

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕКУРРЕНТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЭЛЛИПСОИДОВ

АРЧАКОВА А. В., БОДЯНСКИЙ Е. В.,
СУХАРЕВ С. А.

Рассматривается алгоритм решения задачи текущего оценивания параметров статического объекта управления, описываемого уравнением линейной регрессии. При синтезе алгоритма используются идеи рекуррентной идентификации с ограниченным шумом, а также метод эллипсоидов, что позволяет решать задачу в условиях полного отсутствия априорной информации о характере возмущений (которые могут носить даже регулярный детерминированный характер), кроме их принадлежности к некоторому ограниченному множеству (интервалу). Решение задачи состоит в последовательном уточнении множества оценок путем нахождения его пересечения, полученного на предыдущем шаге, с двумя гиперплоскостями, задающими последнее наблюдение, и последующей аппроксимации результата эллипсоидом. Алгоритм позволяет получить интервальные, а не традиционные точечные оценки, что очень удобно в ряде практических задач, а также дает возможность обнаруживать разладки в объекте в реальном времени. В окончательную реализацию алгоритма введен ряд преобразований, что уменьшает его вычислительную сложность и обеспечивает возможность применения для цифровых микроконтроллеров.

Предлагается задача текущего оценивания параметров статического объекта управления, описываемого уравнением линейной регрессии:

$$y_t = \theta^T x_t + w_t, \quad (1)$$

где y_t – выходной сигнал объекта; x_t – $(p+1)$ -вектор независимых входов; θ – $(p+1)$ -вектор параметров, подлежащих определению; w_t – возмущение, действующее на выходе объекта. Большинство известных алгоритмов текущей идентификации – от одношагового алгоритма Качмажа [1] и его модификаций с конечной памятью [2] до рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК) в самых различных его формах [3] – основывается на предположении, что возмущение w_t имеет статистический (чаще нормальный) характер, и получаемые оценки неизвестного вектора θ могут быть найдены лишь в форме моментов некоторого многомерного распределения.

В настоящей работе предлагается адаптивный алгоритм оценивания параметров статического объекта вида (1), в основу которого положены идеи рекуррентной идентификации при ограниченном шуме [4], а также метод эллипсоидов [5]. В предлагаемом алгоритме не используется практически никаких предположений о характере возмущений (более того, возмущения могут иметь регулярный детерминированный характер), кроме их принадлежности некоторому ограниченному интервалу. Итак, пусть

$$y_t = \theta^T x_t + w_t, \quad |w_t| \leq r_t, \quad t = 1, 2, K, N, \quad (2)$$

где ограничения r_t известны для каждого текущего момента времени t . В принципе, на начальном этапе идентификации r_t может быть взято достаточно большим и “стягиваться” по мере уточнения оценок. Так или иначе, задать границы возмущений в большинстве практических ситуаций не так уж сложно. Переписав (1) в виде

$$y_t - r_t \leq \theta^T x_t \leq y_t + r_t, \quad (3)$$

можно заметить, что эти неравенства задают пару гиперплоскостей в пространстве θ , между которыми находится искомый вектор параметров. Последовательность наблюдений y_1, y_2, K, y_N порождает N пар гиперплоскостей, “высекающих” в пространстве θ некоторую область D_N . Это и есть

область оценок $\hat{\theta}_N$, причем все точки, принадлежащие этой области, равноправны в том смысле, что среди них нельзя выделить “наилучшую” оценку, хотя для удобства можно использовать некий “центр” области D_N . Очевидно, что результатом решения задачи будет не традиционная точечная оценка, а интервальная, что весьма удобно в большинстве практических задач.

Первый очевидный путь решения задачи состоит в нахождении решения системы N линейных неравенств типа (3). Однако поскольку количество вершин политопа D_N растет гораздо быстрее, чем $t = 1, 2, K, N, K$, с вычислительной точки зрения этот подход представляется малоэффективным, хотя и развивается рядом исследователей.

Альтернативный подход состоит в аппроксимации политопа D_N , полученного к t -му текущему моменту времени, эллипсоидом:

$$E_t : (\theta - \hat{\theta}_t)^T P_t^{-1} (\theta - \hat{\theta}_t) \leq 1, \quad (4)$$

где центр $\hat{\theta}_t$ и симметрическая положительно определенная матрица P_t уточняются так, чтобы

E_t был как можно “ближе” к D_N . Поскольку $\hat{\theta}_t$ и P_t содержит всего $p + (p+1)p/2$ настраиваемых параметров, данный подход выглядит предпочтительней. Идея подхода, сформулированная Швеппе, состоит в том, что эллипсоид E_t должен содержать все оценки, принадлежащие пересечению E_t (эллипсоид, построенный по $(t-1)$ -му наблюдению) с областью F_t , лежащей между двумя гиперплоскостями последнего наблюдения (3). Поскольку пересечение E_{t-1} и F_t не есть эллипсоид, необходимо так построить $\hat{\theta}_t$ и P_t , чтобы E_t максимально точно его описывал.

Объединив (2) и (4), несложно видеть, что искомые параметры E_t определяются системой:

$$\begin{cases} (\theta - \hat{\theta}_{t-1})^T P_{t-1}^{-1} (\theta - \hat{\theta}_{t-1}) \leq 1, \\ r_t^{-2} (y_t - \theta^T x_t)^2 \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

или для любого неотрицательного ρ_t :

$$(\theta - \hat{\theta}_{t-1})^T P_{t-1}^{-1} (\theta - \hat{\theta}_{t-1}) + \rho_t r_t^{-2} (y_t - \theta^T x_t)^2 \leq 1 + \rho_t.$$

Выполним преобразования квадратичной формы в левой части (5). Вводя в рассмотрение ошибку оценивания $\tilde{\theta}_t = \theta - \hat{\theta}_t$, записываем:

$$\begin{aligned} \theta^T x_t &= \hat{\theta}_{t-1}^T x_t + (\theta - \hat{\theta}_{t-1})^T x_t = \hat{\theta}_{t-1}^T x_t + \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t, \\ \tilde{\theta}_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t - \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t) &\leq 1 + \rho_t, \\ \tilde{\theta}_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} (v_t - \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t)^2 &\leq 1 + \rho_t, \end{aligned}$$

(здесь $v_t = y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t$ — ошибка идентификации)

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 - 2\rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t + \\ + \rho_t r_t^{-2} \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t x_t^T \tilde{\theta}_{t-1} &\leq 1 + \rho_t, \\ \tilde{\theta}_{t-1}^T (P_{t-1}^{-1} + \rho_t r_t^{-2} x_t x_t^T) \tilde{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 - \\ - 2\rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t &\leq 1 + \rho_t, \end{aligned} \quad (6)$$

(обозначим $\tilde{P}_{t-1}^{-1} = P_{t-1}^{-1} + \rho_t r_t^{-2} x_t x_t^T$)

$$\tilde{\theta}_{t-1}^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_{t-1} - 2\rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 \leq 1 + \rho_t.$$

Дополним (6) до полного квадрата:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t-1}^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_{t-1} - 2\rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{\theta}_{t-1}^T x_t + \rho_t^2 r_t^{-4} v_t^2 x_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t - \\ - \rho_t^2 r_t^{-4} v_t^2 x_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 &\leq 1 + \rho_t, \\ (\tilde{\theta}_{t-1} - \rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t)^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} (\tilde{\theta}_{t-1} - \rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t) + \\ + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 - \rho_t^2 r_t^{-4} v_t^2 x_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t &\leq 1 + \rho_t. \end{aligned} \quad (7)$$

После этого, введя обозначение

$$\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_{t-1} - \rho_t r_t^{-2} v_t \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t, \quad (8)$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t^T \tilde{P}_t^{-1} \tilde{\theta}_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 - \rho_t^2 r_t^{-4} v_t^2 x_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t &\leq 1 + \rho_t \text{ и} \\ \hat{\theta}_t &= \hat{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} \tilde{P}_{t-1}^{-1} v_t x_t, \text{ или} \\ \hat{\theta}_t &= \hat{\theta}_{t-1} + \Gamma_t (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t) x_t, \end{aligned}$$

что вписывается в общую схему рекуррентной идентификации [3], хотя матричный коэффициент усиления алгоритма $\Gamma_t = \rho_t r_t^{-2} \tilde{P}_{t-1}^{-1}$ пока не определен, поскольку конкретное значение ρ_t нам не известно. Возвращаясь к введенному выражению

$$\tilde{P}_{t-1}^{-1} = P_{t-1}^{-1} + \rho_t r_t^{-2} x_t x_t^T, \quad (9)$$

которое с использованием леммы об обращении матриц может быть записано в форме

$$\tilde{P}_{t-1}^{-1} = P_{t-1}^{-1} - \frac{\rho_t r_t^{-2} P_{t-1}^{-1} x_t x_t^T P_{t-1}^{-1}}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t},$$

преобразуем неравенство (7):

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t^T \tilde{P}_t^{-1} \tilde{\theta}_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 - \rho_t^2 r_t^{-4} v_t^2 x_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t &= \\ = \tilde{\theta}_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 (1 - r_t^{-2} \rho_t x_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} x_t) &= \\ = \tilde{\theta}_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 (1 - \rho_t r_t^{-2} x_t^T \times \\ \times \frac{P_{t-1} - \rho_t r_t^{-2} P_{t-1}^{-1} x_t x_t^T P_{t-1}^{-1}}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \times \\ \times x_t) &= \tilde{\theta}_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_t + \rho_t r_t^{-2} v_t^2 \times \end{aligned}$$

$$\times \left(1 - r_t^{-2} \rho_t \frac{x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \right) =$$

$$= \tilde{\theta}_t^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} \tilde{\theta}_t + \frac{\rho_t r_t^{-2} v_t^2}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \leq 1 + \rho_t \text{ или}$$

$$(\theta - \hat{\theta}_t)^T \tilde{P}_{t-1}^{-1} (\theta - \hat{\theta}_t) \leq 1 + \rho_t - \frac{\rho_t r_t^{-2} v_t^2}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t}.$$

Введя обозначение

$$P_t = \tilde{P}_{t-1} \left(1 + \rho_t - \frac{\rho_t v_t^2}{r_t^2 + \rho_t x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \right)$$

и используя соотношения (8) и (9), запишем выражения, задающие алгоритм рекуррентной идентификации при ограниченных помехах:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} \tilde{P}_{t-1}^{-1} (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t) x_t, \\ \tilde{P}_{t-1}^{-1} = P_{t-1}^{-1} - \frac{\rho_t r_t^{-2} P_{t-1}^{-1} x_t x_t^T P_{t-1}^{-1}}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t}, \\ P_t = \tilde{P}_{t-1} \left(1 + \rho_t - \frac{\rho_t (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t)^2}{r_t^2 + \rho_t x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Несложно видеть, что алгоритм (10) представляет собой разновидность взвешенного рекуррентного метода наименьших квадратов [3] и структурно близок к алгоритму Фогеля-Хуанга [4].

Процедура (10) содержит неопределенный параметр ρ_t , который выбираем так, чтобы объем эллипсоида E_t , описывающего пересечение E_{t-1} и F_t , был минимальным. Поскольку объем эллипсоида (4) V_t пропорционален значению $\sqrt{\det P_t}$:

$$V_t \sim \sqrt{\det P_t} = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{1/2},$$

где λ_i ($i=1,2,K,p$) — собственные числа матрицы P_t , задачу отыскания ρ_t удобно рассматривать как минимизацию $\det P_t$ по ρ_t , т.е. одномерного поиска. Заметим, что такой подход принят в теории планирования экспериментов, а критерий, связанный с $\det P_t$, называется D-критерием. В принципе возможно использование других типов критериев, например A-, E-, связанных с собственными числами $\det P_t$.

Выразим $\det P_t$ как функцию r_t , для чего запишем очевидные матричные преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t-1} &= P_{t-1} - \frac{\rho_t r_t^{-2} P_{t-1}^{-1} x_t x_t^T P_{t-1}^{-1}}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} = \\ &= \left(I - \frac{\rho_t P_{t-1}^{-1} x_t x_t^T}{r_t^2 + \rho_t x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \right) P_{t-1}, \\ \det \tilde{P}_{t-1} &= \det \left(I - \frac{\rho_t P_{t-1}^{-1} x_t x_t^T}{r_t^2 + \rho_t x_t^T P_{t-1}^{-1} x_t} \right) \det P_{t-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначив для краткости

$$\begin{cases} \rho_t P_{t-1} x_t = b_t, \\ -\frac{x_t}{r_t^2 + \rho_t x_t^T P_{t-1} x_t} = c_t, \\ x_t^T P_{t-1} x_t = g_t, \end{cases}$$

с учетом тождества $\det(I + b_t c_t^T) = 1 + c_t^T b_t$, окончательно получим:

$$\det P_t = \left(1 - \frac{\rho_t g_t}{r_t^2 + \rho_t g_t}\right) \det P_{t-1},$$

$$\det P_t = \left(1 + \rho - \frac{\rho_t v_t^2}{r_t^2 + \rho_t g_t}\right)^p \left(1 - \frac{\rho_t g_t}{r_t^2 + \rho_t g_t}\right) \det P_{t-1}. \quad (12)$$

Поскольку уравнение

$$\frac{\partial \det P_t}{\partial \rho_t} = 0 \quad (13)$$

явно не имеет аналитического решения, необходимо воспользоваться процедурой либо одномерного поиска минимума (12), либо отыскания действительных положительных корней (13). Поскольку имеются программные реализации достаточно эффективных процедур решения подобных задач для любой современной ЭВМ, проблем здесь не возникает, но появляются затруднения, связанные с анализом свойств алгоритма.

Работа процедуры (10) реализуется с помощью последовательности шагов:

1. Задать $\hat{\theta}_0 = 0, P_0 = \gamma I, \gamma \gg 1$.
2. Вычислить $g_t = x_t^T P_{t-1} x_t$ и $v_t = y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t$.
3. Решить задачу минимизации (12). Если положительное значение ρ_t не найдено, это может означать, что E_{t-1} и F_t не пересекаются. В этом случае можно либо откорректировать модель, например, проверить правильность выбора r_t , либо положить $\rho_t = 0$, чтобы игнорировать y_t как аномальное наблюдение. В этом случае момент времени t регистрируется как момент разладки объекта (1), что весьма важно с позиций контроля за изменениями свойств объекта. Если найдено несколько положительных корней уравнения (13), из них выбирается тот, который обеспечивает наименьшее значение функции:

$$Y(\rho_t) = \left(1 + \rho_t - \frac{\rho_t v_t^2}{r_t^2 + \rho_t g_t}\right)^p \left(1 - \frac{\rho_t g_t}{r_t^2 + \rho_t g_t}\right).$$

4. Вычислить $\tilde{P}_{t-1}$ из (11).

5. Вычислить $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} \tilde{P}_{t-1} v_t x_t$.

6. Вычислить $P_t = \tilde{P}_{t-1} \left(1 + \rho - \frac{\rho_t v_t^2}{r_t^2 + \rho_t g_t}\right)$.

7. Вернуться к шагу 2.

В целях упрощения численной реализации алгоритма (10) проведем без дополнительных комментариев цепочку очевидных преобразований:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t &= \hat{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} \tilde{P}_{t-1} v_t x_t = \hat{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} v_t \times \\ &\times \frac{P_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1} x_t P_{t-1} - \rho_t r_t^{-2} P_{t-1} x_t x_t^T P_{t-1}}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1} x_t} x_t = \\ &= \hat{\theta}_{t-1} + \rho_t r_t^{-2} v_t \frac{P_{t-1} v_t x_t}{1 + r_t^{-2} \rho_t x_t^T P_{t-1} x_t} = \\ &= \hat{\theta}_{t-1} + \frac{P_{t-1} v_t x_t}{\rho_t^{-1} r_t^2 + x_t^T P_{t-1} x_t} = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{P_{t-1} (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t)}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}, \end{aligned}$$

где $\alpha_t = \rho_t^{-1} r_t^2$;

$$\begin{aligned} P_t &= \left(P_{t-1} - \frac{\rho_t r_t^{-2} P_{t-1} x_t x_t^T P_{t-1}}{1 + \rho_t r_t^{-2} x_t^T P_{t-1} x_t}\right) \left(1 + \rho_t - \frac{\rho_t v_t^2}{r_t^2 + \rho_t x_t^T P_{t-1} x_t}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{r_t^2}{\alpha_t} - \frac{v_t^2}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}\right) \left(P_{t-1} - \frac{P_{t-1} x_t x_t^T P_{t-1}}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}\right) = \\ &= \beta_t \left(P_{t-1} - \frac{P_{t-1} x_t x_t^T P_{t-1}}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}\right), \end{aligned}$$

где $\beta_t = 1 + \frac{r_t^2}{\alpha_t} - \frac{v_t^2}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}$.

Окончательно алгоритм идентификации может быть записан в виде

$$\begin{cases} \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{P_{t-1} (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T x_t) x_t}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}, \\ P_t = \beta_t \left(P_{t-1} - \frac{P_{t-1} x_t x_t^T P_{t-1}}{\alpha_t + x_t^T P_{t-1} x_t}\right), \end{cases} \quad (14)$$

который структурно полностью совпадает с известным экспоненциально взвешенным рекуррентным методом наименьших квадратов [2, 3], однако существенно отличается от него своими свойствами и требует на каждом шаге решения задачи минимизации функции $\det P_t = f(\alpha_t)$:

$$\det P_t = \left(1 + \frac{r_t^2}{\alpha_t} - \frac{v_t^2}{\alpha_t + g_t}\right)^p \left(1 - \frac{g_t}{\alpha_t + g_t}\right) \det P_{t-1}. \quad (15)$$

Предлагаемый алгоритм (14), (15) позволяет решать задачу рекуррентной идентификации объекта (1) в условиях отсутствия априорной информации о характере возмущений, кроме их ограниченности, обнаруживать разладки в объекте в текущем времени, достаточно прост в численной реализации и по мере накопления информации о характере возмущений автоматически принимает форму известных процедур.

Литература: 1. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Построение моделей процессов производства. — М.: Энергия. — 1975. — 375 с. 2. Бодянский Е. В., Руденко О. Г. Адаптивные модели в системах управления техническими объектами. — К.: УМК ВО. — 1988. — 212 с. 3. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. — М.: Наука. — 1991. — 432 с. 4. Norton J. P. An introduction to identification. — London: Academic Press Inc. — 1986. — 310 p. 5. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука. — 1988. — 320 с.

Поступила в редколлегию 12.10.97

(Окончание см. на с. 82)