - K)/3}. \quad (7)$$

Приращение просвета  $\Delta H(g)$  за счет влияния климатических условий [6] равно  $\Delta H(g) = -(\Gamma_0^2/4) gK(1 - K)$  (8), где  $g$  — вертикальный градиент диэлектрической проницаемости. Для данного района [6] в наиболее неблагоприятные летние месяцы  $g = -11 \cdot 10^{-8}$  1/М.

Просвет с учетом климатических условий  $H(g)$  определяется выражением  $H(g) = H(0) + \Delta H(g)$  (9), в котором  $H(0)$  — просвет, определяемый из продольного профиля трассы без учета влияния  $g$ .

В результате проведенных расчетов получены следующие значения:

$$K = 0,96; H_0 = 31 \text{ м}; \Delta H(g) = 10,5 \text{ м}; H(0) = H = 4 \text{ м}.$$

Полученные соотношения показывают, что при высоте волны порядка 4 м трасса полуоткрытая, больше 4 м — закрытая. Следовательно, расчет множителя ослабления необходимо произвести для полуоткрытой и закрытой трасс. На полуоткрытых и закрытых трассах множитель ослабления имеет монотонный характер, обусловленный процессом дифракции радиоволн [6]. Множитель ослабления с учетом реального рельефа местности определяется с помощью приближенных методов. Они основаны на результатах работ В. А. Фока по теории дифракции радиоволн с учетом аппроксимации реальных препятствий на трассе сферами, радиус которых определяется конкретным видом препятствия. В длинноволновой части дециметрового диапазона и на метровых волнах для нахождения множителя ослабления рекомендуется рассчитывать контур минимальной существенной зоны и построить его относительно прямой передающая антенна — приемная антенна [6]. Построив контур минимальной существенной зоны, получим параметры аппроксимирующей сферы  $\Gamma$  и  $\Delta Y$  хорды и высоты сегмента аппроксимирующей сферы, определяющие радиус этой сферы  $\mu$ .

Значения  $\mu$  с учетом геометрических характеристик трассы находятся произведением  $\mu = \mu_0 \mu(g)$  (10), в котором

$$\begin{aligned} \mu_0 &\approx \sqrt[6]{64\pi\alpha/3} \sqrt[3]{K^2(1-K)^2/L}; \\ \mu(g) &= \sqrt[3]{1-d\Delta p(g)} \sqrt[4]{1+dp(g)/1-d\Delta p(g)}; \\ \alpha &= \Delta Y/H_0; L = \Gamma/\Gamma_0; d = L^2/4\alpha K(1-K); \\ \Delta p(g) &= \Delta H(g)/H_0; p(g) = H(g)/H_0. \end{aligned}$$

Для полуоткрытой трассы имеем  $\alpha = 0,322$ ;  $d = 2,095$ ;  $L = 0,322$ ;  $\Delta p(g) = 0,34$ ;  $p(g) = 0,469$ ;  $\mu(g) = 1$ ;  $\mu = 0,334$ . Следовательно,  $\mu \approx \mu_0 = 0,334$ . Для закрытой трассы  $d = 2,095$ ;  $\Delta p(g) = 0,34$ ;  $p(g) = 0,276$ ;  $\mu_0 \approx 0,334$ ;  $\mu(g) = 0,871$ ;  $\mu = 0,29$ . Известно [6], что на полуоткрытых и закрытых трассах множитель ослабления существенно зависит от величины дифракции радиоволн вокруг препятствий, имеющихся на трассе, причем в точку приема будет попадать только прямая волна. Множитель ослабления, дБ, рассчитывается по дифракционной формуле  $V = V_0 \text{ дБ} [1 - p(g)]$  (11), где  $V_0 \text{ дБ}$  — значение модуля множителя ослабления на касательной трассе ( $H = 0$ ) — определяется по [6] в зависимости от параметра  $\mu$  и при  $p(g) = 0$ . Для полуоткрытой трассы  $V_0 = -42$  дБ, для закрытой  $V_0 = -47$  дБ. Тогда множитель ослабления для полуоткрытой и закрытой трасс соответственно  $V = -22,3$  дБ и  $V = -34$  дБ. Основные потери передачи в свободном пространстве определяются

выражением  $A_{св.о} = (4\pi G_0/\lambda)^2$  (12) и составляют 124,46 дБ. Общая длина передающего и приемного фидеров составляет  $L_{\phi} = L_{\phi_1} + L_{\phi_2} = 15$  м. В качестве фидера используется коаксиальный кабель типа РК-75-13-12. Потери в фидере составляют  $\rho_{\phi} = 0,9$  дБ. Мощность сигнала на входе приемника определяется соотношением

$$P_{вх. пр} \text{ дБ Вт} = P_{\text{пд}} + G_{\text{пер}} + G_{\text{пр}} - \rho_{\phi} - A_{св.о} + V. \quad (13)$$

Для полукрытой и закрытой трасс уровень входного сигнала приемника соответственно составляет

$$P_{вх. пр} = -129,66 \text{ дБ Вт} (10,8 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}).$$

$$P_{вх. пр} = -141,36 \text{ дБ Вт} (0,731 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}).$$

Таким образом, проведенный анализ показывает, что уровень сигнала на входе приемного устройства БПП превышает уровень, необходимый для обеспечения заданной вероятности ошибки  $P_{ош} = 10^{-4}$ . Следовательно, построить УКВ радиоканал в нашем случае можно лишь при наличии аппаратуры связи нового поколения, имеющей чувствительность приемного устройства не ниже  $0,73 \cdot 10^{-14}$  Вт.

Список литературы: 1. Петрович Н. Т. Передача дискретной информации в каналах с фазовой манипуляцией. М., 1965. 262 с. 2. Мяковский Г. М. Справочник. Системы производственной радиосвязи. М., 1980. 216 с. 3. Справочник по спутниковой связи и вещанию / Под ред. Л. Я. Кантора. М., 1983. 267 с. 4. Андре Анго. Математика для электрорадиоинженеров. М., 1965. 720 с. 5. Смирнов В. А. Основы радиосвязи на ультракоротких волнах. М., 1957. 819 с. Справочник по радиорелейной связи, М., 1981. 405 с.

Поступила в редколлегию 28.03.88

УДК 621.391.176

С. И. ПРИХОДЬКО, канд. техн. наук, А. Г. СНИСАРЕНКО

#### ПРИВЕДЕНИЕ ДВОИЧНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ К НЕДВОИЧНЫМ СУЖЕННЫМ ЦИКЛИЧЕСКИМ КОДАМ

При многих положительных свойствах сверточных кодов (СК), находящихся все более широкое применение на практике, им присущ такой недостаток, как сложность их выбора и построения [1].

Методы построения порождающих многочленов СК можно разделить на две группы: переборные и конструктивные. Первая группа базируется на применении компьютеров, что даже с учетом тенденций их развития представляет значительные трудности в инженерной практике. Методы, имеющие конструктивный характер, обладают тем недостатком, что с их помощью можно получить СК только с ограниченным спектром свойств и характеристик. Причина этого заключается в том, что СК плохо описываются математически, в отличие, например, от циклических кодов. Отсюда вытекает задача математического описания СК, которое впоследствии стало бы основой для разработки конструктивных методов их построения.

Для решения задачи приведения математической модели, описывающей процесс кодирования информации двоичным сверточным кодером, к математической модели кодера какого-либо известного кода рассмотрим двоичный несистематический сверточный  $(n_0, k_0)$  код со скоростью  $R = 1/2$ . Пусть многочлен

$$M(x) = a_{k_0} x^{k_0} + a_{k_0-1} x^{k_0-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

— информационная последовательность, подлежащая кодированию (в общем случае многочлен  $M(x)$  может быть бесконечной длины), а многочлены

$$P_1(x) = a_{r_{0_1}} x^{r_{0_1}} + a_{r_{0_1}-1} x^{r_{0_1}-1} + \dots + a_1 + a_{0_1}; \quad (2)$$

$$P_2(x) = a_{r_{0_2}} x^{r_{0_2}} + a_{r_{0_2}-1} x^{r_{0_2}-1} + \dots + a_1 + a_{0_2}.$$

будут порождающими многочленами данного сверточного кода, где коэффициенты при  $x$  в выражениях (1), (2) — элементы поля  $GF(2)$ . Пусть многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  вида (2) будут одинаковой степени, т. е. в случае, если один из многочленов имеет меньший показатель степени, то добавим в этом многочлене необходимое до большего количества число ненулевых коэффициентов при  $x$ . Тогда запишем

$$P_1(x) = a_{r_{0_1}} x^{r_{0_1}} + a_{r_{0_1}-1} x^{r_{0_1}-1} + \dots + a_1 x + a_{0_1}; \quad (3)$$

$$P_2(x) = a_{r_{0_2}} x^{r_{0_2}} + a_{r_{0_2}-1} x^{r_{0_2}-1} + \dots + a_1 x + a_{0_2}.$$

Процесс кодирования информации рассматриваемым сверточным кодером представим следующим образом. Информационная последовательность  $M(x)$  вида (1) поступает в кодер сверточного кода, где происходит ее умножение на многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  вида (3) и получение последовательностей  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  соответственно

$$F_1(x) = M(x) P_1(x) = S_{k_0} + r_{0_1} x^{k_0+r_{0_1}} + S_{k_0+r_{0_1}-1} x^{k_0+r_{0_1}-1} + \dots + S_1 x + S_{0_1};$$

$$F_2(x) = M(x) P_2(x) = t_{k_0+r_{0_2}} x^{k_0+r_{0_2}} + t_{k_0+r_{0_2}-1} x^{k_0+r_{0_2}-1} + \dots + t_1 x + t_{0_2},$$

где

$$S_i = \sum_{l+j=i} (a_c)_j (a_n)_l, \quad t_i = \sum_{l+j=i} (a_l)_j (a_n)_i; \quad (4)$$

$$i = 0, 1, \dots, k_0 + r_{0_j} - 1, k_0 + r_{0_j}; \quad j = 1, 2; \quad c = 0, 1, \dots, k_0 - 1, k_0;$$

$$h = 0, 1, \dots, r_{0_1} - 1, r_{0_1}; \quad p = 0, 1, \dots, r_{0_2} - 1, r_{0_2},$$

т. е. коэффициенты при  $x$  — результат произведения таких коэффициентов при  $x$  у многочленов  $M(x) P_1(x)$  и  $P_2(x) M(x)$ , сумма индексов которых равна  $i$ , и сложения всех таких произведений. Далее, на выходе кодера происходит перемежение выходных последовательностей  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  и получение последовательности  $F_3(x)$ ,

т. е. осуществляется попарное считывание коэффициентов в выражениях для  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  вида (4) при одинаковых степенях  $x$ :

$$F_3(x) = (S_{k_0+r_{0_1}} x^{k_0+r_{0_1}}, (t_{k_0+r_{0_2}} x^{k_0+r_{0_2}}) + (S_{k_0+r_{0_1}-1} x^{k_0+r_{0_1}-1}), (t_{k_0+r_{0_1}-1} x^{k_0+r_{0_1}-1}) + \dots + (S_{1_1} x), t_{1_1} x) + S_{0_1}, t_{0_1}. \quad (5)$$

Так как  $k_0 + r_0 = n_0$ , то

$$F_3(x) = [(S_{k_0+r_{0_1}}, (t_{k_0+r_{0_2}})] x^{n_0} + [(S_{k_0+r_{0_1}-1}, (t_{k_0+r_{0_2}-1})] x^{n_0-1} + \dots + [(S_{1_1}, (t_{1_1})] x + S_{0_1}, t_{0_1}. \quad (6)$$

Проанализируем коэффициенты при  $x$  в выражении (6). Из (4) видно, что коэффициенты  $S_i, t_i$  — элементы поля  $GF(2)$ , причем каждый из коэффициентов  $S_i, t_i$  содержит по одному элементу поля  $GF(2)$ . Поскольку в (6) содержится по два коэффициента  $t_i$  и  $S_i$ , то, следовательно, при каждом значении  $x$  в (6), определяющем выходную последовательность сверточного кодера, будет находиться по два элемента поля  $GF(2)$ .

Проведем аналогичные рассуждения для двоичного  $(n_0, k_0)$  сверточного кода со скоростью  $R = 1/3$ . В этом случае в выражении (3) будет по три порождающих многочлена сверточного кода  $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ . Отсюда и в соотношении (6) будет при соответствующих степенях  $x$  по три элемента поля  $GF(2)$ . Таким образом, по индукции, если скорость двоичного  $(n_0, k_0)$  кода  $R = 1/m$ , то в выражении (6) будет по  $m$  элементов поля  $GF(2)$  при соответствующих степенях  $x$ :

$$F_m(x) = (T_1, T_2, \dots, T_m) x^{n_0} + (T_1, T_2, \dots, T_m) x^{n_0-1} + \dots + (T_1, T_2, \dots, T_m) x + (T_1, T_2, \dots, T_m), \quad (7)$$

где  $T_i$  — коэффициенты при  $x$  вида (4) для  $j = 1, 2, \dots, m$  и  $i = 1, 2, \dots, m$ . Однако любые  $m$  элементов поля  $GF(2^n)$  можно выразить одним элементом поля  $GF(2^m)$ , так как элементы любого поля  $GF(q)$ , где  $q = p^m$ , а  $p$  — простое число, можно представить  $m$ -многочленами с коэффициентами из поля  $GF(p)$ . Тогда, обозначив в (7) коэффициенты при  $x$  через  $q_i$ , получим

$$F_c(x) = q_{n_0} x^{n_0} + q_{n_0-1} x^{n_0-1} + \dots + q_1 x + q_0. \quad (8)$$

Здесь  $q_i$  — элементы поля  $GF(2^m)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ . Коэффициенты при  $x$  в выражении (8), определяющем выходную последовательность сверточного кодера, будут определяться коэффициентами при  $x$  в информационной последовательности  $M(x)$  вида (1) и коэффициентами при  $x$  в порождающих сверточный код многочленах  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$  вида (3). Пусть теперь  $M(x) = 1$ , т. е. приравняем к нулю все коэффициенты при  $x$ , кроме  $x^0$ . Тогда коэффициенты при  $x$  в многочленах  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$  — вида (3). Следовательно, выражение (8) в этом случае будет определять сверточный  $(n_0, k_0)$  код над полем  $GF(2)$  со скоростью  $R = 1/m$ , т. е. будет определять его порождающие многочлены. Отсюда вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. Порождающие многочлены сверточного  $(n_0, k_0)$  кода над полем  $GF(2)$   $P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$  со скоростью  $R = 1/m$  вида (3) можно представить одним многочленом  $F_c(x)$  вида (8) над полем  $GF(2^m)$ , полностью определяющим тот же самый сверточный код.

Назовем такое представление порождающих многочленов двоичного сверточного кода обобщенным представлением. Установим теперь связь между двоичными сверточными кодами и циклическими кодами на основании обобщенного представления двоичных сверточных кодов. Рассмотрим для этого недвоичный циклический  $(n, k)$  код, порождающий многочлен которого выбран из поля разложения двухчлена  $(x^n - 1)$  над полем  $GF(2^m)$ , где  $m$  — мультипликативный порядок 2 по модулю  $n$ :

$$G(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (9)$$

Пусть

$$M(x) = a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (10)$$

— информационный многочлен, подлежащий кодированию. Тогда выходная последовательность или кодовая последовательность имеет вид

$$F(x) = M(x)G(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (11)$$

где коэффициенты при  $x$  в выражениях (9) — (11) — элементы поля  $GF(2^m)$ . Циклический  $(n, k)$  код над полем  $GF(2^m)$  можно также задать с помощью порождающей матрицы

$$G = \begin{bmatrix} a_r & a_{r-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_r & a_{r-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 & a_0 & \dots \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Предпримем теперь следующее. Пусть множество коэффициентов при  $x$  у многочлена, подлежащего кодированию циклическим кодом,  $M(x)$  вида (10) будет ограничено, т. е. пусть кодированию подлежат только многочлены с коэффициентами при  $x$ , принадлежащими только полю  $GF(2)$ . Однако при этом на выходе кодера получим множество кодовых слов  $F(x)$  вида (11), у которых коэффициенты при  $x$  по-прежнему принадлежат полю  $GF(2^m)$ , хотя возможно, что у части кодовых многочленов коэффициенты при  $x$  принадлежат только полю  $GF(2)$ . Назовем такой код суженным  $(n_c, k_c)$  недвоичным кодом вида (13).

Утверждение 2. Если многочлены  $G(x)$  вида (9) порождают циклический  $(n, k)$  код над полем  $GF(2^m)$  с кодовым расстоянием  $d$ , то найденный из него суженный циклический  $(n_c, k_c)$  код вида (13) над полем  $GF(2^m)$  с порождающим многочленом  $G_c(x) = G(x)$  и кодовым расстоянием  $d$  обладает  $d_c \geq d$ .

Действительно, обозначим через  $V_1$  и  $V_2$  пространства кодовых слов для циклического и суженного циклического кодов. Так как

множество кодовых слов суженного циклического кода получается с помощью введения ограничения на множество кодовых слов циклического кода, то пространство  $V_2$  является подпространством  $V_1$ . Пусть  $V'_1$  — подпространство кодовых слов с минимальным весом  $d$  пространства  $V_1$ . Тогда пространство  $V_2$  может включать в себя полностью, частично или вообще не включать пространство  $V'_1$ . Следовательно, выбрав пространство  $V_2$  так, чтобы оно не включало в себя подпространство  $V'_1$ , можно тем самым увеличить кодовое расстояние суженного циклического кода  $d_c$  или оставить его равным  $d$ , но уменьшить его невозможно, поскольку  $V_1, V_2$  — подпространства одного пространства  $V_1$ . Отсюда суженный циклический код будет обладать максимально возможным кодовым расстоянием  $d_c$  в том случае, если кодовые слова, имеющие вес не менее  $d_c$ , в циклическом коде есть результат кодирования информационных многочленов, у которых коэффициенты при  $x$  будут принадлежать только полю  $GF(2)$ .

Вернемся к рассмотренному двоичному сверточному  $(n_0, k_0)$  коду со скоростью  $R = 1/m$ . Зададим его с помощью матрицы

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & \dots & D_n \\ 0 & D_0 & D_1 & \dots & D_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & D_0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $n$  — наибольшая из степеней, порождающих код многочленов, а  $D_i$  — подматрица вида

$$D_i = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n_0}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n_0}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{k_0} & \dots & \dots & a_{n_0}^{k_0} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

элементы которой — коэффициенты при  $x$  в порождающих многочленах вида (2). Для сверточных кодов со скоростью  $R = 1/m$  матрицу  $D_i$  вида (15) представим в виде  $D_i = |a_1 a_2 \dots a_{n_0}|$  (16). Для несистематического сверточного кода число  $m$  определяется количеством порождающих код многочленов, т. е.  $n_0 = m$ . Отсюда

$$D_i'' = |a_1 a_2 \dots a_m|. \quad (17)$$

Проанализируем матрицу  $D_i''$  вида (17). Каждый элемент матрицы  $a_i$  принадлежит полю  $GF(2)$  и является коэффициентом при соответствующей степени  $x$  в порождающих сверточный код многочленах вида (2) или, что то же самое, каждая подматрица  $D_i''$  вида (17) матрицы  $D$  вида (14) — совокупность коэффициентов при определенной степени  $x$  всех порождающих код многочленов. Следовательно, на основании утверждения 1 каждую подматрицу  $D_i''$  вида (17) мат-

рицы  $D$  вида (14) можно заменить на соответствующий элемент  $a^*$  поля  $GF(2^m)$  и получить матрицу

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (18)$$

При сравнении матрицы  $G$  вида (12) и матрицы  $P$  вида (18) можно заметить, что при ограничении числа строк и столбцов в матрице  $P$  матрицы будут одинаковыми. Иными словами, если эти матрицы одной размерности и обладают одними и теми же ненулевыми элементами, то они могут быть порождающими матрицами. Однако по условию матрица  $G$  вида (12) задает суженный циклический код вида (13), а матрица  $P$  вида (18) — порождающая матрица двоичного сверточного  $(n_0, k_0)$  кода со скоростью  $R=1/m$  над полем  $GF(2)$ .

Утверждение 3. Если многочлен  $G(x)$  вида (9) порождает циклический  $(n, k)$  код над полем  $GF(2^m)$ , то полученный из него суженный циклический  $(n_c, k_c)$  код вида (13) полностью задает сверточный  $(n_0, k_0)$  код над полем  $GF(2)$  со скоростью  $R=1/m$  и порождающим многочленом  $F_c(x)$  вида (8), причем  $G(x) = F_c(x)$ .

На основании Утверждения 3 работу двоичного сверточного кодера со скоростью  $R=1/m$  можно описать следующим образом. Пусть задан циклический  $(n, k)$  код над полем  $GF(2^m)$ . Кодер такого кода реализуем с помощью регистра сдвига  $\epsilon$  длиной, определяемой степенью порождающего код многочлена  $G(x)$  вида (9), связанного по модулю поля  $GF(2^m)$ , количество и связи которого с регистром сдвига определяются многочленом  $G(x)$ . На вход кодера поступают информационные многочлены  $M(x)$  вида (10) с коэффициентами из поля  $GF(2^m)$ . В кодере происходит умножение многочлена  $M(x)$  на многочлен  $G(x)$  и получение многочлена  $F(x)$  вида (11) с коэффициентами из поля  $GF(2^m)$ . Далее многочлен  $F(x)$  представляется в виде многочлена над полем  $GF(2)$ , при этом каждый элемент поля  $GF(2^m)$  задается последовательностью из  $m$  элементов поля  $GF(2)$ . Приведенная к двоичному  $F(x)$  представляет собой кодовую последовательность  $F_3(x)$  вида (6) сверточного  $(n_0, k_0)$  кода над полем  $GF(2)$ , соответствующую переданной входной последовательности  $M(x)$  вида (10) с коэффициентами из поля  $GF(2)$ . Таким образом мы реализуем процесс кодирования информации двоичным сверточным кодером. Если циклический  $(n, k)$  код существует над полем  $GF(2^m)$ , то на каждый входной символ кодера, являющегося элементом поля  $GF(2)$ , на выходе кодера появится  $m$  символов, принадлежащих полю  $GF(2)$ , т. е. скорость сверточного кода будет равна  $R=1/m$ .

Итак, на основании утверждения 3 можно получать порождающие многочлены сверточных кодов над полем  $GF(2)$  со скоростью  $R=1/m$ , используя для этого порождающие многочлены циклических кодов над полем  $GF(2^m)$ . Вместе с тем Утверждение 3 не определяет значение кодового расстояния полученного при этом двоичного

сверточного кода. Отсюда возникает задача выбора порождающих многочленов недвоичных циклических кодов для нахождения порождающих многочленов двоичных сверточных кодов с заранее заданными характеристиками и свойствами.

Список литературы: 1. *Нейфак А. Э.* Сверточные коды для передачи дискретной информации. М., 1979. 222 с. 2. *Теория кодирования* / Т. Касами, Н. Токура, Е. Ивадари, Я. Инагаки. М., 1978. 576 с. 3. *Кларк Дж., Кейн Дж.* Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. М., 1987. 392 с.

Поступила в редколлегию 29.01.88

УДК 621.371.334

Н. Н. ГОРОБЕЦ, д-р физ.-мат. наук, Н. П. ЕЛИСЕЕВА

### ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ИДЕАЛЬНО ПОДВОДЯЩЕЙ НАКЛОННОЙ ПОЛОСЕ

Задача дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей полосе [1; 2] рассматривалась методом последовательных дифракций в приближении дальней зоны. Вблизи границ областей свет — тень исползовались полутеневые поля, вдали — лучевые разложения дифрагированных волн. Переход от лучевых разложений к равномерным полутеневым полям вызывает трудности при выполнении расчетов, особенно в задачах, где полоса — только фрагмент сложной геометрической структуры.

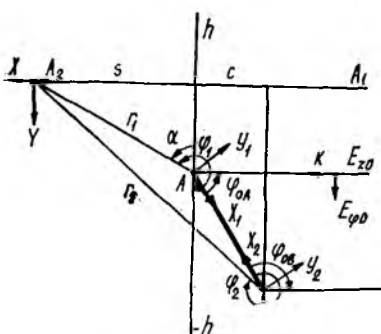


Рис. 1

визирования  $A_1A_2$ . Вектор  $\vec{k}$  перпендикулярен к краям полосы. Линия пересечения дифрагирующей полосы с образующими, параллельными оси  $Z$  декартовой системы координат, с плоскостью  $XU$  представляет отрезок  $AB$ . Координата края  $A$  вдоль нормали к линии визирования изменяется в пределах от  $-h/\lambda$  до  $h/\lambda$  (рис. 1).

Как следует из геометрии задачи на рис. 1, точка наблюдения  $A_2$  находится на границах свет—тень падающего и отраженного гео-

метрооптических (ГО) полей относительно краев А и В и на границе свет—тьнь краевых волн с края В при следующих положениях  $h$  верхнего края полосы относительно линии визирования  $A_1A_2$ :

$$h_{A_{ГР}} = 0; \quad h_{A_{ГР}}^* = s \operatorname{tg} 2\gamma; \quad h_{B_{ГР}} = l \cos \gamma;$$

$$h_{B_{ГР}}^* = h_{A_{ГР}} - \frac{l \cos \gamma}{\cos 2\gamma}; \quad h_{BA_{ГР}} = s \operatorname{ctg} \gamma.$$

По сравнению со случаем дифракции на полуплоскости [3] появилась граница свет—тьнь для краевых волн  $h_{BA_{ГР}}$ , являющаяся продолжением полосы за край А. Здесь поле волны вторичной дифракции с края А ( $U_{BA}$ ) компенсируют разрыв поля волны первичной дифракции с края В ( $U_B$ ). Функция Грина для задачи при углах наблюдения вблизи продолжения полосы за край А записывается как сумма  $U = U_{ГО}\chi + U_{ГО}^*\chi + (U_B + U_{BA}) + U_A$  (1), где  $U_{ГО}$ ,  $U_{ГО}^*$  — ГО поля падающей и отраженной волн;  $\chi$  — коэффициент отсеки, равный единице или нулю в областях света или тени ГО волн;  $U_A$  — поле первичной дифракции с края А;  $(U_B + U_{BA})$  — полутеневое поле волн с края В, дифрагированных на крае А. При удалении от  $h_{BA_{ГР}}$  полутеневое поле представляет суперпозицию полей волн первичной и вторичной дифракций с краев В и А. Для описания физических процессов взаимодействия краев полосы введем систему виртуальных дифракционных излучателей (ВДИ): ВДИ 1 — источник первичной цилиндрической краевой волны с центром на крае А и полем  $U_A + U_A^*$  (дифрагируют падающая и отраженная ГО волны на крае А); ВДИ 2 — источник первичной цилиндрической краевой волны с центром на крае В и полем  $U_B + U_B^*$  (дифрагируют падающая и отраженная ГО волны на кромке В), ВДИ 3 — источник вторичной цилиндрической волны с центром на крае А и полем  $U_{BA}$  (дифрагирует первичная краевая волна с кромки В на крае А). Каждая краевая волна задается в своей системе координат с центром в источнике волны, поэтому введем наряду с общей прямоугольной системой координат  $XYZ$  в точке наблюдения  $A_2$  декартовы системы  $X_1Y_1Z_1$  и  $X_2Y_2Z_2$  на краях А и В соответственно.

При описании полей ВДИ 1, 2 используем строгое представление поля первичной дифракции на крае полуплоскости. Для падающей волны на крае В оно имеет вид

$$U_B = \pm \frac{\Phi(\xi/\sqrt{i}) - 1}{2} U_{ГО}. \quad (2)$$

Здесь

$$\Phi(\xi/\sqrt{i}) = (2e^{-i\pi/4}/\sqrt{\pi}) \int_0^{\xi} e^{it^2} dt; \quad \xi = \sqrt{2kr_2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_{0B}}{2},$$

верхний знак берется в области света падающего поля, нижний — в области его тени. Компоненты дифрагированных и ГО полей в точке наблюдения записаны в работе [4], в которых в исследуемом

случае необходимо учесть сдвиг по фазе, равный  $-kc$ , для волн, падающих на край В относительно края А.

Стандартная форма полутеневого поля ( $U_B + U_{BA}$ ) с точностью до регулярной цилиндрической волны с центром в вершине А и фронтом  $r_1 + l = s_{BA}$  совпадает с произведением поля падающей волны  $U_B$  на интеграл Френеля:

$$\bar{U} = U_B + U_{BA} = U_B F(\xi_{BA}) + e^{iks_{BA}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{l}{k}\right)^{\kappa+1/2} B_{\kappa_2}, \quad (3)$$

$$\text{где } F(\xi_{BA}) = \frac{\pm \Phi(|\xi_{BA}|/\sqrt{i}) + 1}{2}; \quad \xi_{BA} = \sqrt{k(s_{BA} - s_B)} = \sqrt{k(l + r_1 - r_2)}. \quad (4)$$

Из (3) с учетом (4) получим равномерную вблизи продолжения полосы асимптотику поля вторичной волны  $U_{BA}$  (поле ВДИ 3 от волны с края В, идущей по одной из сторон полосы):

$$U_{BA} = \bar{U} - U_B \chi = \pm U_B \frac{\Phi(|\xi_{BA}|/\sqrt{i}) - 1}{2} + e^{iks_{BA}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{l}{k}\right)^{\kappa+1/2} B_{\kappa_2}. \quad (5)$$

Вдали от направления продолжения полосы эта асимптотика должна перейти в лучевое разложение волны вторичной дифракции, поэтому коэффициенты  $B_{\kappa_2}$  находятся методом асимптотического сшивания с ним [4]. Чтобы использовать (5) для равномерного описания поля ВДИ 3 при всех углах наблюдения, учтем, что  $U_B =$  разрывная функция, меняющая знак при переходе через границы свет—тьень ГО поля, а вторым разрывным слагаемым можно пренебречь ввиду его малости. Согласно этому получим

$$U_{BA} = \pm \left[ \pm U_B \frac{\Phi(|\xi_{BA}|/\sqrt{i}) - 1}{2} \right], \quad (6)$$

где первый знак «+» берется в области света ГО поля, второй — в области света волны первичной дифракции, знак «—» — в области тени того или другого поля. В случае полосы по обеим ее сторонам распространяются две волны первичной дифракции с края В и образуются две равные по амплитуде волны вторичной дифракции с центром на крае А, поэтому равномерной асимптотике полного поля ВДИ 3 соответствует удвоенное значение (6), а полутеневое поле в (1) имеет вид

$$U_B + U_{BA} = U_B \Phi(|\xi_{BA}|/\sqrt{i}) + 2e^{iks_{BA}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{l}{k}\right)^{\kappa+1/2} B_{\kappa_2}. \quad (7)$$

Равномерная асимптотика электрического поля ВДИ 3 при Е-поляризации падающей волны совпадает с (6), а при Н-поляризации

компоненты находятся из уравнений Максвелла дифференцированием (6):

$$E_{\varphi_{BA}}(r_1, \varphi_1) = \left[ E_{\varphi_B}(r_2, \varphi_2) \frac{\partial r_2}{\partial r_1} - E_{r_B}(r_2, \varphi_2) r_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r_1} \right] \times \\ \times [\Phi(|\xi_{BA}|/V\bar{i}) - 1] + H_{z_B} \frac{\partial \Phi(|\xi_{BA}|/V\bar{i})}{ik \partial r_1}, \quad (8)$$

$$E_{r_{BA}}(r_1, \varphi_1) = \left[ -E_{\varphi_B}(r_2, \varphi_2) \frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} + E_{r_B}(r_2, \varphi_2) \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} \right] \times \\ \times [\Phi(|\xi_{BA}|/V\bar{i}) - 1] + H_{z_B} \left( \frac{i}{kr_1} \right) \frac{\partial \Phi(|\xi_{BA}|/V\bar{i})}{\partial \varphi_1}.$$

При скользящем наблюдении  $\varphi_1 = \pi$  аргумент  $\xi_{BA} = 0$ ,  $\Phi(0) = 0$  и тогда полное поле (1) запишется так:

$$U = U_{ГО} + U_A + 2e^{ik(l+r_1)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left( \frac{i}{k} \right)^{\kappa+1/2} B_{\kappa_2}. \quad (9)$$

Здесь для Е-поляризации падающей ГО волны

$$E_{z_A}|_{\varphi_1=\pi} = E_{z0} e^{-ikr_1 \cos \varphi_{0A}} \left[ \Phi \left( \sqrt{2kr_1} \sin \frac{\varphi_{0A}}{2} / V\bar{i} \right) - 1 \right], \\ B_{0D}|_{\varphi_1=\pi} = E_{z0} \left( \frac{i}{k} \right)^{1/2} \frac{e^{-ikc}}{2\pi V r_1 l} \frac{\sin \varphi_{0B}/2}{\cos^2 \varphi_{0B}/2}. \quad (10)$$

Для Н-поляризации  $U_A = H_{z_A}|_{\varphi_1=\pi} = 0$ ,  $B_{0H}|_{\varphi_1=\pi} = 0$ . Из (9), с учетом (10) следует, что при скользящем наблюдении поле рассеяния полосы равно нулю при Н-поляризации и зависит от угла падения волны и ширины полосы при Е-поляризации.

При скользящем падении волны поле рассеяния определяется из (9) согласно принципу взаимности:

$$U = U_{ГО} + U_B + e^{ik(l+r_1)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left( \frac{i}{k} \right)^{\kappa+1/2} Q_{\kappa_2}. \quad (11)$$

Здесь для Е-поляризации

$$U_B = E_{z_{ГО}} \left[ \Phi \left( \sqrt{2kr_2} \sin \frac{\varphi_2}{2} / V\bar{i} \right) - 1 \right], \quad (12)$$

для Н-поляризации  $U_B = 0$ ; коэффициенты  $Q_{\kappa_2}$  равны нулю в обоих случаях. Из (11) с учетом (12) следует, что поляризованная перпендикулярно к полосе волна не испытывает дифракции при любых углах наблюдения и на произвольном расстоянии от полосы. При Е-поляризации дифрагированное поле интерферирует с ГО полем, а при скользящем наблюдении полное поле рассеяния равно нулю.

По разработанному алгоритму на ЭВМ проведены расчеты амплитуд и фаз компонент, поляризационных характеристик электрического

поля для  $l/\lambda = 1$  и  $s/\lambda = 5$ . На рис. 2, 3 кривыми показаны результаты расчетов для следующих углов наклона полосы:  $\gamma = -90^\circ$  — сплошные,  $-80^\circ$  — пунктирные,  $-70^\circ$  — штрихпунктирные. На рис. 2 представлены зависимости амплитуды ортогональных компонент электромагнитного поля от расстояния  $h/\lambda$  вдоль нормали к линии визирования  $A_1A_2$ . При значениях  $h/\lambda$ , когда в точку наблюдения попадают прямая и кривые волны, ГО поля всех компонент не зависят

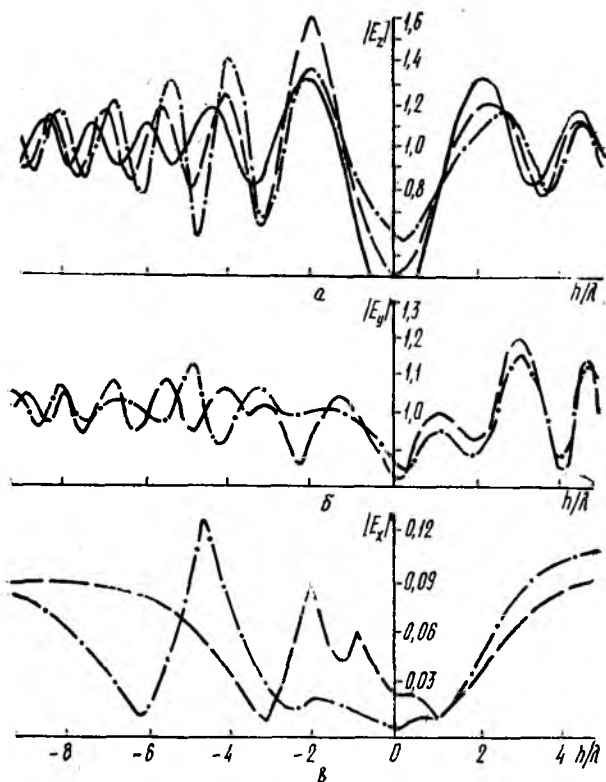


Рис. 2

от угла падения и равны  $|\dot{E}_z| = 1$ ,  $|\dot{E}_y| = 1$ ,  $|\dot{E}_x| = 0$ . ГО поля интерферируют в областях  $\Delta h/\lambda = -1,81 \dots -2,54$  для  $\gamma = -80^\circ$  и  $\Delta h/\lambda = -4,19 \dots -5,97$  для  $\gamma = -70^\circ$ . Амплитуды интерференционных ГО полей изменяются в зависимости от  $h/\lambda$  или от связанного с ним параметра  $\alpha = \text{arctg}(s/h)$  и от угла падения волны  $\varphi_{0A}$  по законам

$$|\dot{E}_{z_{ГО}}| = 2 \sin [kr_1 \sin \varphi_{0A} \cos (\varphi_{0A} + \alpha)]; |\dot{E}_{y_{ГО}}| = 1 + \cos^2 2\varphi_{0A} + 2 \cos 2\varphi_{0A} \cos [2kr_1 \sin \varphi_{0A} \cos (\varphi_{0A} + \alpha)], |\dot{E}_{x_{ГО}}| = \sin 2\varphi_{0A}. \quad (13)$$

Область чисто дифрагированного поля определяется интервалом значений от нуля до  $h_{ВГР} = 0,34$  для  $\gamma = -70^\circ$  и до  $h_{ВГР} = 0,17$  для  $\gamma = -80^\circ$ . Следует отметить большую скорость уменьшения амплитуды  $E_z$ -компоненты, чем  $E_y$ , что объясняется различием диаграмм направленности краевой волны при Е- и Н-поляризациях падающей волны.

Перейдем к анализу поляризационных характеристик поля, дифрагировавшего на наклонной полосе. Результаты расчетов зависи-

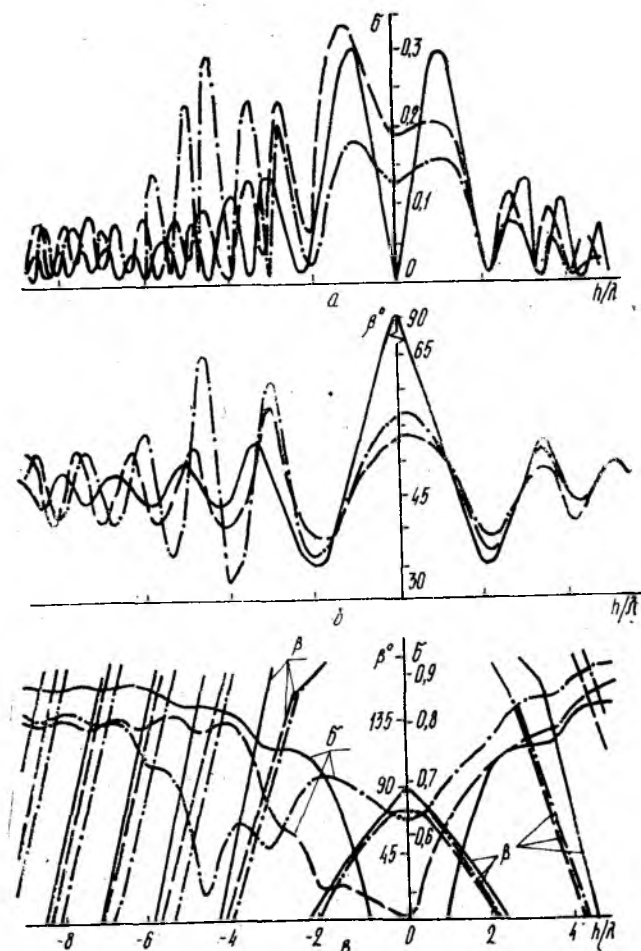


Рис. 3

мости коэффициента эллиптичности  $\delta$  и угла ориентации поляризационного эллипса  $\beta$  для случая линейной поляризации падающей волны с плоскостью поляризации под углом  $45^\circ$  к кромке полосы приведены на рис. 3 а, б. Здесь линейная поляризация в области интерференции ГО полей преобразуется в эллиптическую. Ввиду

малого размера полосы  $l/\lambda = 1$  область интерференции незначительна и коэффициент эллиптичности не превышает значения 0,35. С увеличением ширины полосы растет протяженность области интерференции и поляризация рассеянного поля изменяется в больших пределах — до круговой. Угол ориентации поляризационного эллипса изменяется по осциллирующим закономерностям в пределах от  $35^\circ$  до  $70^\circ$ , а при скользящем падении (сплошная кривая) достигает  $90^\circ$  для  $h/\lambda = 0$ .

При падении волны с круговой поляризацией расчетные зависимости коэффициента эллиптичности и угла ориентации поляризационного эллипса представлены на рис. 3, в. В области интерференционного ГО поля коэффициент эллиптичности падает до значений 0,45 ... 0,5, а с увеличением ширины полосы — до нуля. В области полутени и тени ГО полей коэффициент эллиптичности уменьшается. С увеличением этой области появляется осциллирующая зависимость  $\delta$  за счет интерференции краевых волн. В отличие от случая линейной поляризации падающей волны, при круговой поляризации имеет место вращение плоскости поляризации вектора электрического поля в области света. В области полутени и тени угол ориентации изменяется монотонно от нуля до  $70^\circ$ . При скользящем падении волны зависимости  $\delta$  и  $\beta$  симметричны относительно  $h/\lambda = 0$ , где амплитуда  $E$ -компоненты обращается в нуль и поляризация из круговой преобразуется в линейную (сплошные кривые следует продолжить до нуля). Плоскость поляризации вектора электрического поля приближается к плоскости поляризации  $E$ -компоненты и совпадает с нею при  $h/\lambda = 0$ .

Таким образом, равномерные асимптотики полей виртуальных дифракционных излучателей позволяют рассчитать поле рассеяния полосы произвольной ширины на конечном расстоянии от нее при любом угле падения и любой поляризации волны. В результате проведенного анализа обнаружено, что деполяризация волны в областях интерференции ГО полей и их тени существенно зависит от угла падения волны и ширины полосы, причем тем сильнее, чем меньше угол падения и больше ширина полосы.

Список литературы: 1. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., 1966. 455 с. 2. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М., 1962. 242 с. 3. Горобец Н. Н., Елисеева Н. П. Поляризационные эффекты при дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей наклонной полуплоскости // Вестн. Харьк. ун-та. Радиофизика и электрон. 1986. № 285. С. 39—47. 4. Дифракция электромагнитных волн с произвольной поляризацией на наклонной полосе в ближней зоне / Н. Н., Горобец., Н. П. Елисеева, К., 1987, 55 с. Деп. в УкрНИИИТИ 23.06.87 № 1709

Поступила в редколлегию 30.03.88

## ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Выполнение данной работы продиктовано рядом проблем интегральной оптики [1] и геофизики [2], которые в теоретическом плане сводятся к задаче рассеяния плоской электромагнитной волны на многослойной структуре с инородным включением. Использовалась двумерная модель в виде плоскослоистой среды с включением в форме кругового цилиндра. Достаточно реалистичная, эта модель поддается аналитическому рассмотрению с помощью сравнительно простых средств. Известные ранее результаты получены для частных случаев, когда среда, вмещающая включение, представляет собой двухслойное кусочно-однородное полупространство [1; 2].

Опишем постановку задачи. Отнесем трехмерное пространство к прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Ось  $Oz$  направим вертикально вверх, а ось  $Oy$  — вправо. Окружающей среде отведем область  $0 < z < +\infty$ , а структуре — область  $-\infty < z < 0$  ( $-\infty < x, y < +\infty$ ). Совокупную среду, заполняющую все пространство, охарактеризуем комплекснозначными диадами диэлектрической и магнитной проницаемости:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}(z) &= \epsilon_t(z)(\vec{x}_0\vec{x}_0 + \vec{y}_0\vec{y}_0) + \epsilon_z(z)\vec{z}_0\vec{z}_0; \\ \vec{\mu}(z) &= \mu_t(z)(\vec{x}_0\vec{x}_0 + \vec{y}_0\vec{y}_0) + \mu_z(z)\vec{z}_0\vec{z}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  — орты осей  $x, y, z$ ). Окружающая среда однородна и изотропна, в соответствии с чем для каждого значения символа  $\eta = \epsilon$  или  $\mu$  функции  $\eta_t(z)$  и  $\eta_z(z)$  принимают при  $0 < z < +\infty$  постоянные и одинаковые положительные значения:  $\eta_t(z) = \eta_z(z) = \eta_e > 0$ . В области  $-\infty < z < 0$  среда состоит из неоднородного слоя  $f < z < 0$  и однородной подложки  $-\infty < z < f$ . Неоднородный слой и подложка — одноосные, с вертикальной оптической осью. В пределах  $f < z < 0$  величины  $\eta_t(z), \eta_z(z)$  — произвольные кусочно-гладкие функции переменной  $z$ , а на интервале  $-\infty < z < f$  они принимают постоянные значения  $\eta_t(z) = \eta_{ct}, \eta_z(z) = \eta_{cz}$  ( $\eta_{ct, z} = \text{const}$ ). Среда в нижнем полупространстве считается диссипативной, поэтому мнимые части функций  $\eta_t(z)$  и  $\eta_z(z)$  при  $f < z < 0$  и постоянных  $\eta_{ct}, \eta_{cz}$  положительны. Случай среды без потерь входит в наше рассмотрение как предельный.

Пусть сторонние монохроматические источники  $\vec{J}(r)$  и  $\vec{M}(r)$ , распределение которых не зависит от  $x$ , создают в указанной регу-

лярной среде поле  $\vec{E}_0(\vec{r}), \vec{H}_0(\vec{r})$ . Оно подчиняется уравнениям Максвелла

$$\nabla_{\perp} \times \vec{E}_0(\vec{r}) - ik_0 \hat{\mu}(z) \vec{H}_0(\vec{r}) = -(4\pi/c) \vec{M}(\vec{r});$$

$$\nabla_{\perp} \times \vec{H}_0(\vec{r}) + ik_0 \hat{\epsilon}(z) \vec{E}_0(\vec{r}) = (4\pi/c) \vec{J}(\vec{r}), \quad (2)$$

( $-\infty < y, z < +\infty$ ), условиям непрерывности горизонтальных компонент поля на всех поверхностях раздела и излучения в бесконечности. Здесь и далее временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен;  $c$  — скорость света в вакууме;  $k_0 = \omega/c$ ,  $\vec{r} = (0, y, z)$ ;  $\nabla_{\perp} = \vec{y}_0 \partial_y + \vec{z}_0 \partial_z$ . Из (2) видно, что вертикально ( $s$ ) поляризованная составляющая поля  $H_{0x}, E_{0y}$  и  $E_{0z}$  порождена компонентами  $M_x, J_y$  и  $J_z$  источников, а горизонтально ( $p$ ) поляризованная составляющая  $E_{0x}, H_{0y}, H_{0z}$  — компонентами  $J_x, M_y, M_z$ .

Поместим теперь в слой  $f < z < 0$  включение в форме бесконечно длинного цилиндра с поперечным сечением  $S$ , образующие которого параллельны оси  $Ox$ . Материал цилиндра — одноосный, с вертикальной оптической осью. Он характеризуется диадами диэлектрической и магнитной проницаемости  $\hat{\epsilon}_p(\vec{r})$  и  $\hat{\mu}_p(\vec{r})$  (1). Их компоненты  $\epsilon_{pt}(\vec{r}), \epsilon_{pz}(\vec{r}), \mu_{pt}(\vec{r})$  и  $\mu_{pz}(\vec{r})$  представляют собой кусочно-гладкие комплекснозначные функции переменного  $\vec{r}$ , вид которых пока не конкретизируем. Пусть  $S$  и область локализации сторонних источников в плоскости  $yOz$  не пересекаются. Тогда во внешности  $CS$  области  $S$  электромагнитное поле сторонних источников можно представить в виде  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$ , где  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  — первичное поле, создаваемое источниками в отсутствие включения, а  $\vec{E}', \vec{H}'$  неизвестное рассеянное поле. Поле во внутренних точках включения, также подлежащее отысканию, при необходимости обозначим индексом  $p$ :  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_p(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_p(\vec{r})$  ( $\vec{r} \in S$ ). С этого момента рассматриваем  $s$  — поляризованное поле  $\vec{E} = (0, E_y, E_z), \vec{H} = (H_x, 0, 0)$ , положив, что  $\vec{J} = (0, J_y, J_z), \vec{M} = (M_x, 0, 0)$ .

Из уравнений Максвелла в области  $CS$ , дополняющей  $S$  до всей плоскости  $yOz$ , условий сопряжения для поля на границе  $L$  области  $S$  и формул Грина вытекают следующие соотношения:

$$E_y(\vec{r}) = [i/k_0 \epsilon_t(z)] \partial_z H_x(\vec{r}), \quad E_z(\vec{r}) = -[ik_0 \epsilon_z(z)] \partial_z H_x(\vec{r}), \quad (3)$$

$$H_x(\vec{r}) = \int_L dl' \langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle \quad (\vec{r} \in CS);$$

$$H_{0x}(\vec{r}) + \int_L dl' \langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle = 0 \quad (\vec{r} \in S). \quad (4)$$

Обозначим

$$\langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle \equiv H_e(\vec{r}, \vec{r}') [\epsilon_{pz}^{-1}(\vec{r}') N'_y \partial_{y'} + \epsilon_{pt}^{-1}(\vec{r}') N'_z \partial_{z'}] \times \\ \times H_{px}(\vec{r}') - H_{px}(\vec{r}') [\epsilon_z^{-1}(z') N'_y \partial_{y'} + \epsilon_t^{-1}(z') N'_z \partial_{z'}] H_e(\vec{r}, \vec{r}');$$

$dl'$  и  $\vec{N}'$  — элемент длины контура  $L$  и нормаль к  $L$  в точке  $\vec{r}' \in L$ , направленная из  $S$  в  $CS: \vec{N}' = (0, N_y', N_z')$ . Функция  $H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  определена как решение уравнения

$$[D_e(z) + k_e^2(z) + \partial_y^2] H_e(\vec{r}, \vec{r}') = e_z(z) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5)$$

( $-\infty < y, z < +\infty$ ), которое в точках разрыва коэффициентов этого уравнения непрерывна вместе с  $e_z^{-1}(z) \partial_z H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  (последнее — при  $z \neq z'$ ), а в бесконечности удовлетворяет условию излучения. Здесь  $D_e(z) = e_z(z) \partial_z e_z^{-1}(z) \partial_z$ ;  $k_e^2(z) = k_0^2 e_z(z) \mu_t(z)$ ;  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

В области  $S$  из уравнений Максвелла и условий на внутренних границах раздела следуют соотношения

$$E_{py}(\vec{r}) = [i/k_0 \epsilon_{pt}(\vec{r})] \partial_z H_{px}(\vec{r}), \quad E_{pz}(\vec{r}) = -[i/k_0 \epsilon_{pz}(\vec{r})] \partial_y H_{px}(\vec{r}) \quad (6)$$

уравнение для  $H_{px}(\vec{r})$

$$[\partial_z \epsilon_{pt}^{-1}(\vec{r}) \partial_z + \partial_y \epsilon_{pz}^{-1}(\vec{r}) \partial_y + k_0^2 \mu_{pt}(\vec{r})] H_{px}(\vec{r}) = 0 \quad (7)$$

и требование непрерывности величин  $H_{px}(\vec{v})$ ,  $[\epsilon_{pt}^{-1}(\vec{r}) n_z(\vec{r}) \partial_z + \epsilon_{pz}^{-1}(\vec{r}) \times \times n_y(\vec{r}) \partial_y] H_{px}(\vec{r})$  на всех линиях в  $S$ , где коэффициенты уравнения (7) испытывают разрыв ( $\vec{n}$  — нормаль к линии разрыва:  $\vec{n} = (0, n_y, n_z)$ ).

Дополним уравнение (7) и упомянутое требование непрерывности равенством, вытекающим из тождества (4):

$$\lim_{S \subset \vec{r} \rightarrow \vec{r}_L} \int \langle H_e(\vec{r}, \vec{r}'), H_{px}(\vec{r}') \rangle dl' = -H_{0x}(\vec{r}_L), \quad (\vec{r}_L \in L). \quad (8)$$

В результате получаем замкнутую краевую задачу относительно  $H_{px}$  в области  $S$ . Соотношение (8) играет роль нелокального граничного условия, учитывающего наличие внешней области  $CS$  [1; 3; 4, с. 5].

Если величина  $H_{px}(\vec{r})$  известна, равенства (3), (6) превращаются в прямые формулы для расчета  $H_x', E_y', E_z'$  и  $E_{py}, E_{pz}$ .

С этого момента считаем, что включение целиком находится в однородном и изотропном участке  $d < z < b$  неоднородного одноосного слоя  $f < z < 0$  ( $f < d < b < 0$ ). В пределах данного участка для каждого значения  $\eta = \epsilon$  или  $\mu$  обе функции  $\eta_t(z)$  и  $\eta_z(z)$  совпадают и принимают постоянное значение  $\eta_{m1}$   $\epsilon_{t,z}(z) = \epsilon_m$ ,  $\mu_{t,z}(z) = \mu_m$  ( $\epsilon_m, \mu_m = \text{const}$ ). Приведем выражения для полей, возбуждаемых в регулярной структуре источниками частного вида.

Обозначим  $k_e = k_0 \sqrt{\epsilon_e \mu_e}$ ,  $k = k_0 \sqrt{\epsilon_m \mu_m}$ ,  $k_{ce} = k_0 \sqrt{\epsilon_{cz} \mu_{ct}}$  ( $0 \leq \arg k_{e,m,ce} < \pi$ ) и введем в рассмотрение следующие функции комплексного переменного  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{ce} &= [(\epsilon_{cz}/\epsilon_{ct})(k_{ce}^2 - \kappa^2)]^{1/2}, \quad \gamma = (k^2 - \kappa^2)^{1/2}, \\ \gamma_e &= (k_e^2 - \kappa^2)^{1/2}, \quad \zeta(f, \kappa) = \gamma_{ce}(\kappa)/k_0 \epsilon_{ct}. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим на интервале  $f < z < d$  функцию  $\Psi_e^-(z, \kappa)$  как любое решение уравнения  $[D_e(z) + k_e^2(z) - \kappa^2]u(z) = 0$  (10), которое в точках разрыва коэффициентов этого уравнения при  $f < z < d$  непрерывно вместе с  $\varepsilon_i^{-1}(z) \partial_z u(z)$ , а при  $z = f + 0$  подчиняется граничному условию  $[\partial_z + ik_0 \zeta(f, \kappa) \varepsilon_i(f + 0)] \Psi_e^-(z, \kappa) = 0$ . Далее положим, что указанные условия в точках разрыва «встроены» на соответствующем интервале в уравнение (10), и упоминание о них мы опускаем. Вычислим величины

$$\xi(d, \kappa) = -\dot{\Psi}_e^-(d - 0, \kappa) / ik_0 \varepsilon_i(d - 0) \Psi_e^-(d - 0, \kappa);$$

$\xi(b, \kappa) = [\xi(d, \kappa) + (\gamma / ik_0 \varepsilon_m) \operatorname{tg}(\gamma h)] / [1 - i(k_0 \varepsilon_m / \gamma) \xi(d, \kappa) \operatorname{tg}(\gamma h)]$  (11) ( $\dot{\Psi}_e = \partial_z$ ,  $h = b - d$ ) и построим на интервале  $b < z < 0$  функцию  $\Phi_e^-(z, \kappa)$ . Она служит решением уравнения (10) при  $b < z < 0$  и удовлетворяет при  $z = b + 0$  условию  $[\partial_z + ik_0 \zeta(b, \kappa) \varepsilon_i(b + 0)] \times \times \Phi_e^-(z, \kappa) = 0$ . Обозначим  $\xi(0, \kappa) = -\dot{\Phi}_e^-(-0, \kappa) / ik_0 \varepsilon_i(-0) \Phi_e^-(-0, \kappa)$ . Величины  $\xi$  имеют смысл входного импеданса соответствующей границы:  $z = f, d, b$  или  $0$  — по отношению к полю, источники которого находятся выше этой границы. Введем на всей оси  $-\infty < z < +\infty$  решение уравнения (10) следующего вида:

$$H(z, \kappa) = \begin{cases} \exp(-i\gamma_e z) + R_s(0, \kappa) \exp(i\gamma_e z), & 0 < z < +\infty; \\ [1 + R_s(0, \kappa)] K^-(\kappa) F^-(z, \kappa), & -\infty < z < 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$F^-(z, \kappa) = \begin{cases} \Phi_e^-(z, \kappa) / \Phi_e^-(-0, \kappa), & b < z < 0; \\ L^- \exp(i\gamma z) + M^- \exp(-i\gamma z), & d < z < b; \\ N^- \Psi_e^-(z, \kappa) / \Psi_e^-(d - 0, \kappa), & f < z < d; \\ \exp[i\gamma_e (f - z)] N^- \Psi_e^-(f + 0, \kappa) / \Psi_e^-(d - 0, \kappa), & -\infty < z < f; \end{cases} \quad (13)$$

$$R_s(0, \kappa) = \frac{\gamma_e - k_0 \varepsilon_e \xi(0, \kappa)}{\gamma_e + k_0 \varepsilon_e \xi(0, \kappa)}; \quad K^-(\kappa) = \frac{\Phi_e^-(b - 0, \kappa)}{\Phi_e^-(-0, \kappa)};$$

$$2L^-(\kappa) = e^{-i\gamma b} [1 - k_0 \varepsilon_m \xi(b, \kappa) / \gamma], \quad 2M^-(\kappa) = e^{i\gamma b} [1 + k_0 \varepsilon_m \xi(b, \kappa) / \gamma]; \\ N^-(\kappa) = \cos(\gamma h) + (ik_0 \varepsilon_m / \gamma) \xi(b, \kappa) \sin(\gamma h). \quad (14)$$

Определим общий правильный лист  $C_r$  римановой поверхности функций  $\gamma_e(\kappa)$  и  $\gamma(\kappa)$  условиями  $\operatorname{Im} \gamma_e(\kappa) \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \gamma(\kappa) \geq 0$ . При  $\kappa \in C_r$  функция  $H_{0x}(r) = \exp(i\kappa y) A_s^- H^-(z, \kappa)$ , очевидно, описывает поле, возбуждаемое в среде  $s$  — поляризованной плоской волной с амплитудой  $A_s^-$ , которая падает из верхнего полупространства в направлении волнового вектора  $\vec{y}_0 \kappa - z_0 \gamma_e$ . Пусть  $\kappa'$  — произвольный корень уравнения  $\gamma_e(\kappa) + k_0 \zeta(0, \kappa) \varepsilon_e = 0$  (15). Положив  $A_s^- = A_s' [\gamma_e + k_0 \times \times \zeta(0, \kappa) \varepsilon_e] / 2\gamma_e$ , совершив в предыдущем выражении для  $H_{0x}(r)$  предельный переход  $\kappa \rightarrow \kappa'$ . В результате получаем первичное поле в виде нормальной волны слоистой среды  $H_{0x}(r) = \exp(i\kappa' y) A_s' H_n(z, \kappa')$ , где

$$H_n(z, \kappa') = \begin{cases} \exp[i\gamma_e(\kappa') z], & 0 < z < +\infty; \\ K^-(\kappa') F^-(z, \kappa'), & -\infty < z < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Обозначим  $\xi(0, \kappa) = \gamma_e(\kappa)/k_0 \varepsilon_e$  и введем в рассмотрение функцию  $\Phi_e^+(z, \kappa)$  — решение уравнения (10) на интервале  $b < z < 0$ , удовлетворяющее при  $z = -0$  граничному условию  $[\partial_z - ik_0 \varepsilon_t(-0)\xi(0, \kappa)] \times \times \Phi_e^+(z, \kappa) = 0$ . Введем величины

$$\begin{aligned} \xi(b, \kappa) &= \Phi_e^+(b+0, \kappa)/ik_0 \varepsilon_t(b+0)\Phi_e^+(b+0, \kappa); \\ \xi(d, \kappa) &= [\xi(b, \kappa) + (\gamma/ik_0 \varepsilon_m) \operatorname{tg}(\gamma h)] [1 - (ik_0 \varepsilon_m/\gamma)\xi(b, \kappa) \operatorname{tg}(\gamma h)] \end{aligned} \quad (17)$$

и функцию  $\Psi_e^+(z, \kappa)$ . Последняя определена на интервале  $f < z < d$  как решение уравнения (10), подчиняющееся при  $z = d - 0$  условию  $[\partial_z - ik_0 \varepsilon_t(d-0)\xi(d, \kappa)] \Psi_e^+(z, \kappa) = 0$ . Свяжем с  $\Psi_e^+(z, \kappa)$  функцию переменного  $\kappa$ :  $\xi(f, \kappa) = \Psi_e^+(f+0, \kappa)/ik_0 \varepsilon_t(f+0)\Psi_e^+(f+0, \kappa)$ . Величины  $\xi$  имеют смысл входного импеданса соответствующей границы  $z = 0, b, d$  или  $f$ ) по отношению к полю, источники которого находятся ниже этой границы. Обозначим через  $H^+(z, \kappa)$  следующее решение уравнения (10) на всей оси:

$$H^+(z, \kappa) = \begin{cases} [1 + Q_s(f, \kappa)] K^+(\kappa) F^+(z, \kappa), & f < z < +\infty; \\ \exp[i\gamma_{ce}(z-f)] + Q_s(f, \kappa) \exp[i\gamma_{ce}(f-z)], & -\infty < z < f; \end{cases} \quad (18)$$

$$F^+(z, \kappa) = \begin{cases} \exp(i\gamma_e z) N^+ \Phi_e^+(-0, \kappa) / \Phi_e^+(b+0, \kappa), & 0 < z < +\infty; \\ N^+ \Phi_e^+(z, \kappa) / \Phi_e^+(b+0, \kappa), & b < z < 0; \\ L^+ \exp(i\gamma z) + M^+ \exp(-i\gamma z), & d < z < b; \\ \Psi_e^+(z, \kappa) / \Psi_e^+(f+0, \kappa), & f < z < d; \end{cases} \quad (19)$$

$$Q_s(f, \kappa) = \frac{\gamma_{ce} - k_0 \varepsilon_{ct} \xi(f, \kappa)}{\gamma_{ce} + k_0 \varepsilon_{ct} \xi(f, \kappa)}; \quad K^+(\kappa) = \frac{\Psi_e^+(d-0, \kappa)}{\Psi_e^+(f+0, \kappa)};$$

$$\begin{aligned} 2L^+(\kappa) &= e^{-i\gamma d} [1 + k_0 \varepsilon_m \xi(d, \kappa)/\gamma]; & 2M^+(\kappa) &= e^{i\gamma d} [1 - k_0 \varepsilon_m \xi(d, \kappa)/\gamma]; \\ N^+(\kappa) &= \cos(\gamma h) + (ik_0 \varepsilon_m/\gamma) \xi(d, \kappa) \sin(\gamma h). \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что при  $\kappa \in C_r$  функция  $H_{0x}(\vec{r}) = \exp(ixy) A_s^+ H^+(z, \kappa)$  описывает первичное поле, которое возбуждается плоской волной с амплитудой  $A_s^+$ , идущей из нижней среды в направлении волнового вектора  $y_0 \kappa + z_0 \gamma_{ce}$ .

Стандартная схема построения функции  $H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  путем разложения в интеграл Фурье приводит к окончательному результату:

$$H_e(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{\Delta_e(\kappa)} H^+(z_>, \kappa) H^-(z_<, \kappa) e^{i\kappa(y-y')}; \quad (21)$$

$$\Delta_e(\kappa) \equiv \varepsilon_t^{-1}(z) [H^-(z, \kappa) \partial_z H^+(z, \kappa) - H^+(z, \kappa) \partial_z H^-(z, \kappa)];$$

$z_> = \max(z, z')$ ,  $z_< = \min(z, z')$ . Контур интегрирования здесь и в последующих выражениях (27), (29), (30) считается лежащим на правильном листе  $C_r$ . На участке  $-k_e < \kappa < k_e$  он совпадает с тем берегом разреза по линии  $\operatorname{Im} \gamma_e(\kappa) = 0$ , где  $\arg \gamma_e(\kappa) = 0$ . Значения

функции  $\gamma_e(x)$  в точках упомянутого контура можно записать как  $\gamma_e(x) = \sqrt{k_e^2 - x^2}$  при  $-k_e < x < k_e$  и  $\gamma_e(x) = i\sqrt{x^2 - k_e^2}$  при  $x > k_e$  либо  $x < -k_e$  (здесь фигурирует арифметический квадратный корень). Величины  $H^\pm(z, x)$ , а значит, и подынтегральное выражение в (21) не зависит от выбора ветви функции  $\gamma(x)$ . Это же характерно для полученных с использованием (21) формул (27), (29), (30), (33). Подчеркнем, однако, что в статье используется одна и та же ветвь  $\gamma(x)$ . Ее удобно зафиксировать проведением разрезов по линии  $\text{Im}\gamma(x) = 0$  и требованием  $\text{Im}\gamma(x) > 0$  в остальных точках комплексной плоскости.

Перейдем к решению задачи относительно поля внутри включения. Ограничимся далее частным случаем, когда цилиндр имеет круговое сечение радиуса  $a$  с центром в точке  $\vec{r}_p = (0, y_p, z_p)$ , т. е.  $S = \{\vec{r} : |\vec{r} - \vec{r}_p| < a\}$  ( $b + a < z_p < -a$ ), материал цилиндра изотропный и радиально-слоистый:  $\epsilon_{pt}(\vec{r}) = \epsilon_{pz}(\vec{r}) = \epsilon_p(\rho)$ ,  $\mu_{pt}(\vec{r}) = \mu_{pz}(\vec{r}) = \mu_p(\rho)$ . Здесь  $\epsilon_p(\rho)$  и  $\mu_p(\rho)$  — некоторые кусочно-гладкие комплекснозначные функции переменного  $\rho = [(y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]^{1/2}$ . Пусть  $R_e(\rho, \nu)$  — произвольное решение уравнения с (комплекснозначным) параметром  $\nu$ :

$$\left[ \frac{\epsilon_p(\rho)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho}{\epsilon_p(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} + k_0^2 \epsilon_p(\rho) \mu_p(\rho) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right] R_e(\rho, \nu) = 0, \quad (22)$$

( $0 < \rho < a$ ), которое в точках разрыва коэффициентов этого уравнения непрерывно вместе с  $\epsilon_p^{-1}(\rho) \partial R_e(\rho, \nu) / \partial \rho$ , а в точке  $\rho = 0$  ограничено. Тогда решение уравнения (7), удовлетворяющее надлежащим условиям непрерывности на внутренних границах раздела, запишем в виде

$$H_{px}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m H_m R_e(\rho, m) \exp(im\varphi), \quad (23)$$

где  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $H_m$  — неопределенные коэффициенты;  $\varphi$  — угол полярной системы координат  $\rho, \varphi$  в плоскости  $yOz$  с центром в точке  $\vec{r}_p$ :  $y - y_p = \rho \cos \varphi$ ,  $z - z_p = \rho \sin \varphi$ . Подстановка (23) в нелокальное граничное условие (8) доставляет бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $H_m$ :

$$H_m + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} H_n = F_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

Соответствующие вычисления приведены в работах [1; 2]. Коэффициенты при неизвестных и правые части имеют вид

$$C_{mn} = g_e(m, n) p_e(n) / \pi q_e(m), \quad F_m = f_e(m) / \pi q_e(m); \quad (25)$$

$$p_e(n) = \frac{e}{\epsilon_p(a)} \frac{\partial R_e(a, n)}{\partial a} J_n(ka) - R_e(a, n) \frac{\partial J_n(ka)}{\partial a};$$

$$q_e(m) = \frac{e}{\epsilon_D(a)} \frac{\partial R_e(a, m)}{\partial a} H_m^{(1)}(ka) - R_e(a, m) \frac{\partial H_m^{(1)}(ka)}{\partial a}; \quad (26)$$

$$f_e(m) = \int_0^{2\pi} d\varphi H_{0x}(\vec{r}_L(\varphi)) e^{-im\varphi} / J_m(ka) \pi a i^{m+1}.$$

Используем следующие обозначения:  $H_m^{(1)}$  и  $J_m$  — функция Ханкеля первого рода и функция Бесселя порядка  $m$ ;  $\vec{r}_L$  — переменная точка на контуре  $L$ ,  $\vec{r}_L(\varphi) = (0, y_p + a \cos \varphi, z_p + a \sin \varphi)$ .

$$g_e(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa [\chi^{-m} \Delta_{1s}(\kappa, n) + \chi^m \Delta_{2s}(\kappa, n)] / \gamma \Delta_s(\kappa); \quad (27)$$

$$\Delta_{1s}(\kappa, n) = e^{-2i\gamma d} R_s(d, \kappa) [\chi^{-n} e^{2i\gamma z_p} + \chi^n e^{2i\gamma b} Q_s(b, \kappa)];$$

$$\Delta_{2s}(\kappa, n) = e^{2i\gamma b} Q_s(b, \kappa) [\chi^n e^{-2i\gamma z_p} + \chi^{-n} e^{-2i\gamma d} R_s(d, \kappa)];$$

$$R_s(d, \kappa) = \frac{\gamma - k_0 e_m \zeta(d, \kappa)}{\gamma + k_0 e_m \zeta(d, \kappa)}; \quad Q_s(b, \kappa) = \frac{\gamma - k_0 e_m \xi(b, \kappa)}{\gamma + k_0 e_m \xi(b, \kappa)};$$

$$\Delta_s(\kappa) = 1 - R_s(d, \kappa) Q_s(b, \kappa) \exp(2i\gamma h), \quad (28)$$

$\chi(\kappa) = [\kappa + i\gamma(\kappa)]/k$ . В частном случае, когда первичное поле в слое  $d < z < b$  определяется выражением  $H_{0x}(\vec{r}) = \exp(i\kappa_0 y) [L_0 \exp(i\gamma_0 z) + M_0 \exp(-i\gamma_0 z)]$ , коэффициент  $f_e(m)$  из (26) приобретает вид  $f_e(m) = (2/ia) \exp(i\kappa_0 y_p) [L_0 \chi^{-m}(\kappa_0) \exp(i\gamma_0 z_p) + M_0 \chi^m(\kappa_0) \exp(-i\gamma_0 z_p)]$ ,  $\gamma_0 = \gamma(\kappa_0)$ .

Считая, что решение системы уравнений (24) известно, подставим формулу (23) с учетом (21) в нижнее из соотношений (3). В результате получаем следующие выражения для рассеянного поля во внешности включения: при  $b < z < +\infty$

$$H_x(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa u_e(z, \kappa) t_e(\kappa) e^{i\kappa(y-y_p)} P_e(\kappa) / 2i\gamma \Delta_s; \quad (29)$$

при  $-\infty < z < d$

$$H_x(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa v_e(z, \kappa) r_e(\kappa) e^{i\kappa(y-y_p)} S_e(\kappa) / 2i\gamma \Delta_s. \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} t_e(\kappa) &= \exp(i\gamma b) [1 + Q_s(b, \kappa)] \Phi_e^+(-0, \kappa) / \Phi_e^+(b+0, \kappa); \\ r_e(\kappa) &= \exp(-i\gamma d) [1 + R_s(d, \kappa)] \Psi_e^-(f+0, \kappa) / \Psi_e^-(d-0, \kappa); \\ P_e(\kappa) &= F_e(\kappa) \exp(-i\gamma z_p) + G_e(\kappa) R_s(d, \kappa) \exp[i\gamma(z_p - 2d)]; \\ S_e(\kappa) &= G_e(\kappa) \exp(i\gamma z_p) + F_e(\kappa) Q_s(b, \kappa) \exp[i\gamma(2b - z_p)]; \end{aligned} \quad (31)$$

$$F_e(\kappa) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m P_e(m) \chi^m(\kappa);$$

$$G_e(\kappa) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m P_e(m) \chi^{-m}(\kappa);$$

Функция  $u_e(z, \kappa)$ , определенная на интервале  $b < z < +\infty$  равна  $\exp(i\gamma_e z)$  при  $0 < z < +\infty$  и  $\Phi_e^+(z, \kappa)/\Phi_e^+(-0, \kappa)$  при  $b < z < 0$ . Функция  $v_e(z, \kappa)$ , которая задана в области  $-\infty < z < d$ , совпадает с  $\Psi_e^-(z, \kappa)/\Psi_e^-(f+0, \kappa)$  при  $f < z < d$  и равна  $\exp[i\gamma_{ce}(d-z)]$  при  $-\infty < z < f$ .

Применив к вычислению интеграла в (29) метод стационарной фазы, приходим к выражению для рассеянного поля в верхнем полупространстве ( $0 < \theta < \pi$ ), справедливому при  $k_e L \cos^2 \theta \gg 1$ :

$$H'_x(\vec{r}) = \sqrt{\pi} t_e(\kappa_s) P_e(\kappa_s) e^{i(k_e L - 3\pi/4)} / \sqrt{2k_e L} \Delta_s(\kappa_s). \quad (32)$$

В этой формуле  $L$  и  $\theta$  — полярная система координат в плоскости  $yOz$  с центром в точке  $(0, y_p, 0)$ :  $y - y_p = L \cos \theta$ ,  $z = L \sin \theta$ .

Деформация контура интегрирования в (21) в верхнюю полуплоскость листа  $C_r$  приводит к известному представлению функции  $H_e(\vec{r}, \vec{r}')$  в виде разложения по собственным волнам регулярной среды [5]. Соответствующее представление для рассеянного поля в области  $-\infty < z < +\infty$ ,  $|y - y_p| > a$  запишем как

$$\begin{aligned} H'_x(\vec{r}) = & (2\pi/\varepsilon_m) \left[ \sum_k H_n(z, \kappa_k) e^{i\kappa_k |y - y_p|} h_k / 2i\kappa_k M_{sk} + \right. \\ & + i \int_{\Gamma} d\kappa H^-(z, \kappa) \exp[i\kappa |y - y_p|] h_-(\kappa) / M_{se}(\kappa) + \\ & \left. + i \int_{G_s} d\kappa H^+(z, \kappa) \exp[i\kappa |y - y_p|] h_+(\kappa) / M_{sc}(\kappa) \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

Здесь  $\sum_k$  — сумма по всем корням  $\kappa_k$  уравнения (15), которые лежат на  $C_r$  в верхней полуплоскости  $C_r^+ = \{\kappa: \text{Im } \kappa > 0\} \cup \{\kappa: \text{Im } \kappa = 0, \text{Re } \kappa > 0\}$  (заметим, что из-за наличия диссипативных потерь в среде упомянутых корней на вещественной оси  $\kappa$  нет),  $\Gamma$  и  $G_s$  — ориентированные контуры в  $C_r^+$ . Контур  $\Gamma$  включает положительную часть мнимой оси и отрезок  $0 < \kappa < k_e$  вещественной оси. Он совпадает с тем берегом разреза  $\text{Im } \gamma(\kappa) = 0$  в верхней полуплоскости, на котором  $\arg \gamma_e(\kappa) = 0$ , и проходит в направлении от точки  $\kappa = k_e$  к бесконечно удаленной точке. Контур  $G_s$ , идущий из точки  $\kappa = k_{ce}$  в бесконечность, совпадает с тем берегом разреза  $\text{Im } \gamma_{ce}(\kappa) = 0$  на множестве  $C_r^+$ , где  $\arg \gamma_{ce}(\kappa) = 0$ . Далее

$$\begin{aligned} M_{se}(\kappa) &= 4\pi\gamma_e(\kappa) R_s(0, \kappa)/\varepsilon_e; \quad M_{sc}(\kappa) = 4\pi\gamma_{ce}(\kappa) Q_s(f, \kappa)/\varepsilon_{cs}; \\ M_{sk} &= \frac{1}{2\varepsilon_e} \left[ \frac{i}{\gamma_e(\kappa)} + \frac{k_0 \varepsilon_e}{i\kappa} \frac{\partial_z^2(0, \kappa)}{\partial \kappa} \right] \Big|_{\kappa=\kappa_k}. \quad (34) \end{aligned}$$

$h_k = h_-(\kappa_k)$ . Величины  $h_\nu(\kappa)$  ( $\nu = \pm$ ) соответственно случаям  $y > y_p + a$  или  $y < y_p - a$  записываются выражениями

$$h_\nu(\kappa) = L^\nu(\kappa) \tilde{G}_e(\kappa) \exp(i\gamma z_p) + M^\nu(\kappa) \tilde{F}_e(\kappa) \exp(-i\gamma z_p);$$

$$h_v(x) = L^v(x) \bar{F}_e(x) \exp(i\gamma z_D) + M^v(x) \bar{G}_e(x) \exp(-i\gamma z_D); \quad (35)$$

$$\bar{F}_e(x) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m p_e(m) [-\chi(x)]^m, \quad \bar{G}_e(x) = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m p_e(m) [-\chi(x)]^{-m}.$$

Таким же образом можно рассмотреть задачу рассеяния в случае нескольких цилиндрических включений.

**Список литературы:** 1. *Uzunogly N. K., Fikioris J. G.* Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric — slab waveguide//J. of the Optical Soc. of Amer. 1982. Vol 72, N 5. P. 628 — 637. 3. *Cottis P. G., Kanellopoulos J. D.* Scattering from dielectric cylinders embedded in a two — layer medium//J. Electronics. 1986. Vol. 61, N 4. P. 477 — 486. 3. *Ting L.* Exact boundary conditions for scattering problems// J. of the Acoustical Soc. of Amer. 1986. Vol. 80, N 6. P. 1825 — 1827. 4. *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. К., 1986. 280 с. 5. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. М., 1969. 191 с.

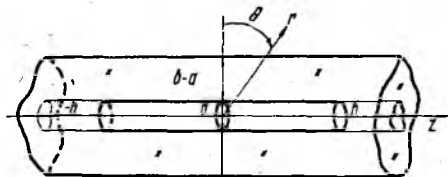
Поступила в редколлегию 02.12.87

УДК 621.396.67

*И. П. ЗАЙКИН*, канд. техн. наук, *А. А. ЗЕЛЕНСКИЙ*, канд. техн. наук,  
*Г. И. КОШЕВОЙ*, канд. физ.-мат. наук, *Ю. Н. ТАМУРОВ*, канд. техн. наук

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТОКОВ В ИЗОЛИРОВАННОЙ АНТЕННЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Анализ изолированной антенны проведен для окружающей среды электрически намного плотнее изолирующей оболочки, при которой наиболее точным оказывается простое приближение длинной линии\*. Рассмотрен важный для практики случай, когда электрическая плотность слоя, окружающего трубчатую антенну, гораздо больше плотности среды с помещенной в ней изолированной антенной.



**Вывод интегрального уравнения для тока.** Исследуемая структура состоит из идеально проводящего цилиндра радиуса  $a$  длины  $2h$  с абсолютно тонкими стенками, расположенного внутри бесконечного диэлектрического цилиндра со стенками толщиной  $b-a$  (рисунок).

Выберем цилиндрическую систему координат с осью  $oz$ , совпадающей с осями цилиндров и с центром в середине проводящего цилиндра. Предположим, что  $ka \ll 1$  ( $k$  — волновое число свободного пространства). Электромагнитное поле, создаваемое генератором дельта-

\* Кинг Р., Смит Т. Антенны в материальных средах: В 2 т. М., 1984. Т. 2. 824 с.

функции, размещенном в центре антенны и поддерживающем при  $z=0$ ,  $r=a$  электрическое поле  $E_z^0 = -V_0^e \delta(z)$ , где  $V_0^e$  — ЭДС генератора, найдем в виде электрического векторного потенциала, который имеет только одну составляющую  $\vec{A} = (0, 0, A_z(r, z))$ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2) A_z(r, z) &= 0 \quad r < a, \quad r > b; \\ (\Delta + k^2 \varepsilon) A_z(r, z) &= 0, \quad a < r < b.\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость изолирующего цилиндра.

Воспользуемся преобразованием Фурье

$$A(r, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} A_z(r, z) e^{i\zeta z} dz,$$

для которого будем иметь уравнение Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{A}}{\partial r} \right) + \xi_\varepsilon^2 \hat{A} = 0, \quad (2)$$

$$\xi_\varepsilon^2 = k^2 \varepsilon - \xi^2.$$

Решение (2) запишем в виде

$$A(r, \zeta) = \begin{cases} FJ_0(r\xi_1), & r < a; \\ AH_0^{(1)}(r\xi_\varepsilon) + BJ_0(r\xi_\varepsilon), & a < r < b; \\ CH_0^{(1)}(r\xi_1), & r > b, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\xi_1 = \xi_\varepsilon$ , если  $\varepsilon = 1$ , а для записи в областях  $r < a$  и  $r > b$  учтено поведение поля при  $r=0$  и  $r \rightarrow \infty$ .

Удовлетворим граничные условия при  $r=a$  и  $r=b$ . Так как

$$E_z(r, z) = -\frac{1}{ik} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z, & a < r < b; \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z, & r < a, \quad r > b \end{cases} \quad (4)$$

или для преобразований Фурье

$$\hat{E}_z = \frac{\xi_1^2}{ik} \hat{A}, \quad r < a, \quad r > b;$$

$$\hat{E}_z = \frac{\xi_\varepsilon^2}{ik\varepsilon} \hat{A}, \quad a < r < b,$$

выполнение граничных условий при  $r=a$  даст соотношение

$$\xi_\varepsilon^2 [AH_0^{(1)}(a\xi_\varepsilon) + BJ_0(a\xi_\varepsilon)] = \varepsilon \xi_1^2 FJ_0(a\xi_1), \quad (5)$$

если  $r=b$  —

$$\xi_\varepsilon^2 [AH_0^{(1)}(b\xi_\varepsilon) + BJ_0(b\xi_\varepsilon)] = \varepsilon \xi_1^2 CH_0^{(1)}(b\xi_1). \quad (6)$$

Учитывая, что  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , а  $B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$ , и выполняя условия непрерывности  $B_\theta$  на границе  $r = b$ , получаем

$$\{A [H_0^{(1)}(r\xi_e)]'_r + B [J_0(r\xi_e)]'_r\}_{r=b} = C [H_0^{(1)}(r\xi_1)]'_r \Big|_{r=b}$$

или после дифференцирования цилиндрических функций

$$A\xi_e H_1^{(1)}(b\xi_e) + B\xi_e J_1(b\xi_e) = C\xi_1 H_1^{(1)}(b\xi_1). \quad (7)$$

При переходе через границу  $r = a$  касательная составляющая вектора  $\vec{B}$  испытывает разрыв, равный плотности поверхностного тока на проводящем цилиндре. Следовательно, когда  $|z| < h$ ,  $B_\theta(a_+, z) - B_\theta(a_-, z) = j_z(z)$  или в образах Фурье

$$A\xi_e H_1^{(1)}(a\xi_e) + B\xi_e J_1(a\xi_e) - F\xi_1 J_1(a\xi_1) = \hat{j}_z(\zeta). \quad (8)$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$  в выражении (4) имеем линейные алгебраические уравнения (5) — (8). Определитель этой системы имеет вид

$$D(\zeta) = \xi_1 \{ [e^{2\xi_1^2} H_0^{(1)}(b\xi_1) B_{11}(\xi_e) + e\xi_1 \xi_e H_1^{(1)}(b\xi_1) B_{01}(\xi_e)] \times \\ \times \xi_e^2 \xi_1 J_0(a\xi_1) - N(\zeta) J_1(a\xi_1) \}, \quad (9)$$

где

$$N(\zeta) = [\xi_e^2 H_1^{(1)}(b\xi_1) B_{00}(\xi_e) + e\xi_1 \xi_e H_0^{(1)}(b\xi_1) B_{10}(\xi_e)] \xi_e^2 \xi_1; \\ B_{km}(\xi_e) = J_k(b\xi_e) H_m^{(1)}(a\xi_e) - J_m(a\xi_e) H_k^{(1)}(b\xi_e).$$

Находя из системы (5) — (8) коэффициент

$$F = \hat{j}_z(\zeta) \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$$

и подставляя его в (3), записываем

$$\hat{A}_z(r, \zeta) = \hat{j}_z(\zeta) \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} J_0(r\xi_1), \quad r < a. \quad (10)$$

Учитывая, что на поверхности идеального проводника касательная составляющая вектора  $\vec{E}$  равна нулю везде, кроме источника

$$E_z(a, z) = -V_0^\circ \delta(z),$$

и используя (4), получаем дифференциальное уравнение

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) A_z(a, z) = -ikV_0^\circ \delta(z), \quad (11)$$

общее решение которого имеет вид

$$A_z(a, z) = C \cos kz + C_1 \sin kz - \frac{i}{2} V_0^\circ \sin k|z| \quad (12)$$

или с учетом четности  $A_z(a, z)$ , вытекающей из симметрии системы, а также выражения (10),

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \hat{j}_z(\zeta) \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} J_0(a\xi_1) e^{-i\zeta z} d\zeta = C \cos kz - \frac{i}{2} V_0^e \sin k|z|, \quad |z| < h. \quad (13)$$

Здесь  $S$  — контур интегрирования, идущий вдоль вещественной оси от  $-\infty$  до  $+\infty$  с обходом возможных полюсов подынтегральной функции по полуокружностям малого радиуса.

Так как

$$\hat{j}_z(\zeta) = \int_{-h}^h j_z(z) e^{i\zeta z} dz,$$

из (13) имеем интегральное уравнение

$$\int_{-h}^h j_z(x) K(z-x) dx = C \cos kz - \frac{i}{2} V_0^e \sin k|z| \quad (14)$$

с разностным ядром

$$K(z-x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} J_0(a\xi_1) e^{-i\zeta(z-x)} d\zeta. \quad (15)$$

Отметим, что (14) сходно с соответствующим уравнением, полученным в указанной монографии более сложным, но менее обоснованным путем. Однако, если там образ Фурье ядра интегрального уравнения возрастает с ростом аргумента  $\zeta$ , то в (15) он стремится к нулю при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ .

*Исследование ядра интегрального уравнения.* Используя в (14) замену переменных  $x = h\xi$ ,  $z = h\zeta$ , определяем

$$\int_{-1}^1 I_z(\xi) K(\zeta - \xi) d\xi = C \cos \kappa\zeta - \frac{i}{2} V_0^e \sin \kappa|\zeta|. \quad (16)$$

Здесь

$$I_z(\xi) = h j_z(h\xi), \quad \kappa = hk; \quad K(u) = \int_{S_+} \frac{N(w)}{D(w)} \cos wu dw, \quad (17)$$

где  $S_+$  — то же, что и  $S$ , но изменяющееся от 0 до  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} N(w) &= e^{\zeta_1 \zeta_e} H_0^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{10}(\zeta_e) - \zeta_e^2 H_1^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{00}(\zeta_e); \\ D(w) &= \zeta_1 \{ \zeta_e^2 H_0^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{11}(\zeta_e) - e^{\zeta_1 \zeta_e} H_1^{(1)}(\beta \zeta_1) B_{01}(\zeta_e) - \\ &\quad - N(w) J_1(\alpha \zeta_1) / J_0(\alpha \zeta_1) \}; \\ \beta &= b/h, \quad \alpha = a/h, \quad \zeta_1 = \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}, \quad \zeta_e = \sqrt{\kappa^2 e - \omega^2}; \\ B_{km}(\zeta_e) &= Y_k(\beta \zeta_e) J_m(\alpha \zeta_e) - Y_m(\alpha \zeta_e) J_k(\beta \zeta_e); \end{aligned}$$

$Y_k(\zeta)$  — функция Неймана.

Знаменатель подынтегрального выражения в (17) при  $\omega = \kappa$  обращается в нуль, т. е. точка  $\omega = \kappa$  для дроби  $N(\omega)/D(\omega)$  является полюсом. Для исследования его кратности выпишем асимптотики функций Бесселя при  $\omega \rightarrow \kappa$ . Так как здесь  $\zeta_1 = \sqrt{\kappa^2 - \omega^2} \rightarrow 0$ , а  $\zeta_\varepsilon \rightarrow \kappa \sqrt{\varepsilon - 1}$ , то

$$H_0^{(1)}(\beta \zeta_1) = i \frac{2}{\pi} \ln \zeta_1 + O(1),$$

$$H_1^{(1)}(\beta \zeta_1) = -i \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta \zeta_1} + O(\zeta_1 \ln \zeta_1);$$

$$J_1(\alpha \zeta_1) = \frac{\alpha}{2} \zeta_1 + O(\zeta_1^3), \quad J_0(\alpha \zeta_1) = 1 + O(\zeta_1^2).$$

Следовательно,

$$\frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\kappa \sqrt{\varepsilon - 1} B_{00}}{\zeta_1^2 \left[ \varepsilon B_{01} - \frac{\alpha}{2} \kappa \sqrt{\varepsilon - 1} B_{00} \right]} [1 + O(\zeta_1 \ln \zeta_1)],$$

где  $B_{km} = B_{km}(\kappa \sqrt{\varepsilon - 1})$ .

Таким образом, для дроби, находящейся под интегралом (17), точка  $\omega = \kappa$  — простой полюс, поэтому интеграл по верхней полуокружности малого радиуса  $\delta$  с центром в точке  $\omega = \kappa$  можно легко найти:

$$\oint_{\zeta_\delta^+} \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \cos \omega u \, d\omega = -\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \cos \omega u \right\}_{\omega=\kappa} =$$

$$= -\pi i \lim_{\omega \rightarrow \kappa} \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \cos \omega u (\omega - \kappa) = \pi i \frac{\sqrt{\varepsilon - 1} B_{00} \cos \kappa u}{2\varepsilon B_{01} - \alpha \kappa \sqrt{\varepsilon - 1} B_{00}}.$$

Воспользовавшись асимптотикой для модифицированных функций Бесселя, через которые выражаются функции  $N(\omega)$  и  $D(\omega)$  при больших значениях аргумента  $\omega$ , запишем

$$N(\omega) = i \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{1}{\pi^2 \beta} \left\{ \frac{\zeta_\varepsilon + e \zeta_1}{\sqrt{\zeta_1}} e^{-\beta(\zeta_1 - \zeta_\varepsilon) - \alpha \zeta_\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{e \zeta_1 - \zeta_\varepsilon}{\sqrt{\zeta_1}} e^{-\beta \zeta_1 - (\beta - \alpha) \zeta_\varepsilon} \right\} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{8\alpha \zeta_\varepsilon}\right) \right],$$

$$D(\omega) = \zeta_1 i \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{1}{\pi^2 \beta} \left\{ \left[ \varepsilon^2 \frac{\zeta_1^{3/2}}{\zeta_\varepsilon} + 2\varepsilon \sqrt{\zeta_1} + \frac{\zeta_\varepsilon}{\sqrt{\zeta_1}} \right] \times \right.$$

$$\times e^{-\beta(\zeta_1 - \zeta_\varepsilon) - \alpha \zeta_\varepsilon} + \left[ -\varepsilon^2 \frac{\zeta_1^{3/2}}{\zeta_\varepsilon} + 2\varepsilon \sqrt{\zeta_1} - \frac{\zeta_\varepsilon}{\sqrt{\zeta_1}} \right] \times$$

$$\left. \times e^{-\beta \zeta_1 - (\beta - \alpha) \zeta_\varepsilon} \right\} [1 + O(1/8\alpha \zeta_\varepsilon)].$$

Если  $\omega$  настолько большое, что  $\zeta_1 \approx \zeta_\varepsilon \approx \omega$ , то из приведенных выражений сразу следует асимптотика

$$\frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{1}{\varepsilon + 1} \frac{1}{\omega} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\omega} + e^{-(\beta - \alpha)\omega}\right) \right].$$

Других особых точек, как показало аналитическое и численное исследование, подынтегральная функция, определяемая соотношением  $N(w)/D(w)$ , не имеет. Численно-аналитическое исследование проводилось в предположении, что  $\kappa \ll 1$ ,  $\varepsilon \gg 1$ ,  $\kappa\varepsilon = O(1)$ . Это не только приемлемо, но и необходимо для некоторых экспериментальных исследований. Тогда

$$\pi K(u) = \left( \oint_{C_\kappa} + \int_{2\kappa}^{\kappa\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\kappa\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{N(w)}{D(w)} \cos wu \, dw. \quad (18)$$

Первый интеграл в (18) — чисто мнимая величина, три остальных — вещественные, причем существенный вклад дает только последний интеграл при малых значениях  $u$ :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{N(w)}{D(w)} \cos wu \, dw &= \frac{1}{\varepsilon+1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos wu}{w} \, dw + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon+1} \left[ \ln \frac{1}{\varepsilon|u|} - \gamma - \int_0^{\varepsilon|u|} \frac{\cos t - 1}{t} \, dt \right] + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  — постоянная Эйлера, а интеграл в квадратных скобках при малых  $\varepsilon|u|$  ведет себя, как  $O(\varepsilon^2|u|^2)$ , поэтому основной вклад дает  $\ln(1/\varepsilon|u|)$ .

Численный расчет при  $\varepsilon = 1600$ ,  $\kappa\sqrt{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$  показал, что интегралы

$$\int_{2\kappa}^{\kappa\sqrt{\varepsilon}} = O(1/100), \quad \int_{\kappa\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon} = O(1/1000).$$

*Решение интегрального уравнения для тока.* Отметим вначале, что ядро интегрального уравнения (14) является разностным и имеет слабую особенность при совпадении аргументов, поэтому численное решение его не составляет большой трудности и может быть проведено с помощью ряда известных методов. Нам выбран приближенный, но достаточно эффективный подход, использованный в монографии Р. Кинга и Т. Смита, приводящий к аналитическому выражению достаточно простого вида.

Если воспользоваться острым пиком  $K(\zeta - \xi)$  вблизи  $\zeta = \xi$  и предположить, что  $K(u) \approx K\delta(u)$ , то из выражения для образа Фурье

$$\bar{K}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) e^{i w u} \, du$$

очевидно, что

$$K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) \, du = K \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \, du = K = \frac{N(0)}{D(0)}.$$

Следовательно, из (16) получаем

$$I_z(\zeta) \hat{K}(0) = C \cos \kappa \zeta - \frac{i}{2} V_0^e \sin \kappa |\zeta|, |\zeta| < 1.$$

Постоянную  $C$  можно вычислить, если положить  $\zeta = 1$ . Тогда  $I_z(1) = = h j_z(h) = 0$  и, таким образом,

$$C = \frac{i}{2} V_0^e \frac{\sin \kappa}{\cos \kappa},$$

значит,

$$I_z(\zeta) = \frac{i}{2} V_0^e \frac{\sin \kappa (1 - |\zeta|) D(0)}{\cos \kappa N(0)}, |\zeta| < 1,$$

является аналитическим решением интегрального уравнения (16).

Итак, рассмотрен подход к изучению тока в изолированной антенне конечной длины, позволяющий получить интегральное уравнение с разностным ядром, которое имеет слабую особенность. Проведено аналитическое и численное исследование ядра и получено аналитическое выражение для тока в антенне.

*Поступила в редколлегию 12.07.87*

УДК 621.385

*А. А. КОНТАРЬ, П. В. НЕШМОНИН*

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР, СОДЕРЖАЩИХ ДИСПЕРСНУЮ ФАЗУ**

Композиционные материалы (КМ) находят большое применение в современной технике благодаря многообразию свойств, широкому интервалу рабочих температур при различных механических воздействиях [1]. Определенный практический интерес представляет группа электропроводящих КМ. Изменяя соотношение между связующим — матрицей и электропроводящим наполнителем, а также используя различные наполнители [2], удается изменять проводимость КМ в широком диапазоне. Накопленный объемный эмпирический материал по электропроводящим КМ лишен, с нашей точки зрения, одной очень важной информации — зависимости проводимости от числа и формы возникающих электропроводящих цепочек, образованных частицами наполнителя между стенками образца. Моделирование образования прозодящих цепочек в среде диэлектрика описано в работе [3], однако, кроме факта, подтверждающего формирование направленной структуры из разрозненных частиц в электрическом поле, такое моделирование не решает проблемы образования электропроводящих структур, потому что можно создать только одну цепочку между электродами, идущую от одного электрода к другому. В реальных условиях формирование электропроводящих цепочек идет в матрице в отсутствие электрического поля во всем объеме под действием сил седиментации электростатического притяжения и отталкивания, тепловых потоков, а также других факторов, связанных с поверхностными эффектами на границе раздела между наполнителем и матрицей.

С целью преодоления некоторых особенностей натурального моделирования предложено провести такое моделирование структур КМ на микроЭВМ «Электроника ДЗ-28» с алфавитно-цифровым дисплеем и знаковосинтезирующим устройством печати. Необходимо отметить, что решение этой и подобных задач на ЭВМ, не имеющей в своем составе графического дисплея или графопостроителя, трудно проконтролировать визуально. Использование алфавитно-цифрового дисплея позволяет решить поставленную задачу только при введении ряда ограничений на размеры образца и распределяемых частиц. В состав математического обеспечения такого комплекса обычно входит диалоговый язык программирования высокого уровня БЕЙСИК-3А. Однако интерпретатор языка БЕЙСИК-3А не имеет средств работы с экраном дисплея, что крайне затрудняет отображение на экране динамически изменяющихся картин и приводит к невозможности решения задач моделирования.

Для преодоления этого ограничения разработан пакет программ управления экраном дисплея, написанный в машинных командах микроЭВМ «Электроника ДЗ-28». Каждая программа пакета оформлена как внешняя программа интерпретатора, расширяющая его возможности функциями управления алфавитно-цифровым дисплеем.

Базовый вариант пакета программ, используемый нами для решения задачи моделирования, включает восемь программ. Пакет подпрограмм выполняет следующие функции управления дисплеем: 1) позволяет помещать курсор в любую программно-заданную точку на экране; 2) осуществляет стирание страницы экрана (очистка памяти дисплея, соответствующей одному экрану); 3) реализует очистку всей памяти дисплея; 4) производит смену страниц экрана дисплея; 5) выполняет звуковой сигнал программно-заданной длительности; 6) перемещает изображение экрана на программно заданное число строк вниз; 7) перемещает изображение экрана на программно-заданное число строк вверх; 8) реализует паузу определенной, программно-заданной длительности.

Параметры этих подпрограмм могут быть заданы константами, или простыми переменными. Например: 20 LET J=5; 30 CALL 1, J, 23, где 1 — номер подпрограммы; J — заданный простой переменной номер строки, в которую нужно поместить курсор; 23 — заданная константой позиция J-й строки, в которую будет помещен курсор. При выполнении этих операторов курсор на экране дисплея установится в 23-ю позицию 5-й строки.

Эти подпрограммы широко используются в диалоговой программе, созданной на языке БЕЙСИК для моделирования КМ, содержащего электропроводящий компонент. Для конкретизации поставленной задачи введены некоторые ограничения, в том числе выбрано двумерное пространство с размерами  $20 \times 40$ , в котором при максимальном заполнении можно разместить 800 частиц и рационально использовать экран дисплея. В исходном состоянии ограниченное пространство не содержит размещенных частиц. Разработанная программа на ограниченном поле экрана позволяет

размещать частицы по случайному равномерному закону распределения. В том случае, если следующая частица случайно попадает на занятое место, то программа обеспечивает автоматический поиск свободного места рядом. Если не удастся в ближайшем окружении найти свободное место, то частица считается неразмещенной и учитывается отдельно. Таким образом последовательно заполняется все поле.

На первой стадии моделирования размещалось 350—380 частиц в указанном ограниченном пространстве. При постоянном визуальном контроле дискретно добавлялось по несколько размещаемых частиц и определялось возникновение контактов между размещенными частицами в цепочках, образующихся между широкими сторонами прямоугольника. Первая стадия моделирования заканчивалась после возникновения первой такой непрерывной цепочки, что принималось нами за появление проводимости между широкими стенками. Затем изображение с экрана дисплея с картиной моделирования структуры фиксировалось в памяти ЭВМ и выводилось на печать. Вместе с моделью в распечатке фиксировалось общее число введенных частиц, утраченных из-за отсутствия свободного места, т. е. попавших во второй слой и не учитываемых плоской моделью.

Всего было проведено несколько десятков моделирований, в которых количество размещенных частиц изменялось от 370 до 480, а число частиц в цепочке изменялось от 24 до 53, причем не удалось обнаружить никакой зависимости между количеством размещенных частиц и частиц в цепочке, соединяющей широкие стенки. Одновременно установлено, что после размещения 370—380 частиц, составляющих 46—47 % от общего количества частиц, возможно появление первой проводящей цепочки. После размещения 51—55 % от общего количества частиц можно гарантировать возникновение одной электропроводящей цепочки, а более 55 % — электропроводимости в КМ, содержащем металлические наполнители, сажу или графит.

Необходимо отметить, что проводимость КМ, содержащих один и тот же наполнитель с одинаковым гранулометрическим составом, изменяется в широких пределах и подчиняется случайному закону распределения, связанному с произвольным расположением частиц даже в двумерном пространстве.

При дальнейшем увеличении количества расположенных частиц от 540 до 700, что составляет 67,5—87,8 % от общего числа, наблюдается появление цепочки, состоящей из 20 частиц, соединяющей по прямой широкие стенки прямоугольника. В результате такого эффекта можно ожидать, что, начиная с 67,5 % размещенных частиц, удельное сопротивление должно резко уменьшиться. Стабильное образование как минимум одной прямой цепочки и нескольких изогнутых отмечается после 74 % размещенных частиц. Количество размещенных частиц, как и в первой стадии, контролировалось визуально, а окончание моделирования сопровождалось аналогичной распечаткой.

Результаты, полученные после проведения нескольких десятков полных циклов моделирования, позволили сделать следующие выводы: проводимость в моделируемой структуре практически отсутствует, если количество размещенных частиц не превышает 48 % от теоретически возможного; во всех случаях моделирования проводящие цепочки различной длины и произвольной формы возникают при размещении от 48 до 60 % частиц и гарантированно, начиная с 51 %; прямой контакт между широкими сторонами прямоугольника появляется после размещения 67 % и гарантированно после 74 % от общего количества частиц.

**Список литературы:** 1. *Композиционные материалы*: Справ. К., 1985. 591 с. 2. *Металлополимерные материалы и изделия*. М., 1979. 309 с. 3. *Электропроводящие полимерные материалы* / В. Е. Гуль, Л. Н. Царский, С. Н. Майзель и др. М., 1968. 248 с.

*Поступила в редколлегию 07.07.87*

УДК 621.317

*М. А. ПРИСЕНКО, К. Л. ШЕВЧЕНКО, А. А. ПОТАПОВ*

### **ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЧ КООКСИАЛЬНОГО ДАТЧИКА С ПЛОСКИМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ МАТЕРИАЛАМИ**

---

При контроле влажности листовых и рулонных материалов во многих случаях используются коаксиальные резонаторы с торцевым зазором. Благодаря высокой напряженности электромагнитного поля в области взаимодействия с исследуемым материалом коаксиальные датчики позволяют измерять малые значения влажности тонких материалов, что труднодостижимо при использовании других типов датчиков.

Известно [1], что влажность материала с достаточной точностью может быть однозначно описана диэлектрическими параметрами материала, в частности диэлектрической проницаемостью. Представляет интерес зависимость между диэлектрической проницаемостью материала, частично заполняющего резонансный преобразователь (рис. 1), и выходными параметрами резонансного датчика — его резонансной частотой. При этом желательно иметь не относительную зависимость резонансной частоты от диэлектрической проницаемости, предполагающую хотя бы одну известную точку на градуировочной кривой, полученную по эталонному образцу, а абсолютную зависимость, создающую возможность вычисления значения резонансной частоты, без использования эталона. В работах [2; 3] решались подобные задачи, однако при использовании их результатов необходима предварительная подготовка образца, который должен иметь форму усеченного конуса [2] либо цилиндра с диаметром, совпадающим с диаметром центрального проводника резонатора [3], что не всегда удобно.

Найдем выражение, связывающее длину волны в резонаторе с диэлектрической проницаемостью материала для случая (рис. 1), когда контролируется влажность листовых и рулонных материалов,

таких, как бумага, ткани, кожа и др. При выводе формулы применим методу [4].

Условно разделим полость резонатора на две области —  $A$  и  $B$ , одна из которых заполнена воздухом, а другая — исследуемым материалом. Согласно данной методике нужно найти решение волнового уравнения отдельно для областей  $A$  и  $B$ , потребовать непрерывности составляющих электромагнитного поля на границе раздела областей. Для каждой области рассматриваются симметричные решения волнового уравнения в цилиндрических координатах  $z, r$  и  $\varphi$ , для которых компоненты поля  $E_z, E_r, H_\varphi$  отличны от нуля. Для области  $A$ , считая, что она заполнена воздухом с  $\epsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , запишем

$$E_z^A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_0(x_n^A r_2) I_0(x_n^A r) - I_0(x_n^A r_2) K_0(x_n^A r)}{K_0(x_n^A r_2)} \cos \gamma_n^A z; \quad (1)$$

$$E_r^A = A_0 \frac{N_0(k_0 r_2) I_0(k_0 r) - I_0(k_0 r_2) N_0(k_0 r)}{N_0(k_0 r_2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^A}{x_n^A} A_n \frac{K_0(x_n^A r_2) I_1(x_n^A r) - I_0(x_n^A r_2) K_1(x_n^A r)}{K_0(x_n^A r_2)} \sin \gamma_n^A z; \quad (2)$$

$$H_\varphi^A = j A_0 \frac{N_0(k_0 r_2) I_1(k_0 r) - I_0(k_0 r_2) N_1(k_0 r)}{N_0(k_0 r_2)} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0}{x_n^A} A_n \frac{K_0(x_n^A r_2) I_1(x_n^A r) + I_0(x_n^A r_2) K_1(x_n^A r)}{K_0(x_n^A r_2)} \cos \gamma_n^A z, \quad (3)$$

где

$$x_n^A = \sqrt{(\gamma_n^A)^2 - k_0^2}; \quad n = 1, 2, 3 \dots; \quad \gamma_n^A = \frac{\pi n}{L}; \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{рез}}};$$

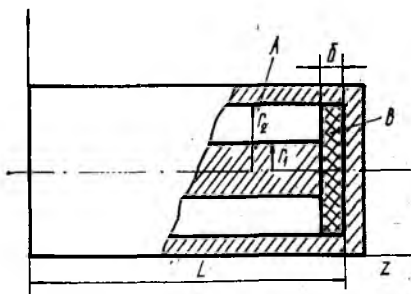


Рис. 1

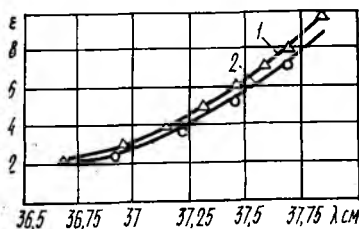


Рис. 2

$\lambda_{\text{рез}}$  — резонансная длина волны;  $J_0, J_1, N_0, N_1$  — функции Бесселя и Вебера соответствующих порядков;  $I; K$  — модифицированные функции Бесселя и Вебера.

Аналогично представим компоненты электромагнитного поля для области  $B$ :

$$E_z^B = \sum_{m=1}^{\infty} B_m I_0(x_m^B r) \cos \gamma_m^B z; \quad (4)$$

$$E_r^B = B_0 I_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^B}{x_m^B} B_m I_1(x_m^B r) \sin \gamma_m^B z; \quad (5)$$

$$H_\phi^B = j B_0 \sqrt{\varepsilon_x} I_1(kr) + j V \sqrt{\varepsilon_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{x_m^B} B_m I_1(x_m^B r) \cos \gamma_m^B z. \quad (6)$$

Здесь

$$x_m^B = \sqrt{(\gamma_m^B)^2 - k^2}; \quad m = 1, 2, 3 \dots; \quad \gamma_m^B = \frac{\pi m}{aL}; \quad k = \sqrt{\varepsilon_x} k_0;$$

$\varepsilon_x$  — диэлектрическая проницаемость среды в области  $B$ .

Указанные компоненты удовлетворяют граничным условиям в области  $A$ :  $E_r^A = 0, z = L$ ;  $E_z^A = 0, r = r_1$  и  $r = r_2$  (7). Соответственно в области  $B$  имеем  $E_r^B = 0, z = 0$ ;  $E_z^B = 0, r = r_2$  (8). Потребуем выполнения граничных условий для областей  $A$  и  $B$  на разделяющей их поверхности  $z = \delta$ . Для области  $A$  его можно задать в виде

$$E_r^A = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{\delta} z, \quad r_1 < r < r_2. \quad (9)$$

Соответственно для области  $B$

$$E_r^B = 0, \quad r < r_1; \quad E_z^B = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{\delta} z, \quad r_1 < r < r_2. \quad (10)$$

При этом считаем, что

$$B_0 I_0(kr_2) = M_0; \quad B_m I_0(x_m^B r_2) = M_m. \quad (11)$$

Условие (9) представим рядом Фурье:

$$E_r^A = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{L} z, \quad (12)$$

где  $\delta = aL$  ( $a < 1$ );

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^{aL} \left[ M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{aL} z \right] dz = a M_0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{z}{L} \int_0^{aL} \left[ M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{aL} z \right] \sin \frac{\pi n}{L} z dz = \\ &= 2M_0 - \frac{\cos \pi a n}{\pi n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m M_m \frac{n \cos \pi a n}{\left(\frac{m^2}{a^2} - n^2\right)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы выбранное в области  $A$  решение удовлетворяло (9), должны выполняться равенства

$$C_0 = A_0 \frac{J_0(k_0 r_1) N_0(k_0 r_2) - I_0(k_0 r_2) N_0(k_0 r_1)}{N_0(k_0 r_2)}; \quad (15)$$

$$C_n = A_n \frac{I_0(x_n^A r_1) K_0(x_n^A r_2) - I_0(x_n^A r_2) K_0(x_n^A r_1)}{K_0(x_n^A r_2)}, \quad (16)$$

$C_0, C_n$  в (15), (16) определяются выражениями (13) и (14). Тогда, принимая

$$I_0(k_0 r) N_0(k_0 r_2) - J_0(k_0 r_2) N_0(k_0 r) = G_0(k_0 r); \quad (17)$$

$$J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_2) - J_0(k_0 r_2) N_1(k_0 r) = G_1(k_0 r); \quad (18)$$

$$I_0(x_n^A r) K_0(x_n^A r_2) - I_0(x_n^A r_2) K_0(x_n^A r) = D_{0n}(x_n^A r); \quad (19)$$

$$I_1(x_n^A r) K_0(x_n^A r_2) - I_0(x_n^A r_2) K_1(x_n^A r) = D_{1n}(x_n^A r), \quad (20)$$

с учетом (1) — (3) записываем

$$E_z^A = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{D_{0n}(x_n^A r)}{D_{0n}(x_n^A r_1)} \cos \gamma_n^A z; \quad (21)$$

$$E_r^A = C_0 \frac{G_0(k_0 r)}{G_0(k_0 r_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^A}{x_n^A} C_n \frac{D_{1n}(x_n^A r)}{D_{0n}(x_n^A r_1)} \sin \gamma_n^A z; \quad (22)$$

$$H_\varphi^A = j C_0 \frac{G_1(k_0 r)}{G_0(k_0 r_1)} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0}{x_n^A} C_n \frac{D_{1n}(x_n^A r)}{D_{0n}(x_n^A r_1)} \cos \gamma_n^A z. \quad (23)$$

Для области  $B$  с учетом (11) и (4) — (6) имеем

$$E_z^B = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \frac{I_0(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)} \cos \gamma_m^B z; \quad (24)$$

$$E_r^B = M_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^B}{x_m^B} M_m \frac{I_1(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)} \sin \gamma_m^B z; \quad (25)$$

$$H_\varphi^B = j \sqrt{\epsilon_x} M_0 \frac{J_1(kr)}{J_0(kr_1)} + j \sqrt{\epsilon_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{x_m^B} M_m \frac{I_1(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)} \cos \gamma_m^B z. \quad (26)$$

С целью нахождения условия возникновения резонанса в объеме резонатора следует потребовать равенства нормальных составляющих электромагнитного поля на границе раздела областей  $A$  и  $B$ :

$$(E_r^A)_{z=\delta} = (E_r^B)_{z=\delta}; \quad (27)$$

$$(H_\varphi^A)_{z=\delta} = (H_\varphi^B)_{z=\delta}. \quad (28)$$

Равенство (27), как видно из (9) и (10), выполняется для  $r_1 < r < r_2$ :

$$(E_r^A)_{z=\delta} = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi_m}{aL} z = (E_r^B)_{z=\delta}. \quad (29)$$

Компоненты поля  $(H_\varphi^A)_{z=\delta}$  и  $(H_\varphi^B)_{z=\delta}$ , описываемые выражениями (23) и (26), представим как

$$(H_\varphi^A)_{z=\delta} = R_0^A C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A C_n \cos \frac{\pi n}{L} z, \quad (30)$$

где

$$R_0^A = j \frac{G_1(k_0 r)}{G_0(k_0 r_1)}; \quad R_n^A = j \frac{k D_{1n}(x_n^A r)}{x_n^A D_{0n}(x_n^A r_1)};$$

$$(H_\Phi^B)_{z=\delta} = R_0^B M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m^B M_m \cos \frac{\pi_m}{aL} z. \quad (31)$$

Здесь

$$R_0^B = j \sqrt{\epsilon_x} \frac{J_1(kr)}{J_0(kr_1)}; \quad R_m^B = j \frac{k}{x_m^B} \sqrt{\epsilon_x} \frac{I_1(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)}.$$

Для сравнения компонент магнитного поля по выражениям (30) и (31) функцию  $(H_\Phi^A)_{z=\delta}$  разложим в ряд Фурье по косинусам в интервале  $(0, aL)$ . Условие (28) в этом случае приводится к двум равенствам

$$R_0^B M_0 = \frac{1}{aL} \int_0^L \left[ C_0 R_0^A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \cos \frac{\pi_n}{L} z \right] dz =$$

$$= C_0 R_0^A + \frac{1}{\pi_a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \frac{\sin \pi_{an}}{n}; \quad (32)$$

$$R_m^B M_m = \frac{2}{aL} \int_0^L \left[ C_0 R_0^A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \cos \frac{\pi_n}{L} z \right] \cos \frac{\pi_m}{aL} z dz =$$

$$= \frac{2}{\pi_a} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \frac{n \sin \pi_{an}}{\left( n^2 - \frac{m^2}{a^2} \right)}. \quad (33)$$

Подставляя в (32) и (33) значения  $C_0$  и  $C_n$  из (13) и (14), производя деление обоих выражений на  $M_0$  и ограничиваясь тремя первыми членами суммы, получаем

$$\frac{\pi^2}{2a} R_0^B = \frac{\pi^2 R_0^A}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{2a^2 n^2} + \frac{M_1}{2M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)} -$$

$$- \frac{M_2}{8M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{\left( \frac{a^2 n^2}{4} - 1 \right)} + \frac{M_2}{18M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{\left( \frac{a^2 n^2}{9} - 1 \right)}; \quad (34)$$

$$\frac{\pi^2}{4a} R_1^B \frac{M_1}{M_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)} - \frac{M_1}{2M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin^2 \pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)^2}; \quad (35)$$

$$\frac{\pi^2}{a} R_2^B \frac{M_2}{M_0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{\left( \frac{a^2 n^2}{4} - 1 \right)} + \frac{M_2}{8M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi_{an}}{\left( \frac{a^2 n^2}{4} - 1 \right)^2}; \quad (36)$$

$$\frac{9\pi^2}{4a} R_3^B \frac{M_3}{M_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi a_n}{(a^2 n^2 - 1)} - \frac{M_3}{18M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi a_n}{(a^2 n^2 - 1)^2}. \quad (37)$$

Определяя из (35)—(37) соотношения  $M_1/M_0$ ,  $M_2/M_0$ ,  $M_3/M_0$  и подставляя их в (34), имеем уравнение, описывающее условия возникновения резонанса в коаксиальном резонаторе, частично заполненном плоским диэлектриком:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{2} R_0^A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi a_n}{a^2 n^2} = \frac{\pi^2}{2a} R_0^B + \\ & \frac{\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi a_n}{(a^2 n^2 - 1)} \right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi a_n}{(a^2 n^2 - 1)^2} + \frac{\pi^2}{4a} R_1^B} - \frac{\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi a_n}{a^2 n^2 - 4} \right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi a_n}{(a^2 n^2 - 4)^2} + \frac{\pi^2}{4a} R_2^B} + \\ & + \frac{\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi a_n}{a^2 n^2 - 9} \right)^2}{-\sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi a_n}{(a^2 n^2 - 9)^2} + \frac{\pi^2}{4a} R_3^B}. \end{aligned}$$

Найденное выражение позволяет вычислить абсолютное значение длины волны в резонаторе или его резонансной частоты в зависимости от толщины и диэлектрической проницаемости частично заполняющего резонатор плоского диэлектрика. На рис. 2 приведены расчетная и экспериментальная кривые зависимости резонансной длины волны в резонаторе от диэлектрической проницаемости материала. Для экспериментов использовался коаксиальный резонатор с параметрами  $L=60$  мм,  $r_1=4$  мм,  $r_2=16$  мм. Для снятия кривой применяли образцы фторопласта, оргстекла, эбонита, гетинакса и стекла толщиной  $0,5 \pm 0,05$  мм.

С помощью приведенных данных определены абсолютные значения диэлектрической проницаемости ряда влагосодержащих материалов, зависимость диэлектрической проницаемости от влажности таких материалов, как кожа, бумага, белковая оболочка для пищевых продуктов и др. Проведенные исследования позволили отыскать аналитические выражения, описывающие зависимость диэлектрической проницаемости от их влажности.

**Список литературы:** Кичевский Е. С. Высокочастотный контроль влажности. М., 1972. 215 с. 2. Патрушев В. Л. Расчет собственной частоты П-образного объемного контура, частично заполненного поглощающим диэлектриком // Докл. АН СССР. 1955. Т. 107, № 3. С. 409 — 413. 3. Карпова О. В. Об абсолютном методе измерения теоретических параметров твердых веществ с помощью П-образного резонатора // Физика твердого тела. 1959. Т. 1, № 2. С. 246—255. 4. Hahn W. C. On the resonant frequency of Closed Coucentric Lines // Phys. 1941. Vol. 12, № 62. P. 33 — 45.

Поступила в редколлегию 12.07.87

**НАСТРОЙКА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ ИНЕРЦИОННЫХ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ МОЩНОСТИ РАДИОСИГНАЛОВ СВЧ**

При измерении формы огибающей радиосигналов СВЧ важен выбор первичного измерительного преобразователя (ИП) мощности. Выпускаемые промышленностью быстродействующие высокочувствительные полупроводниковые ИП [1; 2] имеют ряд недостатков, в том числе температурную и временную нестабильность параметров, нелинейность вольт-ваттных и неравномерность частотных характеристик, чувствительность к гармоникам СВЧ-сигнала. Перечисленные недостатки существенно снижены у тепловых преобразователей [2], имеющих, однако, значительную инерционность. Последнее успешно преодолевается на практике применением различных методов и устройств коррекции динамических характеристик [3; 4].

При реализации корректирующего устройства (КУ) важно обеспечить адекватность его параметров динамическим характеристикам ИП. Последние могут изменяться при замене ИП или изменении условий его эксплуатации, например температуры окружающей среды. В этих случаях будет возникать весьма существенная динамическая погрешность измерения формы огибающей радиосигнала [3]. Устранить ее можно настройкой КУ под параметры конкретного ИП. Суть настройки должна заключаться в подаче некоторого испытательного воздействия на вход системы ИП — КУ, контроле определенного параметра отклика КУ и регулировке характеристик КУ до получения экстремума контролируемого параметра. Таким образом, при разработке методики настройки КУ необходимо решить следующие задачи: задаться контролируемым параметром отклика КУ; произвести выбор испытательного воздействия, обеспечивающего экстремум контролируемого параметра при точной настройке КУ; определить последовательность операций по изменению параметров элементов КУ.

Для облегчения решения первых двух задач предположим, что КУ производит идеальную коррекцию в базисе безынерционного звена, т. е. форма выходного сигнала КУ при его точной настройке полностью идентична форме огибающей испытательного воздействия. Такое предположение справедливо с некоторым допущением. Хотя в реальном случае быстродействие скорректированного ИП и возрастает, но все же имеет конечную величину.

Испытательное воздействие будем искать в классе периодических сигналов, так как настройка КУ более продолжительна во времени по сравнению с длительностью установления переходных процессов в ИП. В этом случае отклик КУ после установления переходных процессов также будет представлять собой периодиче-

ский сигнал. В теории электрорадиоизмерений периодический электрический сигнал  $U(t)$  характеризуется амплитудным  $U_m$ , средним  $U_{cp}$ , средневыпрявленным  $U_{св}$  и среднеквадратическим  $U_{скв}$  значениями. Использование указанных величин в качестве основы для выделения контролируемого параметра точности настройки КУ удобно потому, что для их измерения существуют промышленно выпускаемые приборы.

На основании основных свойств неравенств и определенных интегралов запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - t_1} \left| \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt \right| &< \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |U(t)| dt < \\ &< \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} < \max |U(t)|. \end{aligned} \quad (1)$$

При равенстве длительности интервала  $(t_1, t_2)$  периоду повторения  $T$  отклика  $U(t)$  неравенство (1) переписывается относительно искомых параметров так:

$$|U_{cp}| < U_{св} < U_{скв} < U_m. \quad (2)$$

Поочередно нормируя члены неравенства (2) к каждому из входящих в него параметров, получаем набор неравенств

$$\begin{aligned} U_{скв}/U_m &\leq 1; \quad U_{св}/U_m &\leq 1; \quad |U_{cp}|/U_m &\leq 1; \\ U_{св}/U_{скв} &\leq 1; \quad |U_{cp}|/U_{скв} &\leq 1; \quad |U_{cp}|/U_{св} &\leq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

инвариантных к амплитуде отклика КУ и допускающих неопределенность амплитуды испытательного воздействия и статического коэффициента преобразования системы ИП — КУ, изменяющегося в процессе настройки КУ.

Для достижения равенства в выражениях (3) и, следовательно, максимума входящих в него нормированных параметров в общем случае необходимо и достаточно выполнить условие  $|U(t)| = U_m$ ,  $t \in (t_1, t_2)$  (4). Выражение (4) может соответствовать двум типам испытательных воздействий: в виде радиосигнала непрерывной генерации, но такое воздействие непригодно для настройки КУ; для знакопеременных  $U(t)$  при  $U(t)$ , имеющем форму «меандр» без постоянной составляющей. Последнее достигается в случае, когда  $U(t)$  — переменная составляющая отклика системы ИП — КУ на испытательное воздействие в виде прямоугольных импульсов мощности СВЧ со скважностью 2. В этом случае  $U_{cp} = 0$  и из неравенств (3) сохраняются три неравенства, которые запишем следующим образом:  $K_A \geq 1$ ;  $K_\Phi \geq 1$ ;  $K_A K_\Phi \geq 1$  (5), где  $K_A = U_m/U_{скв}$ ,  $K_\Phi = U_{скв}/U_{св}$  — соответственно коэффициенты амплитуды и формы.

Минимум  $K_A$ ,  $K_\Phi$  и  $K_A K_\Phi$ , равный единице (или максимум обратных им величин), достигается при точной настройке КУ и испытательном воздействии выбранной формы. Указанная форма испытатель-

ного воздействия удобна для работы на СВЧ еще и потому, что является результатом одной из немногих видов модуляции источников радиосигналов этого диапазона.

Из выражения (4) видно, что при одинаковой расстройке КУ, наиболее сильно от минимального значения отличается величина  $K_A K_\Phi = U_m / U_{св}$ , поэтому целесообразно использование ее в качестве контролируемого параметра. Эту величину можно представить как  $K_\Phi K_A = 1 + \delta U_{св}$  (6), где  $\delta U_{св} = (U_m - U_{св}) / U_{св}$  — относительное отклонение средневывраченного значения переменной составляющей отклика КУ от ее амплитудного значения.

Анализ выражения (6) показал, что повысить чувствительность настройки и, следовательно, ее точность можно, определив логарифм величины  $K_A K_\Phi$ . В этом случае контролируемый параметр  $\beta = \ln K_A K_\Phi$  при малых расстройках КУ определяется относительным отклонением

$$\beta = \ln(U_m / U_{св}) = \ln(1 + \delta U_{св}) \approx \delta U_{св}. \quad (7)$$

Методика настройки КУ конкретного ИП зависит от его структуры и динамических характеристик. Рассмотрим настройку КУ апериодического ИП первого порядка при коррекции в базе интегратора с конечной памятью [5]. При частройке на вход ИП выступают прямоугольные импульсы мощности формы «меандр». Выходной сигнал ИП в установившемся режиме равен

$$\begin{aligned} U_1(t) &= KP \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} / \left( 1 + e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) \right], \quad t \in (0; T/2); \\ U_2(t) &= KPe^{-\frac{t}{\tau} + \frac{T}{2\tau}} / \left( 1 + e^{-\frac{T}{2\tau}} \right), \quad t \in (T/2; T). \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с алгоритмом коррекции необходимо определить разность между выходным сигналом ИП и этим же сигналом, задержанным на время  $t_3$ :

$$y_1 = U_1(t) - U_2(t - t_3 + T) = KP \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1 + e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_3}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right), \quad t \in (0; t_3);$$

$$y_2 = U_1(t) - U_2(t - t_3) = KPe^{-\frac{t}{\tau}} \frac{e^{\frac{t_3}{\tau}} - 1}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}, \quad t \in (t_3; T/2);$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= U_2(t) - U_1(t - t_3) = KP \left( e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{e^{\frac{T}{2\tau}} + e^{\frac{t_3}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} - 1 \right), \\ & \quad t \in (T/2; t_3 + T/2); \end{aligned}$$

$$y_4(t) = U_2(t) - U_2(t - t_3) = KP \frac{1 - e^{\frac{t_3}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{T}{2\tau}}, \quad t \in (t_3 + T/2; T). \quad (9)$$

Кроме того, необходимо усреднить  $U(t)$  за время  $t_3$ :

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= \frac{1}{t_3} \left[ \int_{t-t_3}^0 U_2(t-t_3+T) dt + \int_0^t U_1(t) dt \right] = \\
 &= KP \left( \frac{t-\tau}{t_3} + \frac{\tau}{t_3} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1+e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right), \quad t \in (0; t_3); \\
 z_2(t) &= \frac{1}{t_3} \int_{t-t_3}^t U_1(t) dt = KP \left( 1 + \frac{\tau}{t_3} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1-e^{-\frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right), \quad t \in (t_3; T/2); \\
 z_3(t) &= \frac{1}{t_3} \left[ \int_{t-t_3}^{T/2} U_1(t) dt + \int_{T/2}^t U_2(t) dt \right] = \\
 &= KP \left( \frac{\tau-t+\frac{T}{2}}{t_3} + 1 - \frac{\tau}{t_3} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{e^{\frac{T}{2\tau}} + e^{\frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right), \quad t \in (T/2; t_3 + T/2); \quad (10) \\
 z_4(t) &= \frac{1}{t_3} \int_{t-t_3}^t U_2(t) dt = KP \frac{\tau}{t_3} e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{T}{2\tau}} \frac{1-e^{-\frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}}, \quad t \in (t_3 + T/2; T),
 \end{aligned}$$

а также просуммировать разностный сигнал (9) с усредненным (10) взятым с весовым коэффициентом  $A$ . Принимая, что  $\eta = A(\tau)/t_3$  — коэффициент расстройки, получаем выходной сигнал системы ИП — КУ в виде

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= KP \left[ \eta \frac{t}{T} + (1-\eta) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1+e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) \right], \quad t \in (0; t_3); \\
 x_2(t) &= KP \left[ \eta \frac{t_3}{\tau} + (1-\eta) e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{e^{\frac{t_3}{\tau}} - 1}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right], \quad t \in (t_3; T/2); \quad (11) \\
 x_3(t) &= KP \left[ \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{T}{2\tau} + \frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} (1-\eta) - \left( 1 - \eta - \eta \frac{T}{2\tau} + \eta \frac{t}{\tau} - \eta \frac{t_3}{\tau} \right) \right], \\
 &\quad t \in (T/2; t_3 + T/2); \\
 x_4(t) &= KP \left[ e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{T}{2\tau}} \frac{1-e^{-\frac{t_3}{\tau}}}{1+e^{-\frac{T}{2\tau}}} (1-\eta) \right], \quad t \in (t_3 + T/2; T).
 \end{aligned}$$

Определим постоянную составляющую сигнала  $x(t)$ :

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{KP t_3 \eta}{2\tau}. \quad (12)$$

Переменная составляющая  $x(t)$  равна разности выходного сигнала КУ и его постоянной составляющей. Анализ выражений (11) и (12) показывает, что производные переменной составляющей выходного сигнала КУ имеют следующие значения:  $x'_{п1}(t) > 0$ ,  $t \in (0; t_3)$ ;  $x'_{п2}(t) < 0$ ,  $t \in (t_3; T/2)$ ;  $x'_{п3}(t) < 0$ ,  $t \in (T/2; t_3 + T/2)$ ;  $x'_{п4}(t) > 0$ ,  $t \in (t_3 + T/2; T)$ , в диапазоне изменения  $\eta \in (0; 1)$ . Величины  $x'_{п2}(t)$  и  $x'_{п4}(t)$  меняют свой знак на противоположный при  $\eta > 1$ . Это свидетельствует о том, что переменная составляющая выходного сигнала КУ достигнет максимального значения при  $0 < \eta < 1$  в момент времени  $t = t_3$ , а при  $\eta > 1$ , в момент времени  $t = T/2$ . Таким образом, максимальное значение  $x_{п}(t)$  будет равно

$$x_{м1} = KP \left[ \eta \frac{t_3}{2\tau} + (1 - \eta) \frac{1 - e^{-\frac{t_3}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right], \quad 0 < \eta < 1;$$

$$x_{м2} = KP \left[ \eta \frac{t_3}{2\tau} + (1 - \eta) e^{-\frac{T}{2\tau}} \frac{e^{\frac{t_3}{\tau}} - 1}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right], \quad \eta > 1. \quad (13)$$

Средневыпрямленное значение переменной составляющей выходного сигнала КУ можно получить из следующего выражения:

$$x_{\text{псв}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x_{п}(t)| dt = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} x_{п}(t) dt, \quad (14)$$

где  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + T/2$  определяется из решения трансцендентного уравнения  $x_{п}(t_1) = x_{п}(t_2) = 0$  (14) и будет зависеть от  $\eta$ . При  $0 < \eta < \eta_3$  выражение (14) переписывается в виде

$$\eta \frac{t_1}{\tau} - \eta \frac{t_3}{2\tau} + (1 - \eta) \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \frac{1 + e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_3}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) = 0, \quad (15)$$

а при  $\eta > \eta_3$  величину  $t_1$  найдем из выражения

$$t_1 = -\tau \ln \left[ \frac{\eta t_3 \left( 1 + e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)}{2\tau (\eta - 1) \left( e^{\frac{t_3}{\tau}} - 1 \right)} \right]. \quad (16)$$

Здесь  $\eta_s$  — значение коэффициента расстройки, при котором  $t_1 = t_s$ ,

$$\eta_s = \frac{e^{-\frac{t_s}{\tau}} - 1}{\frac{t_s}{2\tau} \left(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}\right) + e^{-\frac{t_s}{\tau}} - 1} > 1. \quad (17)$$

Зависимость контролируемого параметра отклика системы ИП — КУ на испытательное воздействие выбранной формы от коэффициента расстройки назовем настроечной характеристикой КУ. Согласно (13)–(17) характеристика настройки КУ апериодического ИП первого порядка при коррекции в базе интегратора с конечной памятью имеет вид

$$\beta_1 = \ln \frac{\frac{\eta}{2} + (1 - \eta) \frac{\tau}{t_s} \frac{1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}}{\frac{\eta}{2} + 2 \left(1 - \frac{\eta t_s}{2\tau}\right) \left(\frac{\tau}{T} - 2 \frac{t_1 \tau}{T t_s}\right) - 2\eta \frac{t_1^2}{T t_s}}, \quad (18)$$

$0 \leq \eta \leq 1$ , где  $t_1$  получаем, исходя из численного решения трансцендентного уравнения (15);

$$\beta_2 = \ln \frac{\frac{\eta}{2} + (1 - \eta) \frac{\tau}{t_s} \frac{1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_s}{\tau}}}{\frac{\eta}{2} + 2 \left(1 - \frac{\eta t_s}{2\tau}\right) \left(\frac{\tau}{T} - 2 \frac{t_1 \tau}{T t_s}\right) - 2\eta \frac{t_1^2}{t_s T}}, \quad (19)$$

$1 \leq \eta \leq \eta_1$ , где  $t_1$  определяется из (15);

$$\beta_3 = \ln \frac{\frac{\eta}{2} + (1 - \eta) \frac{\tau}{t_s} e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_s}{\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}}{\eta \frac{t_s}{T} - 2\eta \frac{t_1}{T} - 2 \frac{\tau}{T} + \frac{\eta}{2}}, \quad (20)$$

$\eta \geq \eta_1$ , где  $t_1$  находим из (16).

Для значений коэффициента расстройки 0, 1 и  $\infty$  выражения для  $\beta$  упрощаются

$$\beta(0) = \ln \frac{1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}}}{2 \left(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}\right) \left(\frac{t_s}{T} + 2 \frac{\tau}{T} \ln \frac{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_s}{\tau}}}\right)}; \quad (21)$$

$$\beta(1) = \ln \frac{1}{1 - \frac{t_s}{T}}; \quad (22)$$

$$\beta(\infty) = \ln \frac{\frac{1}{2} - \frac{\tau}{t_s} e^{-\frac{T}{2\tau} + \frac{t_s}{\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}}{\frac{t_s}{T} + \frac{1}{2} + 2 \frac{\tau}{T} \ln \frac{t_s(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})}{2\tau(e^{\frac{t_s}{\tau}} - 1)}}. \quad (23)$$

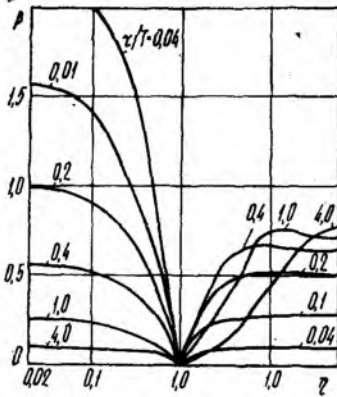


Рис. 1

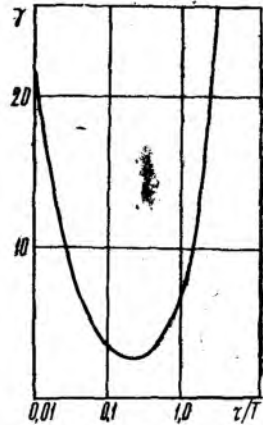


Рис. 2

Характеристики настройки для  $t_s/\tau = 0,01$  показаны на рис. 1. Областью неопределенности настройки  $\Delta\eta$  будем считать интервал значений ( $\eta_1$ ;  $\eta_2$ ) коэффициента расстройки  $\eta$ , границы которого  $\eta_1$  и  $\eta_2$  вызывают приращение контролируемого параметра  $\beta$  относительно его значения при точной настройке  $\beta(\eta_0)$  на величину, равную чувствительности регистрирующего устройства  $\Delta\beta$ . Отношение ширины области неопределенности настройки к соответствующему ей приращению контролируемого параметра  $\Delta\beta$  называется коэффициентом неопределенности настройки. Он должен быть минимален для повышения точности настройки.

Коэффициент неопределенности  $\gamma$  получаем с помощью следующего выражения:

$$\gamma = \frac{\Delta\eta}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta/(\eta_1 - \eta_0)} + \frac{1}{\Delta\beta/(\eta_0 - \eta_2)} \approx \frac{1}{\beta'(\eta_0)_-} + \frac{1}{\beta'(\eta_0)_+}. \quad (24)$$

Здесь  $\beta'(\eta_0)_-$  и  $\beta'(\eta_0)_+$  — производные слева и справа  $\beta(\eta)$  по  $\eta$  в точке  $\eta = \eta_0 = 1$ . С учетом (7) можно записать

$$\gamma = \left[ \frac{U'_m(\eta_0)_-}{U_m(\eta_0)} - \frac{U'_{псв}(\eta_0)}{U_{псв}(\eta_0)} \right]^{-1} + \left[ \frac{U'_m(\eta_0)_+}{U_m(\eta_0)} - \frac{U'_{псв}(\eta_0)}{U_{псв}(\eta_0)} \right]^{-1}. \quad (25)$$

Для рассмотренного случая настройки коэффициент неопределенности для  $t_3 \ll \tau$  имеет вид

$$\gamma = \frac{e^{\frac{T}{\tau}} - 1}{2 \left[ \frac{2\tau}{T} \left( 1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) - 1 \right] \left[ \frac{2\tau}{T} \left( 1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right]} \quad (26)$$

Эта зависимость приведена на рис. 2, из которого видно, что наименьшее значение  $\gamma$  достигается при  $T \approx 5\tau$ .

Таким образом, в качестве контролируемого параметра при настройке КУ инерционного ИП мощности радиосигналов СВЧ можно использовать коэффициенты и формы амплитуды, произведение коэффициента формы на коэффициент амплитуды переменной составляющей отклика КУ или обратную им величину. Испытательным воздействием должны служить импульсно-модулированные колебания с огибающей формы «меандр» ненормированной амплитуды. Из перечисленных контролируемых параметров наиболее чувствительна к настройке величина  $\ln K_d K_f$ . При настройке аperiodического ИП первого порядка в базе интегратора с конечной памятью для повышения точности настройки необходимо выполнение условия  $T/\tau \approx 5$ . В этом случае настройка заключается в изменении весового коэффициента усредненного за время  $t_3$  выходного сигнала ИП до минимизации значения его контролируемого параметра.

**Список литературы:** 1. *Силаев М. А., Комов А. Н.* Измерительные полупроводниковые СВЧ-преобразователи. М., 1984. 152 с. 2. *Билько М. И., Томашевский А. К.* Измерение мощности на СВЧ. М., 1986. 168 с. 3. *Шукушинов В. Е.* Корректирующие звенья в устройствах измерения нестационарных температур. М., 1970. 120 с. 4. *А.с. 188665 СССР, МКИ ' G 01 R 21/00.* Способ измерения пиковой мощности // И. П. Захаров // Открытия. Изобретения. 1985. № 40. С. 170. 5. *Захаров И. П.* Коррекция динамических характеристик инерционных преобразователей мощности СВЧ в базе интегратора с конечной памятью // Радиотехника. 1988. Вып. 86. С. 20—25. 6. *Захаров И. П.* Определение постоянной времени аperiodических измерительных преобразователей // Изв. вузов. СССР. Приборостроение. 1988. № 1. С. 62—65.

Поступила в редколлегию 02.03 88

УДК 621.385.6

А. В. ГАЛАГАН, А. В. ГРИЦУНОВ, В. М. ПИСАРЕНКО

#### К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МОДЕЛЯХ «КРУПНЫХ» ЧАСТИЦ

Значительно возросшие за последнее время мощности вычислительных установок, появление многопроцессорных систем позволяют создавать математические модели приборов СВЧ со скрещенными полями на основе прямого решения уравнений Максвелла. Однако практическая ценность моделей «крупных» частиц по-прежнему остается высокой. Эти модели, базирующиеся на методе

самосогласованного поля, наиболее часто используют так называемый метод медленно меняющихся амплитуд, который заключается в решении системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dt} &= -\frac{1}{N_n} \frac{\omega_{0n}}{2\pi} \int_{t_0-T_n}^{t_0} \int_V \vec{j} e_n dV \cos(\omega_{0n}t + \varphi_n) dt - \frac{\omega_{0n}}{2Q_n} A_n; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{N_n A_n} \frac{\omega_{0n}}{2\pi} \int_{t_0-T_n}^{t_0} \int_V \vec{j} e_n dV \sin(\omega_{0n}t + \varphi_n) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_n$  — амплитуда вида колебаний с номером  $n$ ;  $\varphi_n$  — фаза колебаний;  $N_n$  — эквивалентная емкость замедляющей системы или норма;  $\omega_{0n}$  — круговая частота;  $T_n$  — период колебаний;  $\vec{j}$  — возбуждающий ток;  $e_n$  — структурная функция поля;  $Q_n$  — нагруженная добротность.

Применение метода медленно меняющихся амплитуд ограничено временем релаксации, примерно на порядок большим периода основной гармоники сигнала. При расчете быстрых переходных процессов в приборах СВЧ можно непосредственно решать уравнение возбуждения второго порядка относительно мгновенных значений напряженности высокочастотного электрического поля  $E_n$ :

$$\frac{d^2 E_n}{dt^2} + \frac{\omega_{0n}}{2Q_n} \frac{dE_n}{dt} + \omega_{0n}^2 E_n = -\frac{1}{N_n} \int_V \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} e_n dV. \quad (2)$$

Для численного решения дифференциальных уравнений в задачах математической физики чаще других используется метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Но для решения уравнения (2) он не подходит, поскольку значения возбуждающего тока известны только в фиксированных равноотстоящих моментах времени. При этом для корректной реализации метода требуется либо экстраполяция на середину шага, которая отрицательно сказывается на точности, либо уменьшение шага по времени вдвое, что недопустимо из-за возрастания объема вычислительных операций.

Многошаговые методы (метод прогноза-коррекции) обладают высокой точностью и не требуют вычисления правой части уравнения (2) в промежутках между шагами по времени. Их недостаток — неустойчивость, которая проявляется в случае большого количества шагов решения.

Свободным от перечисленных недостатков является метод, в котором сочетаются степенной ряд для неизвестной функции и экстраполяционная формула Адамса для ее производной\*:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + y'_k \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} \left( \frac{19}{6} f_k - \frac{5}{3} f_{k-1} + \frac{1}{2} f_{k-2} \right); \\ y'_{k+1} &= y'_k + \frac{\Delta t}{3} \left( \frac{23}{4} f_k - 4f_{k-1} + \frac{5}{4} f_{k-2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

\* Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М., 1979. 224 с.

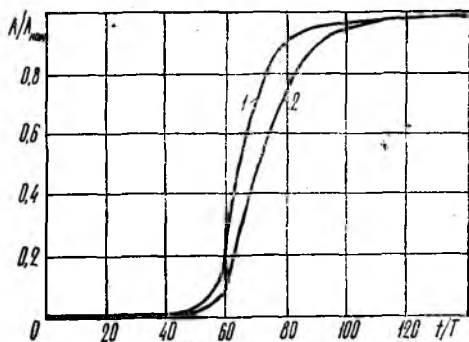
В целях проверки возможности применения данного метода при моделировании автогенераторов со скрещенными полями методом «крупных» частиц произведена оценка погрешности метода с шагами моделирования порядка  $1/16 \dots 1/64$  периода основного сигнала. Было выполнено решение неоднородного уравнения (2) при условии, что скалярное произведение возбуждающего тока на структурную функцию поля имеет вид

$$\vec{j} \vec{e}_n = \frac{N_n}{\omega_{0n}} \sin(\omega_{0n} t). \quad (4)$$

В этом случае точное решение находим по формуле

$$E_n(t) = e^{\alpha t} \left( \frac{C \omega_{0n}}{\beta} \sin \beta t \right) - C \sin \omega_{0n} t, \quad (5)$$

начальные условия:  $\left. \frac{dE_n}{dt} \right|_{t=0} = 0$ ,  $E_n(0) = 0$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания,  $\alpha = \omega_{0n}/2Q_n$ ;  $C$  — константа характеристического уравнения,  $C = -Q_n/\omega_{0n}^2$ ;  $\beta$  — константа неоднородного уравнения,  $\beta = \sqrt{\omega_{0n}^2 - (\omega_{0n}/2Q_n)^2}$ . Результат проверки показал, что при шаге решения  $1/32$  периода погрешность не превышает 1%. Выбранный метод является оптимальным в отношении точности решения по сравнению с методами Эйлера и Рунге — Кутты.



На практике при нахождении правой части уравнения (2) наибольшую сложность представляет вычисление производной возбуждающего тока по времени. Учитывая, что под знаком интеграла по объему от времени зависит только возбуждающий ток, операцию дифференцирования можно вынести за пределы интеграла. Правую часть в этом случае запишем следующим образом:

$$i_n = -\frac{1}{N_n} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{j} \vec{e}_n dV. \quad (6)$$

Если наведенный ток представляет собой строго синусоидальную функцию, то численное дифференцирование не составляет особых трудностей. В реальных моделях «крупных» частиц вследствие наличия модельных шумов форма возбуждающего тока не является гладкой. Поэтому целесообразно сглаживать интеграл взаимодействия на последних четырех шагах по методу наименьших квадратов. Заменяя интеграл взаимодействия  $I_n$  линейной моделью  $I_n = a + bt$  (7), получаем его производную как коэффициент регрессии  $b$ , найденный по формуле

$$\frac{\partial I_n}{\partial t} = b = \frac{0,2 \sum_{i=1}^4 i I_{n+i-4} - 0,5 \sum_{i=1}^4 I_{n+i-4}}{\Delta t}. \quad (8)$$

Рассмотренный алгоритм решения уравнения возбуждения второго порядка проверен с помощью реальной модели «крупных» частиц. На рисунке показано установление амплитуды колебаний в генераторе со скрещенными полями, рассчитанное решением уравнения второго порядка (кривая 1) по формуле (3). Приведена также временная зависимость амплитуды колебаний для этого же прибора, полученная на основе выражений (1) (кривая 2). Из сравнения графиков видно, что в случае анализа системы (1) кривая возбуждения запаздывает на несколько периодов сигнала, ее наклон меньше, чем при прямом решении уравнения второго порядка.

Таким образом, использование уравнения возбуждения второго порядка при моделировании переходных процессов в автогенераторах со скрещенными полями позволяет значительно повысить точность нахождения ВЧ-полей. Это особенно важно для моделирования многочастотных режимов с учетом конкурирующих видов колебаний, поскольку результат конкуренции в значительной мере зависит от скорости нарастания того или иного вида колебаний в приборе.

*Поступила в редколлегию 07.01.8*

УДК 621.385.64

*А. В. ВАСЯНОВИЧ, Г. И. ЧУРЮМОВ, канд. техн. наук*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДНОГО СПЕКТРА МАГНЕТРОННОГО УСИЛИТЕЛЯ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ МЕТОДОМ МАШИННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Теоретическое исследование выходного спектра приборов обратной волны типа М относится к числу наиболее трудоемких, из-за сложного нелинейного характера протекающих электронно-волновых процессов и методологических трудностей, связанных с разработкой математической модели усилителя обратной волны [1—4]. Задача еще более усложняется при попытке рассмотреть многочастотный режим работы данных усилителей, например исследовать режим возбуждения высших временных гармоник (ВВГ) основного сигнала. Способ и построение математической модели в этом случае для анализа многочастотного взаимодействия предложен в работах [5; 6]. Однако отсутствие практических результатов счета свидетельствует о том, что еще не все вопросы, связанные с реализацией указанных математических моделей, решены.

В статье основное внимание обращается на практические результаты исследований режима многочастотного взаимодействия в магнетронном усилителе обратной волны. В частности, изложены вопросы возбуждения гармонических составляющих основного (рабочего) сигнала, а также их зависимость от электрического режима работы прибора.

В качестве математической модели усилителя обратной волны используется многопериодная самосогласованная модель [6]. Практическая апробация указанной модели позволила уточнить некоторые аспекты построения ее алгоритма доработать методику моделирования. В основном данные изменения связаны с реализацией уравнения возбуждения, окончательная запись которого имеет следующий вид:

$$\frac{dA_n}{d\varphi} = \psi_n \sum_{\Delta V} \sum_T (U_r F'_n \sin \Phi_n^* + \theta [R(1 - \varepsilon) + \varepsilon] \times F_n^* \cos \Phi_n^*); \quad (1)$$

$$\frac{d\Phi_n^*}{d\varphi} = \frac{\psi_n}{A_n} \sum_{\Delta V} \sum_T (U_r F'_n \cos \Phi_n^* - \theta [R(1 - \varepsilon) + \varepsilon] \times F_n^* \sin \Phi_n^*); \quad (2)$$

$$\psi_n = \frac{Q_e \Omega \ln(r_a/r_k) \gamma_n^2 R_{св(n)}}{\Delta \varphi U_a H_t}$$

$$\Phi_n^* = n(\gamma \varphi - \omega t) + \Phi_n.$$

Здесь  $A_n = \frac{|C_n| \bar{E}_0 N_r \sin(\gamma_n \alpha)}{E_0^2 \pi \gamma_n}$  — амплитуда ВЧ-волны на частоте  $n\omega$ ;

$\Phi_n^*$  — фаза волны на частоте  $n\omega$ ;  $R_{св(n)}$  — сопротивление связи на частоте  $n\omega$ ;  $\gamma_n$  — постоянная распространения ( $\gamma_n = n\gamma$ );  $R = \frac{r - r_k}{r_a - r_k}$ ;  $U_r$  — нормированная  $r$ -я составляющая ВЧ-скорости частиц;

$\theta = \frac{\Omega}{\omega}$  — нормированная ВЧ-составляющая угловой скорости частиц

$Q_e$  — заряд крупной частицы;  $H_t = T/dt$ ;  $E_0^2 = \frac{U_a}{r_a \ln(r_a/r_k)}$  — напряженность статического электрического поля на уровне анода ( $r = r_a$ );  $U_a$  — анодное направление;  $F'_n{}^\varphi$  —  $r$ -я и  $\varphi$ -я структурные функции ВЧ поля;  $\omega_c = \eta B$  — циклотронная частота;  $\Delta \varphi = 2\pi/M$  — угловой размер сектора;  $\Omega$  — угловая скорость основной пространственной гармоника;  $\varepsilon = r_a/r_k$ .

Для определения значения амплитуд  $A_n$  и фаз  $\Phi_n^*$  основного сигнала и его гармоник рабиваем все пространство усилителя в азимутальном направлении на  $M$  одинаковых объемов (секторов)  $\Delta V =$

$\frac{\pi(r_a^2 - r_k^2) \Delta x}{M}$ . Предполагая, что состояние замкнутого электронного потока (координаты и скорости «крупных» частиц) считается известным, переходим к решению системы уравнений возбуждения (1), (2) в каждом секторе  $\Delta V$ . В результате находятся и заносятся в память ЭВМ значения прегых частей (1) и (2). Для уменьшений колебаний

$\frac{dA_n}{d\varphi}$  и  $\frac{d\Phi_n^*}{d\varphi}$ , связанных с дискретным представлением электронного потока и пространства взаимодействия, их значения на каждом шаге решения накапливаются в течение периода фундаментальной частоты

$T = 2\pi / \omega$ , а затем усредняются (метод «скользящего» усреднения [5]). Тогда выражения для приращения амплитуды и фазы ВЧ волны в  $i$ -м секторе  $\Delta V^i$  можно записать в виде

$$\Delta A_n^i = \Delta\varphi \sum_{j=1}^i \left( \frac{dA_n}{d\varphi} \right)_j; \quad (\Delta\Phi_n^i)^i = \Delta\varphi \sum_{j=1}^i \left( \frac{d\Phi_n}{d\varphi} \right)_j. \quad (3)$$

Суммирование в (3) производится от ВЧ входа до текущего объема  $j = i$ .

Определив значения  $\Delta A_n^i$  и  $(\Delta\Phi_n^i)^i$  для всех  $\Delta V^i$ , найдем новое распределение амплитуд и фаз сигнала основной частоты и его гармоник:

$$A_n^i = A_n^0 + \Delta A_n^i; \quad (\Phi_n^i)^i = \Phi_n^0 + n(\gamma\varphi - \omega t) + (\Delta\Phi_n^i)^i, \quad (4)$$

где  $A_n^0$  — входная амплитуда ВЧ-волны на частоте  $n\omega$ ;  $\Phi_n^0$  — начальная фаза ВЧ-волны на частоте  $n\omega$ ;  $i = 1, \dots, L$ ;  $L$  — количество элементарных объемов в пространстве взаимодействия.

Нормированные составляющие напряженности ВЧ-поля запишем следующим образом:

$$e_r = \frac{E_r}{E_0^2} \sum_n A_n F_n^r \sin \Phi_n^*; \quad e_\varphi = \frac{E_\varphi}{E_0^2} = \sum_n A_n F_n^\varphi \cos \Phi_n^*. \quad (5)$$

Вычисленные значения  $e_r$  и  $e_\varphi$  совместно со значениями соответствующих сил пространственного заряда подставляются в уравнение движения, и расчеты проводятся по алгоритму, подробно описанному в работе [6].

Разработанная на алгоритмическом языке ФОРТРАН программа требует 500 Кбайт оперативной памяти. Время счета одного шага решения многочастотной задачи (включая основной сигнал и три гармоники) при наличии в пространстве взаимодействия 4000—5000 частиц на ЭВМ ЕС 1050 равно 50 с. Это примерно на 20 % больше, чем аналогичный вариант, просчитанный в одночастотном приближении. При этом размер сетки для решения уравнения Пуассона выбирался равным 33x257. Решение задачи проходило до момента установления стационарного состояния, когда основные физические параметры практически не меняются от шага к шагу.

В качестве метода решения уравнения движения выбирался метод Рунге — Кутты 4-го порядка. Шаг решения был равен  $\Delta T = \omega_c \Delta t = \pi/8$ .

*Анализ результатов.* Приступая к решению задачи, предполагаем, что постоянная распространения «холодных» ВЧ волн на частотах  $n\omega$  равна  $\gamma_n = n\gamma$ , а значение сопротивления связи для основного сигнала и его гармоник задавалось равным:  $R_{св}(1) = 60$ ;  $R_{св}(2) = 8$ ;  $R_{св}(3) = 1$ ;  $R_{св}(4) = 0,2$  Ом.

Результаты моделирования представлены на рис. 1,2. Процесс установления выходной мощности  $P_{вых}$  основного сигнала  $\omega$  и его

гармоник  $2\omega$ ,  $3\omega$  и  $4\omega$  показана на рис. 1. Из приведенных зависимостей видно, что гармоники достигают максимального уровня в момент вылета первых частиц на анод, что соответствует наиболее сильным нелинейным изменениям амплитуды и фазы ВЧ волны. В дальнейшем наступает режим насыщения основного сигнала и процесс достигает стационарного состояния. Уровни гармоник, нормируются к мощности основного сигнала, определяются по формуле  $K_n = 10 \log \frac{P_{n\omega}}{P_{\omega}}$  и соответственно равны:  $K_{II} = -34$  дБ,  $K_{III} = -53$  дБ,  $K_{VI} = -44$  дБ. Данный результат получен в рабочей точке вольтамперной характеристики прибора, когда  $U_a/U_{\pi} = 1,015$ , где  $U_{\pi}$  — пороговое напряжение. Изменение анодного напряжения вызывает соответствующее изменение уровней ВВГ.

На рис. 2 представлены зависимости уровней гармоник от значений нормированных анодного напряжения  $U_a/U_{\pi}$  и магнитной индукции  $B_0/B_{кр}$ , где  $B_{кр}$  — значения критической магнитной индукции. Из представленных зависимостей видно, что увеличение анодного напряжения  $U_a$  (или уменьшение

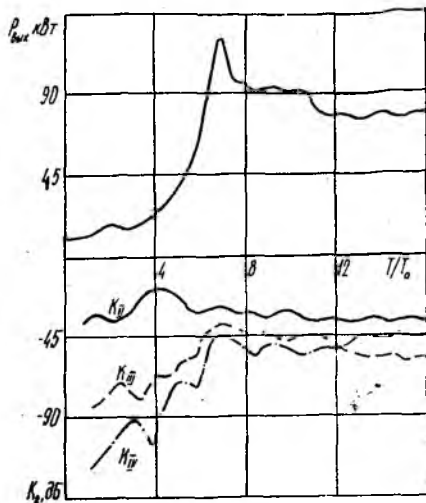


Рис. 1

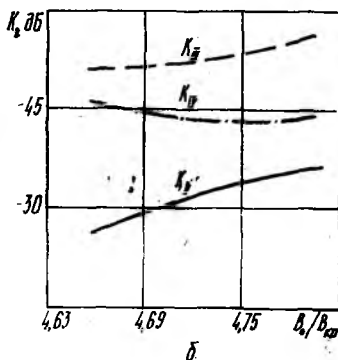
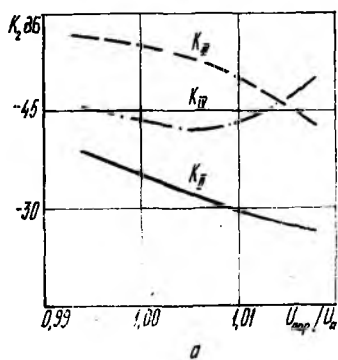


Рис. 2

магнитного поля  $B_0$ ) вызывает монотонный рост уровней второй и третьей гармоник. Уровень четвертой гармоники имеет ярко выраженный максимум в диапазоне рабочих значений  $U_a$ .

Таким образом, проведенные исследования позволили количественно оценить уровни ВВГ основного сигнала, а также показали их изменение в зависимости от выбираемого режима работы уси-

Полученные результаты ограничены случаем, когда дисперсия замедляющей системы отсутствует, а значение сопротивления связи на частотах гармоник выбиралось произвольно. Дальнейшее представляется целесообразным провести дополнительные исследования частотной зависимости сопротивления связи замедляющих систем, применяемых в данных усилителях, а также уточнить значения постоянных распространения взаимодействующих волн.

Список литературы: 1. Рой Дж. Е. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот: Пер. с англ. Под ред. З. С. Чернова. М., 1969. 616 с. 2. Васянович А. В., Шенк А. Г. Математическое моделирование процесса генерации гармоник в амплитроне // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. симпоз. «Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств». М., 1986. 87. с. 3. Васянович А. В., Гурюмов Г. И. К вопросу о генерации гармоник в усилителях обратной волны // Волны // Тез. докл. X Всесоюз. науч. конф. «Электроника СВЧ». Минск, 1983. 68. с. 4. Терентьев А. А., Ильин Е. М., Байбурич В. Б. Многопериодная численная модель усилителей типа М с распределенной эмиссией // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29. № 10. С. 72—79. 5. Грицун А. В. Моделирование стационарных режимов СВЧ-усилителей типа М с распределенной эмиссией // Радиотехника. 1984. Вып. 70. С. 90—100. 6. Васянович А. В. Численная модель многочастотного взаимодействия в усилителях с распределенной эмиссией // Радиотехника. 1987. Вып. 80. С. 90—96.

Поступила в редколлегию 02.03.88

УДК 517.9:535.4

А. И. ВЯЗЬМИТИНОВ, С. С. ВЯЗЬМИТИНОВА, В. А. РЕЗУНЕНКО

### РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗГРУЖЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ КАТОДОМ

Актуальная проблема физики и техники приборов СВЧ — создание высокоэффективных и долговечных катодно-подогревательных узлов (КПУ). Один из способов решения этой проблемы состоит в том, чтобы использовать катоды как можно более «разгруженные» по тепловым и эмиссионным характеристикам, а затем с помощью формирующей части электронно-оптической системы (ЭОС) «сжимать» электронный пучок до нужной плотности. Наиболее подходит для этого, с нашей точки зрения, полый сферический катод, который давно привлекает внимание специалистов по электронной оптике. Практическое использование катода такого типа до сих пор сдерживается физически обусловленными трудностями, связанными с почти полной экранировкой поля анода, расположенного вблизи отверстия в сферической полости, на внутренней поверхности которой расположено термоэмиссионное покрытие. Экспериментальное же исследование влияния дополнительных электродов, введенных внутрь катодной полости, на результирующие характеристики КПУ весьма затруднительно по технологическим причинам. Сложность экспериментального исследования ЭОС стимулирует разработку эффективных численно-аналитических методов решения соответствующих задач математической

Применим метод интегрального преобразования Агеля [1] для регуляризации и обращения [2] операторного уравнения первого рода с целью решения задачи о распределении потенциала в ЭОС, состоящей из полого сферического катода и системы ускоряющих и формирующих электродов в виде круглых диафрагм и тонких колец, расположенных аксиально-симметрично с катодной полостью. Пусть катод образован частью идеально проводящей бесконечно тонкой сферы радиуса  $a$  с плоским срезом, полярный угол среза —  $\theta_0$ ; круглые диафрагмы и тонкие кольца (т. е. дополнительный электрод, дисковый анод и фокусирующий электрод) образованы конечным числом  $N$  круговых петель, для которых  $r_j$  — расстояние от  $j$ -й петли до точки  $(0, 0, 0)$ ;  $\alpha_j$  — полярный угол раскрытия  $j$ -й петли ( $1 \leq j \leq N$ ), причем для  $M_1$  петель, образующих электрод и часть дискового анода  $r_j < a$  ( $j = 1, 2, \dots, M_1$ ), для остальных  $N - M_1$  петель  $r_j > a$  ( $j = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, N$ ). Здесь предполагается, что начало сферической системы координат совмещено с центром сферического катода, полярная ось — с осью симметрии катода и осью всей ЭОС. Пусть  $\varphi_0$  — потенциал катода;  $Q_j$  — полный заряд  $j$ -й петли;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды.

Распределение потенциала найдем как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с учетом требуемых ограничений на поведение потенциала в окрестности ребра сферического катода, в окрестности начала координат, круговых петель и на бесконечности. Потенциалы  $\varphi_{N+1}^{(1)}, \varphi_{N+1}^{(2)}$  искомым электростатических полей и потенциалы  $\varphi_j^{(0)}$  ( $1 \leq j \leq N$ ) заданных источников используя метод разделения переменных в сферической системе координат, представим рядами по полной ортонормированной системе  $\bar{P}_n(\cos \theta)$  нормированных полиномов Лежандра первого рода степени  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) аргумента  $\cos \theta$  в пространстве функций  $L^2[0, \pi]$ , интегрируемых с квадратом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{N+1}^{(1)} \\ \varphi_{N+1}^{(2)} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n(\cos \theta) M_n \begin{cases} A_n^{(1)} r^n, & r < a; \\ B_n^{(2)} r^{-n-1}, & r > a; \end{cases}$$

$$\varphi_j^{(0)} = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon r_j} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n(\cos \theta) P_n(\cos \alpha_j) M_n \begin{cases} \left(\frac{r}{r_j}\right)^n, & r < r_j; \\ \left(\frac{r_j}{r}\right)^{n+1}, & r > r_j, \end{cases} \quad (1)$$

где  $P_n(\cos \alpha_j)$  — полиномы Лежандра аргумента  $\cos \alpha_j$ ,  $M_n = 2^{-1}(2n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Используя метод частичных областей и граничные условия, получаем для нахождения коэффициентов  $B_n^{(2)}$  потенциала  $\varphi_{N+1}^{(2)}$  в пространстве  $l_2$  числовых последовательностей следующую систему парных сумматорных уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) [D_n + e_n^{(1)}] P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [D_n + e_n^{(2)}] P_n(\cos \theta) = \varphi_0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi; \quad (2)$$

где

$$D_n^{(1)} = B_n^{(2)} \cdot a^{-n-1}, \quad \varphi_0 = 4\pi\epsilon;$$

$$e_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{Q_j}{r_j} P_n(\cos \alpha) \left( \frac{r_j}{a} \right)^{n+1};$$

$$e_n^{(2)} = \sum_{j=M_1+1}^{M_2} \frac{Q_j}{r_j} P_n(\cos \alpha_j) \left( \frac{a}{r_j} \right)^n.$$

Система уравнений (2) не пригодна для непосредственного нахождения коэффициентов  $D_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Оператор этой системы неограничен в пространстве  $L^2[0, \pi]$ . С помощью интегрального преобразования Абеля эквивалентными операциями приведем (2) к виду, удобному для обращения и явного нахождения коэффициентов  $D_n$ . Сначала уравнение на  $[0, \theta_0)$  из (2) проинтегрируем почленно как ряд Фурье функции из  $L^2[0, \pi]$  по полной ортогональной системе функций  $P_n(\cos \theta)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Затем, используя соотношение между полиномами Лежандра  $P_n(x)$  и их производными  $(2n+1)P_n(x) = P_{n-1}'(x) - P_{n+1}'(x)$  [3] и интегрируя это соотношение, приходим к уравнению на  $[0, \theta_0)$  из (2), не содержащему коэффициентов  $(2n+1)$  в левой части ряда; возникающая при интегрировании уравнения на подынтервале  $[0, \theta_0)$  из (2) константа, как нетрудно видеть, равна нулю. Далее подставим в оба уравнения из (2) вместо полиномов Лежандра их интегральные представления Мелера — Дирихле [3], поменяем порядки интегрирования и суммирования в обоих уравнениях и перенесем все слагаемые в уравнениях в левую часть, получим вместо каждого уравнения однородное интегральное уравнение типа Абеля. Каждое такое уравнение имеет единственное тривиальное решение, которое находится при помощи композиции с ядром вида

$(x-y)^{-\frac{1}{2}}, (x > y)$  [4]. Так как в интегральных уравнениях в качестве неизвестных функций-решений служат ряды Фурье по элементарным функциям, то в результате эквивалентных операций получены ряды Фурье по элементарным функциям с одинаковыми коэффициентами при неизвестных  $D_n$  вместо рядов по  $P_n(\cos \theta)$  из (2) с различными коэффициентами при неизвестных  $D_n$  на подынтервалах  $[0, \theta_0)$  и  $(\theta_0, \pi]$  основного интервала  $[0, \pi]$ . Обращая установленные ряды Фурье, определяем явный вид коэффициентов  $D_n$ , а вместе с ними и искомых коэффициентов  $B_n^{(2)}$  (1):

$$B_n^{(2)} = a^{n+1} \left\{ \varphi_0 [\sigma_{n,0} - \alpha_{n,0}^0] + \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} \alpha_{n,m}^{(0)} - \sum_{m=0}^{\infty} e_m^{(2)} [\sigma_{n,m} - \alpha_{n,m}^{(0)}] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\alpha_{n,m}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1} \right], \quad n \neq m;$$

$$\alpha_{n,n}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \left[ \theta_0 - \frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1} \right];$$

$$\sigma_{n,m} = 0, \quad n \neq m; \quad \sigma_{n,n} = \frac{1}{2}; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Для нахождения коэффициентов  $A_n^{(1)}$  потенциалов  $\Phi_{N+1}^{(1)}$  (1) воспользуемся линейным соотношением между коэффициентами  $A_n^{(1)}$  и  $B_n^{(1)}$ , вычисленным из граничных условий

$$A_n^{(1)} = B_n^{(2)} a^{-2n-1} - e_n^{(1)} a^{-n} + e_n^{(2)} a^{-n}, \quad n \geq 0.$$

Данное решение удобно использовать для проведения систематических расчетов распределения потенциала с помощью ЭВМ. Так ряды в (3) сходятся не хуже, чем геометрические прогрессии со знаменателями, значительно меньшими, чем единица, при этом выбор знаменателей прогрессий, зависящих от соотношений  $r_j/a$  ( $1 < j < M_1$ ) и  $a/r_j$  ( $M_1 + 1 \leq j \leq N$ ), полностью контролируется. Управление распределением потенциала ЭОС производится выбором геометрических и физических параметров катода и круговых петель, количества петель, составляющих электроды и анод. Наличие большого числа параметров ЭОС требует проведения систематических расчетов на ЭВМ, анализа полученных результатов. Такому анализу будет посвящено отдельное сообщение.

**Список литературы:** 1. Шестопапов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. К., 1983. 251 с. 2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 287 с. 3. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М., 1974. Т. 2. 295 с. 4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960. 299 с.

Поступила в редколлегию 05.04.88

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Венгер А. З., Якименко А. М.</i> Радионимпульсный умножитель частоты с дополнительным генератором . . . . .	3
<i>Ярхо Т. А.</i> Определение положения пика спектральной компоненты при быстром преобразовании Фурье . . . . .	6
<i>Кольцов В. П., Удовиченко В. Н.</i> Погрешности «амплитудной модуляции» дискретного преобразования Фурье . . . . .	11
<i>Лученко Ф. В., Рассомахин С. Г.</i> Метод повышения качества фильтрации сигналов . . . . .	16
<i>Зотов И. В.</i> Алгоритм синтеза ансамблей квазиортогональных систем сигналов с заданными свойствами . . . . .	18
<i>Голиков В. С., Сумцов В. В., Калекина Т. Г.</i> Особенности расчета характеристик обнаружения М-ичных систем междупериодной обработки . . . . .	23
<i>Омельченко В. А., Голобородько Ю. Н.</i> Многокритериальная задача многоальтернативного обнаружения сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности. Сообщение 1 . . . . .	28
<i>Пресняков И. Н., Афанасьев Ю. В.</i> Методы косвенной фильтрации многомерных марковских последовательностей . . . . .	35
<i>Быков В. Н., Вильчинский А. С., Кулаков В. А., Султанов А. С.</i> Помехоустойчивость метода уплотнения каналов с шумовыми сигналами . . . . .	43
<i>Белинская Н. Г., Блинков А. Н., Иващицкая Т. В., Ляховец В. А., Мальцев В. С., Сырцов С. Л., Твердохлеб В. И.</i> Функциональный динамический тестер цифровых устройств обработки сигналов . . . . .	47
<i>Гридчин С. И., Иванов М. А.</i> Моделирование и исследование нелинейных каналов передачи цифровой информации . . . . .	52
<i>Науменко С. В., Малофей О. П., Ставров А. В., Тупкало В. Н.</i> Применение метода косвенной локации радиосигналов в системах с обратной связью . . . . .	59
<i>Катрич А. Б., Худошин А. В., Фоменко В. Н.</i> Восстановление фазы волнового фронта методом параметризации . . . . .	66
<i>Кравченко Н. И., Тихонов В. А.</i> Авторегрессионные модели узкополосных коррелированных случайных процессов . . . . .	69
<i>Голубицкий В. Э., Путятин Е. П., Сидоров А. И., Стрельченко В. И.</i> Исследование корреляционных зависимостей импульсного сигнала, рассеянного шероховатой поверхностью . . . . .	73
<i>Емельянов В. В., Петручек Т. П.</i> Оценка возможности реализации УКВ радиоканала при распространении радиоволн поверхностной волной . . . . .	77
<i>Приходько С. И., Сниссаренко А. Г.</i> Приведение двоичных сверточных кодов к недвоичным суженным циклическим кодам . . . . .	80
<i>Горобец Н. Н., Елисеева Н. П.</i> Поляризационные эффекты при дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей наклонной полосе . . . . .	86
<i>Жук Н. П., Шульга С. Н.</i> Двумерная задача рассеяния электромагнитных волн на цилиндрическом включении в плоскослойной среде . . . . .	93
<i>Защкин И. П., Зеленский А. А., Кошевой Г. И., Тамуров Ю. Н.</i> Исследование токов в изолированной антенне конечной длины . . . . .	101
<i>Контарь А. А., Нешмонин П. В.</i> Моделирование структур, содержащих дисперсную фазу . . . . .	107
<i>Присенко М. А., Шевченко К. Л., Потапов А. А.</i> Физическая модель взаимодействия СВЧ коаксиального датчика с плоскими диэлектрическими материалами . . . . .	110
<i>Захаров И. П.</i> Настройка корректирующих устройств инерционных преобразователей мощности радиосигналов СВЧ . . . . .	116
<i>Галаган А. В., Грицунов А. В., Писаренко В. М.</i> К вопросу решения уравнения возбуждения в моделях «крупных» частиц . . . . .	123
<i>Васянович А. В., Чурюмов Г. И.</i> Исследование выходного спектра магнетронного усилителя обратной волны методом машинного эксперимента . . . . .	126
<i>Вязьмитинов И. А., Вязьмитинова С. С., Резуненко В. А.</i> Расчет потенциалов электронно-оптических систем с разгруженным сферическим катодом . . . . .	130