УДК 510.62

А. В. КОЛЬЦОВ, Д. Э. СИТНИКОВ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО,
д-р техн. наук

О ДЕКОМПОЗИЦИИ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Пусть имеется уравнение алгебры конечных предикатов $A = 1$ **(1)**, где A — произвольно выбранный конечный предикат, представленный какой-либо формулой универсальной алгебры*. Под декомпозицией такого уравнения будем понимать замену этого уравнения равносильной ему системой $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, ..., $A_s = 1$ более простых уравнений. Здесь $A_1, A_2, ..., A_s$ — предикаты, связанные с предикатом A тождеством:

$$A_1 A_2 A_3 \dots A_s \equiv A. \tag{2}$$

Число предикатов s A_1, A_2, ..., A_s может быть выбрано произвольно. Декомпозицию уравнения (1) можно производить, основываясь на приведенной ниже теореме о конъюнктивной декомпозиции.

Теорема 1. *Предикаты $A_1, A_2, ..., A_s$, удовлетворяющие условию (2), имеют следующий общий вид:*

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv A \vee \bar{B}_1 (B_2 \vee \dots \vee \bar{B}_s); \\ A_2 &\equiv A \vee B_2; \\ &\dots\dots\dots \\ A_s &\equiv A \vee B_s, \end{aligned} \tag{3}$$

где $B_1, B_2, ..., B_s$ — произвольно выбранные предикаты.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости следующих двух утверждений.

1. При любых предикатах $B_1, B_2, ..., B_s$ тождество (2) выполняется.

2. Для любых предикатов $A_1, A_2, ..., A_s$, удовлетворяющих условию (2), найдутся предикаты $B_1, B_2, ..., B_s$, обеспечивающие выполнение тождеств (3).

Первое утверждение означает, что любые предикаты вида (3) пригодны для представления предиката произведением $A_1 A_2 \dots A_s$.

* Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Теория интеллекта. Математические средства. Х., 1984 155 с.

Смысл второго утверждения состоит в том, что предикатами вида (3) исчерпываются все возможные варианты представления предиката A в виде произведения $A_1 A_2 \ldots A_s$.

Докажем первое утверждение. Произвольно выберем предикаты $B_1, B_2, \ldots, B_s$. С помощью тождеств (3) находим $A_1 A_2 \ldots$ $\ldots A_s \equiv (A \vee B_1 (\overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_s))(A \vee B_2) \ldots (A \vee B_s) \equiv A \vee B_1 \times$ $\times (\overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_s) B_2 \ldots B_s \equiv A \vee B_1 \overline{B}_2 B_2 \ldots B_s \vee \ldots \vee B_1 \overline{B}_s B_2 \ldots B_s \equiv A$

Таким образом тождество (2) выполняется.

Для доказательства второго утверждения предикаты $A_1, A_2, \ldots, A_s$ произвольно выберем так, чтобы они удовлетворяли тождеству (2). Предикаты $B_1, B_2, \ldots, B_3$ выбираем следующим образом:

$$B_1 \equiv \overline{A} A_1, \; B_2 \equiv \overline{A} A_2, \ldots, B_s \equiv \overline{A} A_s.$$

Тогда $A \vee B_1 (\overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_s) \equiv A \vee \overline{A} A_1 (\overline{\overline{A} A_2} \vee \ldots \vee \overline{\overline{A} A_s}) \equiv$ $\equiv A \vee \overline{A} A_1 (A \vee \overline{A}_2 \vee \ldots \vee A \vee \overline{A}_s) \equiv A \vee \overline{A} A_1 (A \vee \overline{A}_2 \vee \ldots \vee \overline{A}_s) \equiv$ $\equiv (A \vee \overline{A}) \wedge (A \vee A_1 (A \vee \overline{A}_2 \vee \ldots \vee \overline{A}_s) \equiv A \vee A_1 (\overline{A}_2 \vee \ldots \vee \overline{A}_s) \equiv$ $\equiv A_1 A_2 \ldots A_s \vee A_1 (\overline{A}_2 \vee \ldots \vee \overline{A}_s) \equiv A_1 (A_2 \ldots A_s \vee \overline{A_2 \ldots A_s}) \equiv A_1,$ $A \vee B_i \equiv A \vee \overline{A} A_i \equiv (A \vee \overline{A})(A \vee A_i) \equiv A \vee A_i \equiv A_1 A_2 \ldots A_i \ldots A_s \vee$ $\vee A_i \equiv A_i, \; i = 1, 2, \ldots, s.$

Таким образом тождества (3) выполняются. Теорема доказана.

Сформулируем и докажем теорему о декомпозиции в симметричной форме.

Теорема 2. *Предикаты $A_1, A_2, \ldots, A_s$, удовлетворяющие условию (2), можно представить в следующем общем виде:*

$$
\begin{aligned}
A_1 &\equiv A \vee B_1 (\overline{B}_2 \vee \overline{B}_3 \vee \ldots \vee \overline{B}_s),\\
A_2 &\equiv A \vee B_2 (\overline{B}_1 \vee B_3 \vee \ldots \vee \overline{B}_s),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_s &\equiv A \vee B_s (\overline{B}_1 \vee \overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_{s-1}),
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_s$ — произвольно выбранные предикаты.

Доказательство. Покажем, что любые предикаты вида (4) пригодны для представления предиката A в виде произведения $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Произвольно выберем предикаты $B_1, B_2, \ldots, B_s$. С помощью тождеств (4) находим:

$A_1 A_2 \ldots A_s \equiv (A \vee B_1 (\overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_s))(A \vee B_2 (\overline{B}_1 \vee \overline{B}_3 \vee \ldots \vee \overline{B}_s)) \ldots$ $\ldots (A \vee B_s (\overline{B}_1 \vee \ldots \vee \overline{B}_{s-1}) \equiv A \vee B_1 B_2 \ldots B_s (\overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_s) \ldots (\overline{B}_1 \vee \ldots$ $\ldots \vee \overline{B}_{s-1}) \equiv A.$

Покажем, что предикатами вида (4) исчерпываются все возможные варианты представления предиката A в виде произведения $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Считаем, что предикаты $A_1, A_2, \ldots, A_s$ выбраны так, что выполняется тождество (2). Предикаты $B_1, B_2, \ldots, B_s$ выбираем следующим образом:

$$B_i \equiv \overline{A} A_i \; (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Тогда, подставляя выражения для B_i (4), получим $A \vee B_i \times (\bar B_1 \vee \dots \vee \bar B_{i-1} \vee \bar B_{i+1} \vee \dots \vee \bar B_s) \equiv A \vee \bar A A_i (\overline{\bar A A_1} \vee \dots \vee \overline{\bar A A_{i-1}} \vee \overline{\bar A A_{i+1}} \vee \dots \vee \overline{\bar A A_s}) \equiv (A \vee \bar A)(A \vee A_i(A \vee \bar A_1 \vee \dots \vee \bar A_{i-1} \vee \bar A_{i+1} \vee \dots \vee \bar A_s)) \equiv A \vee A_i A \vee A_i(\bar A_1 \vee \dots \vee \bar A_{i-1} \vee \bar A_{i+1} \vee \dots \vee \bar A_s) \equiv A \vee A_i(\bar A_1 \vee \dots \vee \bar A_{i-1} \vee \bar A_{i+1} \vee \dots \vee \bar A_s) \equiv A_1 \dots A_{i-1} \times A_i A_{i+1} \dots A_s \vee A_i \overline{A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_s} \equiv A_i (A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_s \vee \overline{A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_s}) \equiv A_i,\ i = 1, 2, \dots, s.$

Теорема доказана.

Рассмотрим следствия теоремы 1.

Следствие 1. Предикаты $A_1, A_2, \dots, A_s$, удовлетворяющие условию (2), всегда можно представить в виде

$$A_1 \equiv A \vee C_1,\ A_2 \equiv A \vee C_2,\ \dots,\ A_s \equiv A \vee C_s, \tag{5}$$

где $C_1 C_2 \dots C_s \equiv 0$ (6). При этом из (5) и (6) следует (2).

Действительно, принимая $C_1 \equiv B_1 (\bar B_2 \vee \dots \vee \bar B_s)$, $C_2 \equiv B_2, \dots$, $C_s \equiv B_s$, находим, что условие (5) выполняется. Вместе с тем $C_1 C_2 \dots C_s \equiv B_1 (\bar B_2 \vee \dots \vee \bar B_s) B_2 \dots B_s \equiv B_1 \overline{B_2 \dots B_s} B_2 \dots B_s \equiv 0$. Из (5) и (6) выводим (2): $A_1 A_2 \dots A_s \equiv (A \vee C_1)(A \vee C_2) \dots (A \vee C_s) \equiv A \vee C_1 C_2 \dots C_s \equiv A \vee 0 = A$.

Следствие 2. Предикаты $C_1, C_2, \dots, C_s$, фигурирующие в тождествах (5) и (6), всегда можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям $AC_1 \equiv 0, AC_2 \equiv 0, \dots, AC_s \equiv 0$ **(7)**.

Действительно, принимая $C_1 \equiv \bar A A_1$, $C_2 \equiv \bar A A_2, \dots, C_s \equiv \bar A A_s$, находим, что условия (5) и (6) выполняются $A \vee C_i \equiv A \vee \bar A A_i \equiv A \vee A_i \equiv A_1 A_2 \dots A_i \dots A_s \vee A_i \equiv A_i$, $C_1 C_2 \dots C_s \equiv \bar A A_1 \bar A A_2 \dots \bar A A_s \equiv \bar A A_1 A_2 \dots A_s \equiv \bar A A \equiv 0$. Вместе с тем $AC_i \equiv A \bar A A_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Из теоремы о конъюнктивной декомпозиции также можно вывести теорему о дизъюнктивной декомпозиции.

Теорема 3. *Предикаты $A_1, A_2, \dots, A_s$, удовлетворяющие условию* $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_s \equiv A$ (8), имеют следующий общий вид:

$$A_1 \equiv A(B_1 \vee \bar B_2 \dots \bar B_s),\ A_2 \equiv AB_2,\ \dots,\ A_s \equiv AB_s, \tag{9}$$

где B_1, B_2, B_s — *произвольно выбранные предикаты.*

Эта теорема непосредственно выводится из теоремы 1, если в (2) и (3) под $A, A_1, A_2, \dots, A_s, B_1, B_2, \dots, B_s$ понимать соответственно $\bar A, \bar A_1, \bar A_2, \dots, \bar A_s, \bar B_1, \bar B_2, \dots, \bar B_s$. Действительно, рассматривая тождество $\bar A \equiv \bar A_1 \bar A_2 \dots \bar A_s$ и применяя теорему 1, получаем следующий общий вид для $\bar A_1, \bar A_2, \dots, \bar A_s$:

$$\bar A_1 \equiv \bar A \vee B_1 (\bar B_2 \vee \dots \vee \bar B_s),\ \bar A_2 \equiv \bar A \vee B_2,\ \dots,\ \bar A_s \equiv \bar A \vee B_s. \tag{10}$$

Заменяя B_i на $\overline{B}_i (i=1, 2, \ldots, s)$ и производя операцию отрицания над левыми и правыми частями формул (10), получаем (9). В результате операции отрицания над левой и правой частью тождества $\overline{A} \equiv \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_s$ имеем (8).

Представляет интерес также теорема о дизъюктивной декомпозиции в симметричной форме.

Теорема 4. *Предикаты* $A_1, A_2, \ldots, A_s$, *удовлетворяющие условию* (8), *можно представить в следующем общем виде:*

$$
\begin{aligned}
A_1 &\equiv A(B_1 \vee \overline{B}_2\overline{B}_3 \ldots \overline{B}_s),\\
A_2 &\equiv A(B_2 \vee \overline{B}_1\overline{B}_3 \ldots \overline{B}_s),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_s &\equiv A(B_s \vee \overline{B}_1\overline{B}_2 \ldots \overline{B}_{s-1}),
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_s$ — произвольно выбранные предикаты.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 2, если B (2) и (4) под $A_1, A_2, \ldots, A_s, B_1, B_2, \ldots, B_s$ понимать соответственно $\overline{A}, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_s, \overline{B}_1\overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_s$. Действительно, рассмотрим тождество $\overline{A} \equiv \overline{A}_1\overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_s$ и применим теорему 2. Общий вид для $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_s$ запишется так:

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_1 &\equiv \overline{A} \vee B_1(\overline{B}_2 \vee \overline{B}_3 \vee \ldots \vee \overline{B}_s),\\
\overline{A}_2 &\equiv \overline{A} \vee B_2(\overline{B}_1 \vee \overline{B}_3 \vee \ldots \vee \overline{B}_s),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{A}_s &\equiv \overline{A} \vee B_s(\overline{B}_1 \vee \overline{B}_2 \vee \ldots \vee \overline{B}_{s-1}).
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Заменяя B_i на $\overline{B}_i (i=1, 2, \ldots, s)$ и производя операцию отрицания над левыми и правыми частями формул в (12), получаем (11). Производя операцию отрицания над левой и правой частью тождества $\overline{A} \equiv \overline{A}_1\overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_s$, получим (8).

Таким образом, теоремы 3 и 4 можно рассматривать как следствия теорем 1 и 2 соответственно. Следствия теоремы 3 являются дизъюнктивными аналогами следствий из теремы 1.

Следствие 3. Предикаты $A_1, A_2, \ldots, A_s$, удовлетворяющие условию (8), всегда можно представить в виде

$$A_1 \equiv AC_1, \; A_2 \equiv AC_2, \; \ldots, \; A_s \equiv AC_s, \qquad (13)$$

где $C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_s \equiv 1$. (14)

При этом из (13) и (14) следует (8).

Действительно, принимая $C_1 \equiv B_1 \vee \overline{B}_2 \ldots \overline{B}_s$, $C_2 \equiv B_2, \ldots, C_s \equiv \equiv B_s$, находим, что условие (13) выполняется. Вместе с тем $C_1 \vee C_2 \vee \ldots C_s \equiv B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_s \vee \overline{B}_2 \ldots \overline{B}_s \equiv 1$. Из (13) и (14) выводим (8) $A_1 \vee \ldots \vee A_s \equiv A(B_1 \vee \overline{B}_2 \ldots \overline{B}_s) \vee AB_2 \vee \ldots \vee AB_s \equiv \equiv A(B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_s \vee \overline{B}_2\overline{B}_3 \ldots \overline{B}_s) \equiv A$.

Следствие 4. Предикаты $C_1, C_2, \ldots C_s$, фигурирующие в тождествах (13), (14), всегда можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям:

$$A \vee C_1 \equiv 1,\ A_2 \vee C_2 \equiv 1, \ldots, A_s \vee C_s \equiv 1. \qquad (15)$$

Действительно, принимая $C_1 \equiv \bar{A} \vee A_1$, $C_2 \equiv \bar{A} \vee A_2, \ldots, C_s \equiv \equiv A \vee \bar{A}_s$, находим, что условия (13), (14) выполняются:

$$AC_i \equiv A(\bar{A} \vee A_i) \equiv AA_i \equiv (A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_i \vee \ldots \vee A_s) A_i \equiv A_i;$$

$$C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_s \equiv \bar{A} \vee A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_s \equiv \bar{A} \vee A \equiv 1.$$

Вместе с тем $A \vee C_i \equiv A \vee \bar{A} \vee A_i \equiv 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Рассмотрим пример применения теоремы о декомпозиции. Дано уравнение

$$y^1z^0t^1 \vee x^0y^1t^1 \vee x^0y^1z^0 \vee x^0z^0t^1 = 1. \qquad (16)$$

Требуется заменить его равносильной системой, состоящей из двух возможно более простых уравнений.

Предикат, представленный левой частью уравнения (16), обозначаем символом A. Условие (2) в данном случае запишется в виде $A_1A_2 \equiv A$ (17). Предикаты A_1 и A_2 будем искать в виде (5) $A_1 \equiv A \vee C_1$, $A_2 \equiv A \vee C_2$ (18). Согласно (6) и (7), полагаем $C_1C_2 \equiv 0$, $AC_1 \equiv 0$, $AC_2 \equiv 0$ (19).

Для наглядности на табл. 1 предикат A представлен диаграммой Вейга. Нули в диаграмму не занесены. Условия (19) означают, что предикаты C_1 и C_2 не должны иметь общих единиц, кроме того, каждый из этих предикатов не должен иметь общих единиц с предикатом A. В остальном предикаты C_1 и C_2 можно выбирать произвольно. В роли C_1 и C_2 берем предикаты, представленные соответственно в табл. 2 и 3. Положение единиц в диаграммах Вейга для предикатов C_1 и C_2 выбрано с таким расчетом, чтобы удовлетворить рассмотренным ранее условиям (3) и, вместе с тем, получить возможно более простые формулы для предикатов $A_1 \equiv \equiv A \vee C_1$ и $A_2 \equiv A \vee C_2$. Полученные предикаты A_1 и A_2 представлены в табл. 4 и 5.

Переходя от диаграмм Вейга к формулам, получаем $A_1 \equiv \equiv x^0y^1 \vee z^0t^1$, $A_2 \equiv x^0z^0 \vee y^1t^1$. Таким образом, исходное уравнение (16), имеющее 12 узнаваний букв, мы заменим равносильной ему системой, состоящей из двух уравнений, каждое из которых имеет по 4 узнавания буквы. Всего в системе — 8 узнаваний букв, т. е. меньше, чем в исходном уравнении.

Рассмотрим пример декомпозиции на несколько уравнений. Пусть требуется заменить уравнение (16) равносильной ему системой, состоящей из возможно более простых уравнений. Число уравнений не ограничивается. Декомпозицию уравнения (16) выполним с помощью зависимостей (2), (5)—(7).

Таблица 1

xy \ zt	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11		1		
10				

Таблица 2

	00	01	11	10
00				
01				1
11				
10		1		

Таблица 3

	00	01	11	10
00	1			
01				
11			1	
10				

Таблица 4

	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	1
11		1		
10		1		

Таблица 5

	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11		1	1	
10				

Таблица 6

	00	01	11	10
00	1		1	1
01				1
11	1		1	1
10				

Таблица 7

	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

Таблица 8

	00	01	11	10
00	1		1	
01				
11	1		1	
10	1	1	1	

Таблица 9

	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1	1	

Таблица 10

	00	01	11	10
00	1		1	1
01				1
11	1			
10	1	1		

Таблица 11

	00	01	11	10
00	1		1	
01				
11	1			
10				

Таблица 12

	00	01	11	10
00			1	
01				
11				
10				

Таблица 13

	00	01	11	10
00			1	
01				1
11	1		1	1
10		1	1	

Таблица 14

	00	01	11	10
00	1			
01				1
11	1		1	1
10	1	1		

В роли C_2 берем предикат из табл. 6, который дает наиболее простую формулу $A_1 \equiv x^0 \vee y^1$ для предиката $A_1 \equiv A \vee C_1$, представленного в табл. 7. Стремление еще более упростить формулу путем добавления единиц в табл. 6 привело бы к неприемлемому предикату $A_1 \equiv 1$. Поскольку $A_1 \not\equiv A$, формирования уравнений продолжаем. В роли C_2 берем какой-нибудь другой предикат, также дающий простейшую формулу. Например, предикат в табл. 8 дает простейшую формулу для предиката $A_2 \equiv A \vee C_2$ (табл. 9). Произведение C_1C_2 не равно тождественно нулю, поэтому двух полученных уравнений недостаточно. Предикат $A_3 \equiv A \vee C_3$ формируем с таким расчетом, чтобы в диаграмме предиката $C_1C_2C_3$ получить возможно меньшее число единиц. Выбранный по этому критерию предикат C_3 представлен в табл. 10. Формула для предиката A_3 в этом случае $A_3 \equiv z^0 \vee x^0$. Описанный процесс продолжаем до тех пор, пока не будет достигнуто выполнение условия (6). Предикаты $C_1C_2C_3$, $C_1C_2C_3C_1$ представлены соответственно в табл. 11 и 12, а C_4 и C_5 — в табл. 13 и 14 соответственно. В этом случае формулы для предикатов $A_4 \equiv A \vee C_4$ и $A_5 \equiv A \vee C_5$ выглядят следующим образом: $A_4 \equiv y^1 \vee t^1$, $A_5 \equiv y^1 \vee z^0$. Поскольку предикат $c_1c_2c_3c_4c_5$ тождественно равен нулю, система уравнений

$$x_0 \vee y^1 = 1,\ z^0 \vee t^1 = 1,\ x^0 \vee z^0 = 1,\ y^1 \vee t^1 = 1,\ y^1 \vee z^0 = 1 \quad (20)$$

равносильно уравнению (16). В каждом уравнении системы (20) — 2 узнавания буквы. Всего в системе — 10 узнаваний, т. е. опять меньше, чем в исходном уравнении (16), но больше, чем в случае декомпозиции на 2 уравнения.

Поступила в редколлегию 25.04.89