

УДК 517.938:519.245

ФРАКТАЛЬНІ СТРУКТУРИ В НЕЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕННЯХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Биков А. М.

e-mail: andrii.bykov@nure.ua

Науковий керівник – к. ф.- м. наук, доц. Онищенко А.А.

Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. Фізики
м. Харків, Україна

Fractal structures in nonlinear mappings appear in many chaotic systems where small changes in initial conditions lead to complex behavior. These systems often produce self-similar geometric patterns known as fractals.

Tools such as the Lyapunov exponent and the box-counting method help analyze chaos and fractal complexity. A well-known example is the logistic map, which transitions from stable behavior to chaos and can generate sequences that resemble pseudorandom numbers.

Фрактальні структури в нелінійних відображеннях є однією з важливих тем сучасної математики та інформатики. Нелінійні відображення це функції, які не мають прямої, лінійної залежності між змінною і вихідним значенням. У результаті застосування функції до її попереднього значення багато разів $x_{n+1} = f(x_n)$ вихідне значення може змінюватись дуже сильно та на перший погляд не передбачувано. Таку поведінку називають хаотичною властивістю. На відміну від звичайних геометричних об'єктів, фрактали характеризуються складною внутрішньою будовою, яка зберігається при зміні масштабу. Цю властивість називають самоподібністю. Саме вона дозволяє описувати складні динамічні явища за допомогою відносно простих математичних моделей.

У сучасних дослідженнях фрактали часто розглядаються як геометричний прояв хаосу. Коли система переходить у хаотичний режим, її поведінка стає складною, а у фазовому просторі виникають множини точок, які мають фрактальну структуру. Це добре видно на так званих біфуркаційних діаграмах, які показують як змінюється поведінка системи при зміні певного параметра. Якщо збільшувати окремі ділянки такої діаграми, то можна побачити подібні структури, що повторюються. Це є ознакою фрактальної будови.

Важливим показником, який використовується для аналізу хаотичної поведінки системи, є коефіцієнт Ляпунова. Він показує, наскільки швидко розходяться дві дуже близькі траєкторії системи. Якщо значення показника Ляпунова є від'ємним, то траєкторії з часом зближуються, і система є стабільною. Якщо показник дорівнює нулю, система знаходиться на межі переходу між різними режимами. Додатне значення показника Ляпунова означає, що траєкторії швидко розходяться, що є ознакою хаосу. Для

дискретних відображень цей показник зазвичай обчислюють як середнє значення логарифма модуля похідної функції вздовж траєкторії системи. Такий розрахунок дозволяє оцінити, чи буде система поводитися стабільно, періодично або хаотично.

Також розглядається можливість використання хаотичних систем для створення псевдовипадкових чисел. Такі числа використовуються у багатьох галузях, зокрема у комп'ютерному моделюванні, криптографії, телекомунікаціях та обробці сигналів. Звичайні генератори випадкових чисел працюють за певними алгоритмами, тому вони генерують псевдовипадкові послідовності. Дослідники звернули увагу на те, що хаотичні системи можуть бути зручним джерелом таких послідовностей, оскільки їх поведінка дуже складна і важко передбачувана.

Одним із найбільш відомих прикладів нелінійного відображення є логістичне відображення: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Незважаючи на простоту формули, ця система може демонструвати різні режими роботи. При малих значеннях параметра (r) система поводить себе стабільно і поступово приходить до одного значення. При збільшенні параметра система переходить до циклу вдвічі більшого періоду, що називається біфуркацією подвоєння періоду. Якщо параметр збільшувати далі, система переходить у хаотичний режим через каскад біфуркацій. Саме в цьому режимі у фазовому просторі виникає складна фрактальна структура.

Таким чином, огляд наукових джерел показує, що фрактальні структури є важливою характеристикою хаотичних систем. Вони виникають у результаті нелінійної динаміки та переходу системи до хаосу. Нелінійні відображення, зокрема логістична мапа, є зручними моделями для дослідження таких явищ. Завдяки своїй складній фрактальній структурі хаотичні системи можуть використовуватися для моделювання псевдовипадкових процесів.

Список використаних джерел:

1. Клим Е. І. Теорія фракталів та її застосування для нелінійної динаміки. Луцьк, 2023.
2. Wang L., Cheng H. Pseudo-Random Number Generator Based on Logistic Chaotic System // Entropy. 2019. Vol. 21, № 10. Article 960.
3. Gupta S., Goswami U. Highly chaotic random number generator based on logistic map // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). 2018. Vol. 7, Issue 5.
4. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Fractal Analysis of the Fractal Ultra-Wideband Signals // Problems of Atomic Science and Technology. Series 'Plasma Electronics and New Methods of Acceleration'. 2015. No. 4(98), Iss. 9. – P. 248 – 251.