УДК 658.512.011.56: 681.5

ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА И ТОПОЛОГИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ СТРУКТУРНОМ СИНТЕЗЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

БЕСКОРОВАЙНЫЙ В.В.

Анализируется задача топологической оптимизации элементов территориально распределенной системы. Предлагается эвристический метод ее решения, базирующийся на идеях оценивания оптимального количества элементов системы, направленного перебора вариантов и покоординатной оптимизации. Приводится эмпирическая оценка сложности метода.

Задачи структурного синтеза возникают и решаются практически на всех этапах жизненного цикла антропогенных систем: при их проектировании, создании, эксплуатации (управлении), реинжиниринге [1]. Даже в традиционной постановке это сводится к решению задач комбинаторной оптимизации и сопряжено с известными вычислительными трудностями [2,3]. Проблема еще более усложняется при синтезе крупномасштабных или территориально распределенных систем (ТРС), примерами которых могут служить системы транспорта, связи, мониторинга, распределения информации [4,5]. При этом кроме традиционного набора задач требуется также решение задач оптимизации топологии, т.е. территориального размещения элементов, подсистем, коммуникационных связей.

Системологический анализ проблемы структурного синтеза ТРС позволил провести ее декомпозицию и определить схему взаимосвязи задач по входным и выходным данным [6]. Среди задач микроуровня, связанных с решением вопросов системного проектирования ТРС, выделяются такие: выбор принципов построения ТРС; выбор структуры системы; определение топологии элементов и связей; выбор технологии функционирования; определение параметров элементов и связей; оценка эффективности вариантов и выбора решений.

Разработанная логическая схема системного проектирования ТРС в условиях современного состояния средств вычислительной техники и методов оптимизации иногда позволяет совместно решать задачи выбора структуры и топологии для элементов и связей [7].

Независимо от функционального назначения, ТРС имеют подобные структуры, что позволяет при их синтезе использовать одни и те же комплексы моделей и методов оптимизации. В структурах ТРС выделяются: центры, узлы и элементы. Узел и совокупность подчиненных ему (или связанных с ним) элементов более низкого уровня образуют подсистему ТРС [5].

В простейшем случае для обслуживания каждого объекта $Ob=\{ob_i\}$, $i=\overline{1,n_o}$, где n_o – количество обслуживаемых объектов, может быть использован отдельный элемент системы. При этом количество и территориальное размещение элементов ТРС однозначно определяется множеством обслуживаемых объектов. В общем же случае требуется определить количество элементов системы, их размещение и подмножества обслуживаемых ими объектов. Эффективные методы решения задач структурно-топологического синтеза даже при фиксированном количестве элементов характеризуются высокой временной сложностью [4]. Учет в моделях задач количества обслуживаемых объектов существенно повышает их размерность. Одним из выходов для решения задачи может служить использование методов группирования (классификации, агрегации) объектов, в большей степени приспособленных для решения задач большой размерности [8, 9].

Суть задачи группирования объектов состоит в следующем. Пусть имеется множество требующих обслуживания объектов $Ob=\{ob_i\}$, $i=\overline{1,n_o}$. Для каждой пары объектов $ob_i, ob_j \in Ob$ задано значение расстояния $\rho_{ij}=\rho(ob_i, ob_j)$, отражающее степень их близости. Целью является разбиение всего множества объектов Ob на n_G непересекающихся групп (подмножеств):

$$\{Ob_k\},\ k=\overline{1,n_G}\ ,Ob_i \cap Ob_j=\varnothing\ ,\forall\ i,\ j\in Ob\ ,\bigcup_{k=1}^{n_G} Ob_k = Ob,$$

где Ob – множество объектов (их индексов).

Решение задачи группирования обслуживаемых объектов во многом определяет количество и территориальное размещение элементов обслуживающей системы. При этом группирование может осуществляться по различным признакам: степени взаимного тяготения (выражаемого, например, с помощью матриц корреспонденций), степени подобия их требований, территориальной близости и т.д. В связи с этим возникает необходимость решения множества задач группирования объектов по различным признакам.

Степень близости объектов ob_i, $ob_j \in Ob$ в процессе решения задачи группирования оценивается функцией расстояния между ними, определенной в некоторой метрике [9]:

$$\rho_{ij}=\rho(ob_i,ob_j)=\left[\sum_{c=1}^{n_c}\left|\,x_{ic}-x_{jc}\right|^{p}\right]^{1/p}, \qquad (1)$$

где ρ_{ij} – расстояние между объектами; n_c – размерность вектора координат объекта; x_{ic}, x_{jc} – нормированные значения c-й координаты i-го и j-го объектов, $c=\overline{1,n_c}$; p – параметр, определяющий вид метрики (нормы), при p=1 получаем τ_1 - норму, при p=2 – евклидову норму и т.д.

Среди критериев, дающих удовлетворительные результаты на широком классе задач группирования при заданном количестве групп, выделяются критерии вида [8,9]:

$$\bar{\rho}=\sum_{k=1}^{n_G}\frac{n_k}{n_O}\left[\frac{1}{n_k\cdot n_k}\sum_{i,j\in Ob_k}\rho(ob_i,ob_j)\right]\to\min_{n_G,Ob_k}. \quad (2)$$

Здесь k – номер группы объектов; n_G – количество групп объектов; n_k – количество объектов в k-й группе; n_O – количество объектов в исходном множестве; Ob_k – множество объектов (их индексов), входящих в k-ю группу;

$$\bar{\rho}=\frac{1}{n_k}\cdot\sum_{k=1}^{n_G}\left(\rho_{0k}+\sum_{j\in Ob_k}\rho_{kj}\right)\to\min_{n_G,Ob_k}, \quad (3)$$

где ρ_{0k} – расстояние от центра множества ob_0 до центра группы ob_k; ρ_{kj} – расстояние от центра группы Ob_k до объекта ob_j.

Отсутствие эффективных обоснованных методов (алгоритмов) решения задач группирования привело к широкому использованию эвристических схем, примерами которых могут служить алгоритмы "Объединение", "Спектр" и другие [8, 9].

Среди недостатков идеи применения методов группирования для решения исходной задачи следует отметить трудности определения количества групп n_G, неспособность критериев группирования вида (2)–(3) учитывать используемые технологии обслуживания объектов, виды синтезируемых структур и существующие коммуникации между объектами.

Для преодоления указанных недостатков предлагается усовершенствовать критерии (2)–(3) и методы группирования объектов и на этой основе получить метод решения задачи определения количества и топологии элементов системы. Будем группировать объекты таким образом, чтобы для обслуживания каждой из групп использовался один элемент, т.е. $n_G=n_E$, где n_E – количество элементов ТРС, необходимых для обслуживания всего множества объектов $Ob=\{ob_i\}$, $i=\overline{1,n_o}$.

Основным признаком группирования объектов по критерию минимума длины связей (стоимости) является их территориальная близость (стоимость связи) [8]. При отсутствии коммуникаций между объектами, расположенными на плоскости, расстояние между объектами Ob_i и Ob_j может быть определено в евклидовой метрике с учетом кривизны связей между ними.

При наличии коммуникаций (дороги, сети или каналы связи, трубопроводы) между объектами их совокупность целесообразно представлять в виде графа. В этом случае объекты будут представлены в виде вершин графа, а коммуникации - в виде его ребер или дуг. Для определения расстояний между объектами могут быть использованы алгоритмы поиска кратчайших путей на графе Дейкстры (*Dijkstra*) или Флойда (*Floyd*), а задача группирования будет сведена к разбиению (разрезанию) графа.

Системы рассматриваемого класса могут строиться на основе централизованной (радиальной, радиально-узловой, древовидной), децентрализованной (кольцевой, многосвязной) или комбинированной структуры [5]. С учетом этого критерий (3) для решения задачи определения количества и топологии элементов системы может быть представлен в виде

$$\tilde{c}=\tilde{c}_{ex}(n_E,Ob_k)+\tilde{c}_{in}(n_E,Ob_k)\to\min_{n_E,Ob_k}, \quad (4)$$

где $\tilde{c}$ – оценка стоимости топологической структуры на уровне элементов ТРС; $\tilde{c}_{ex}$, $\tilde{c}_{in}$ – соответственно оценки стоимости меж- и внутригрупповых связей для выбранного вида структуры, $\tilde{c}_{in}=\sum_{k=1}^{n_E}\tilde{c}_k(n_E,Ob_k)$; n_E – количество элементов системы; Ob_k – множество объектов, входящих в k-ю группу (обслуживаемых k-м элементом).

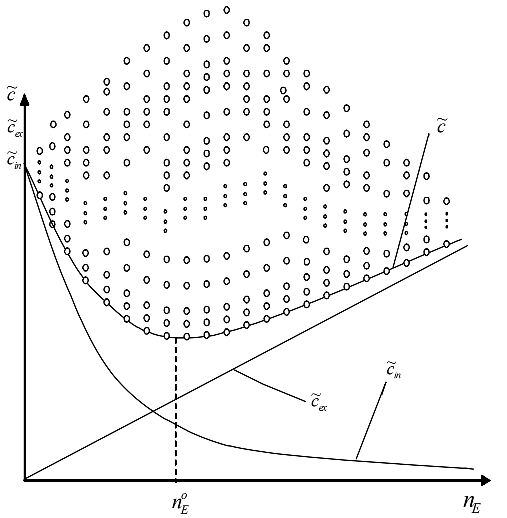
В качестве оценок стоимости межгрупповых $\tilde{c}_{ex}$ и внутригрупповых $\tilde{c}_k$ связей для выбранного вида структуры могут быть использованы стоимости (или их удельные значения) связей элементов с центром множества объектов и связей центров групп с центром множества обслуживаемых ими объектов по радиальной, кольцевой или многосвязной схеме.

Ввиду значительной территориальной рассредоточенности обслуживаемых объектов во многих практических задачах считается, что центр, узлы и элементы ТРС могут размещаться в непосредственной близости от одного из обслуживаемых объектов. Исходя из этого, в дальнейшем будем полагать, что центр, узлы и элементы ТРС могут размещаться на базе одного из обслуживаемых объектов. Это значит, что центры групп ob_k, $k=\overline{1,n_E}$ и центр всего множества ob_0 будут совпадать с одним из группируемых объектов $ob_i\in Ob$. Расположение объектов ob_k, $k=\overline{1,n_E}$ и ob_0 будет определять соответственно размещение элементов и центра ТРС. При этом положение центра всего множества объектов ob_0 выбирается по минимуму суммарной стоимости связей:

$$ob_0=\arg\min_{ob_i\in Ob}\sum_{k=1}^{n_E}\tilde{c}(ob_i,ob_k).$$

Количество способов группирования n_o объектов при фиксированном количестве групп $n_G=n_E$ равно числу сочетаний $C_{n_o}^{n_E}$. С учетом этого областью определения функции (4) есть множество сочетаний $C_{n_o}^{n_E}$ для $n_E=\overline{1,n_G^*}$, где n_G^* – предельное количество групп объектов. В общем случае группа может состоять из одного уникального объекта, т.е. максимально возможное количество групп может быть равно количеству обслуживаемых объектов $n_G^*=n_O$.

Рассмотрим характер зависимости огибающей минимумы функции (4) при фиксированных значениях количества элементов n_E с увеличением n_E от 1 до n_O (рисунок). В таком случае первое слагаемое функции (4), отражающее стоимость межгрупповых связей, будет увеличиваться независимо от вида структуры связей “центр группы – центр множества”, достигая максимума при $n_E = n_O$. Второе слагаемое функции (4), отражающее стоимость внутригрупповых связей, с увеличением количества элементов n_E будет уменьшаться независимо от вида структуры связей “объекты – центр группы”, стремясь к нулю при $n_E = n_O$. Таким образом, зависимость $\tilde{c}(n_E)$ вида (4) представляет собой гладкую одноэкстремальную функцию, подобную функции, рассмотренной в [9]. При этом если виды структур “центр группы – центр множества” и “объекты - центр группы”, а также стоимости единицы межгрупповых и внутригрупповых связей одинаковы, то стоимости топологических структур на уровне элементов с количествами $n_E = 1$ и $n_E = n_O$ совпадают $\tilde{c}(1) = \tilde{c}(n_o)$.



Огибающая локальных экстремумов функции (4)

Характер функции $\tilde{c}(n_E)$ позволяет использовать для определения количества n_E и топологии $ob_k, k = \overline{1, n_E}$ элементов ТРС идею ограниченного направленного перебора. Суть ее состоит в последовательном решении задачи для количеств элементов $n_E = 1, 2, ..., n_E^o, n_E^o + 1$, где n_E^o – оптимальное количество элементов ТРС [5]. При наличии информации о потребностях в обслуживании объектов $e_i = e(ob_i)$ и производительности элементов ТРС e_E для рассматриваемой задачи область поиска решения может быть сокращена до $n_E = \overline{n'_E, n_E^o + 1}$,

где n'_E – минимальное количество элементов, достаточное для обслуживания заданного множества объектов $Ob = \{ob_i\}$, $i = \overline{1, n_o}$. В частном случае минимальное количество элементов может быть определено из условия

$$n'_E = \left] \frac{1}{e_E} \cdot \sum_{i=1}^{n_E} e_i \right[, \qquad (5)$$

где] [– операция округления к ближайшему большему целому.

Для определения количества и топологии элементов ТРС может быть предложен следующий метод, использующий идеи направленного перебора и покоординатной оптимизации.

Определить минимально допустимое количество элементов n'_E, необходимых для обслуживания всего множества объектов $Ob = \{ob_i\}$, $i = \overline{1, n_o}$. Для этой цели, например, может быть использована оценка вида (5) или оценка оптимального количества узлов из [5].

Для заданного количества элементов $n_E = n'_E$ решить задачу группирования множества объектов $Ob = \{ob_i\}$, $i = \overline{1, n_o}$. Для этого, начав с некоторого произвольно выбранного размещения n_E элементов на множестве мест размещения объектов, улучшать решение путем последовательного перемещения одного из элементов при фиксированных размещениях $n_E - 1$ остальных. Формирование подмножеств объектов, обслуживаемых одним элементом Ob_k, $k = \overline{1, n_E}$, производится по минимуму стоимости связи объект-элемент. Для каждой из групп $k = \overline{1, n_E}$ проверяются ограничения $\sum_{i \in Ob_k} e_i \le e_E$. Циклическое применение этой процедуры для всех элементов позволит получить приближение локального минимума $\tilde{c}^o(n_E)$. Чтобы повысить точность оценки, можно применить многократную реализацию процедуры для различных начальных размещений элементов $k = \overline{1, n_E}$.

Описанную процедуру повторять для количеств элементов $n_E := n_E + 1$ до тех пор, пока огибающая минимумов (4) будет уменьшаться. В результате будут получены оптимальные или рациональные значения количества элементов ТРС n_E^o, места их расположения ob_k^o, $k = \overline{1, n_E^o}$ и группы закрепленных за ними объектов:

$$Ob_k^o, k = \overline{1, n_e^o}, Ob_i^o \cap Ob_j^o = \varnothing, \forall\, i, j \in Ob, \bigcup_{k=1}^{n_E} Ob_k^o = Ob.$$

Для оценки эффективности предложенного метода было проведено его экспериментальное исследование и сравнение с методом перебора. Эксперименты проводились путем решения задач синтеза топологической структуры на уровне элементов. Определялось время t и точность (удельная погрешность) ε решения задач. Исследование метода перебора и предложенного метода в ходе решения задач различной размерности подтвердило высокую эффективность последнего по показателям экономичности и точности. При этом средняя относительная погрешность решения более 100 задач для n_O от 10 до 80 и n_E от 1 до 4 составила $\bar{\varepsilon}$ = 0,00395, а ее максимальное значение ε_{max} = 0,05241. Время группирования $t(n_O)$ для n_E=4 и n_O от 10 до 75 аппроксимируется полиномом $t(n_O)$ первой степени с суммарной квадратичной погрешностью ε_Σ^2=0.01. Время группирования $t(n_E)$ для n_O=80 аппроксимируется полиномом $t(n_E)=0,03\,n_E^2-0,05n_E+0,03$ с суммарной квадратичной погрешностью ε_Σ^2=0.029.

Метод, использующий полный перебор сочетаний объектов в группах, имеет экспоненциальную временную сложность $t(n_O, n_E)$ порядка $O[\sum_{n_E=1}^{n_G^o+1} C_{n_o}^{n_E}]$. Предлагаемый метод имеет полиномиальную временную сложность $t(n_O)$ порядка $O[n_O]$ и $t(n_E)$ порядка $O[n_E^2]$. Время решения контрольной задачи разбиения 130 объектов на 2, 3,..., 21 группу на ПЭВМ с процессором *Pentium-600* составило 8,197с.

Таким образом, сформулирована постановка задачи определения оптимального количества элементов ТРС и мест их размещения как задачи группирования обслуживаемых объектов. Предложен критерий качества группирования, позволяющий, в отличие от известных критериев классификации объектов, определять не только состав групп, но и их оптимальное количество. Предложен эвристический метод решения задачи, использующий предварительные оценки количества элементов и базирующийся на идеях направленного перебора вариантов и покоординатной оптимизации.

Результаты экспериментов позволяют сделать вывод о целесообразности применения предложенного метода при решении задач группирования с n_O>50 и n_E>5. Для задач таких размерностей высокая временная сложность не позволяет использовать методы, основанные на полном переборе вариантов.

Определение оптимального количества элементов ТРС n_E^o, мест их расположения ob_k^o, $k=\overline{1,n_E^o}$ и групп закрепленных за ними объектов Ob_k^o, $k=\overline{1,n_E^o}$ используется в качестве исходных данных при решении задачи структурно-топологического синтеза ТРС на уровне подсистем и системы в целом [10,11].

Литература: 1. *Мазур И.И., Шапиро В.Д., Ольдерогге Н.Г.* Управление проектами. М.: Экономика, 2001. 574 с. 2. *Свирщева Э.А.* Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. Харьков: ХТУРЭ, 1998. 256 с. 3. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 512 с. 4. *Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К.* Структура многоуровневых и крупномасштабных систем. Синтез и планирование развития. М.: Наука, 1993. 160с. 5. *Петров Э.Г., Писклакова В.П., Бескоровайный В.В.* Территориально распределенные системы обслуживания. К.: Техника, 1992. 208 с. 6. *Бескоровайный В.В.* Системологический анализ проблемы структурного синтеза территориально распределенных систем // АСУ и приборы автоматики. 2002. Вып. 120. С. 29-37. 7. *Бескоровайный В.В.* Синтез логической схемы системного проектирования территориально распределенных объектов // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 94-96. 8. *Браверман Э.М., Мучник И.Б.* Структурные методы обработки эмпирических данных. М.: Наука, 1983. 464 с. 9. *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. К.: Наук. думка, 2002. 164 с. 10. *Бескоровайный В.В., Имангулова З.А.* Алгоритмы оптимизации топологии ИВС на множестве радиально-узловых структур // Радиоэлектроника и информатика. 2000. №2. С.100-104. 11. *Бескоровайный В.В., Имангулова З.А.* Математическая модель задачи синтеза централизованных информационных сетей // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. 2000. Вып. 118. С. 11-14.

Поступила в редколлегию 11.01.2003

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Смеляков С.В.

Бескоровайный Владимир Валентинович, канд. техн. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: структурный синтез территориально распределенных систем, математическое моделирование, теория оценивания и выбора решений. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, к.277, тел. (057)702-10-06.