УДК. 621.373.072.9

Синхронизированный *LC*-автогенератор с обратной связью

В.В. Рапин

Предложен синхронизированный на основном тоне *LC*-автогенератор с обратной связью, пропорциональной производной сдвига фазы; рассмотрены вопросы нелинейной динамики и устойчивости колебаний.

Fundamentally injected *LC*-oscillator with the feedback proportional to the derivative of the phase shift is proposed. Nonlinear dynamics and stability of oscillations has been discussed.

Введение

Широкое использование синхронизированных автогенераторов обусловлено их значительными функциональными возможностями. Они позволяют производить усиление и демодуляцию АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов, фазовую коррекцию, нелинейную фильтрацию и многое другое [1–4]. Введение отрицательной фазовой обратной связи позволило улучшить показатели таких автогенераторов, в частности сократить длительность переходных процессов, а также получить новые свойства систем синхронизированных автогенераторов [5]. Дальнейшее улучшение их характеристик может быть достигнуто путем совершенствования техники формирования обратной связи и разработки ее новых видов. Цель работы – *исследование синхронизированного на основном тоне одноконтурного LC-автогенератора с обратной связью, пропорциональной производной сдвига фазы, предлагаемой в качестве нового технического решения.*

Формирование обратной связи

Схема синхронизированного автогенератора с обратной связью представлена на рис. 1. В ее состав входят фазовый детектор *1*, дифференцирующее устройство *2*, масштабный усилитель *3*, фазовый модулятор *4*, автогенератор *5*. Допустим, что внешний сигнал синхронизации описывается выражением $u_s = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s)$, а сигнал автогенератора может быть представлен соотношением $u = A\cos(\omega_s t + \varphi)$. Тогда в процессе формирования обратной связи в фазовом детекторе *1* выделяется сдвиг фазы между сигналом автогенератора и внешним сигналом синхронизации. Выходное напряжение фазового детектора обрабатывается дифферен-цирующим устройством *2*, на выходе которого сигнал пропорционален производной сдвига фазы. Коэффициент передачи масштабного усилителя *3* выбирается таким, чтобы обеспечивалась нормаль-ная работа фазового модулятора *4*, с помощью ко-торого фаза внешнего сигнала синхронизации по-лучает дополнительный фазовый сдвиг $kd(\varphi - \varphi_s)/d\tau$. Выходной сигнал фазового модулятора является непосредственным сигналом синхронизации, который записывается в виде $u_d = A_d \cos(\omega_s t + \psi)$ где $\psi = \varphi_s + kd(\varphi - \varphi_s)/d\tau$. Этот сигнал и синхронизирует колебания автогенератора *5* на основном тоне.

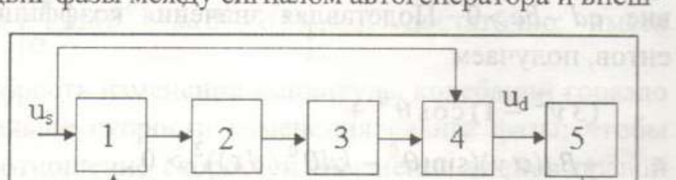

Рис. 1

Математическая модель синхронизированного автогенератора с обратной связью, пропорциональной производной сдвига фазы

Допустим, что в качестве автогенератора используется одноконтурный *LC*-автогенератор с трансформаторной обратной связью (рис. 2). Промежуточные соотношения и конечный результат не изменятся существенно, если исходить из иной схемы. Непосредственный сигнал синхронизации в виде тока $i_s = I_s \cos(\omega_s t + \psi)$ подается в контур ав-

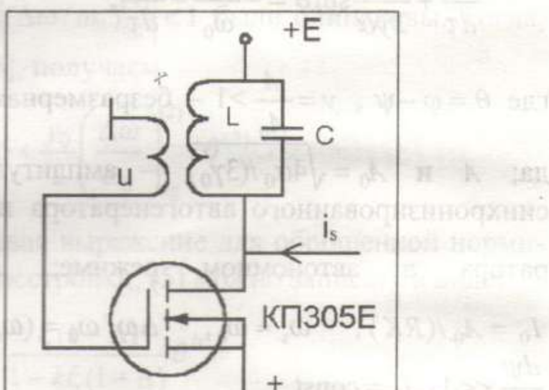

Рис. 2

тогенератора. Нелинейная характеристика его усилительного элемента считается безынерционной и аппроксимируется полиномом $i = a_0 + a_1 u_c + a_2 u_c^2 + a_3 u_c^3 + a_4 u_c^4$ где $u_c = u + u_0$, u_0 –смещение, u – напряжение на входе этого усилительного элемента. Тогда, как известно, процессы в автогенераторе описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega_s}(1 - 2\beta u - 3\gamma u^2 - 4\delta' u^3)\frac{du}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2} u = KR\delta \frac{\omega_0}{\omega_s}\frac{di_s}{d\tau},$$

где $\tau = \omega_s t$, $\varepsilon = \delta\alpha$ – малый параметр, $\alpha = (KR\alpha_0 - 1)$, $\beta = \beta_0 / \alpha_0'$, $\gamma = \gamma_0 / \alpha_0'$, $\delta' = \delta_0 / \alpha_0'$, $\alpha_0 = a_1 + 2a_2 u_0 + 3a_3 u_0^2 + 4a_4 u_0^3$, $\beta_0 = a_2 + 3a_3 u_0 + 6a_4 u_0^2$, $\gamma_0 = a_3 + 4a_4 u_0$, $\alpha_0' = -\alpha_0 + 1/(KR)$, $\delta_0 = a_4$, $\delta = 1/Q$; ω_0, R, Q – резонансные частота, сопротивление и добротность контура; $K = M / L$ – коэффициент положительной обратной связи; L, M – индуктивность контура и взаимная индуктивность.

Допустим, что автогенератор уже синхронизирован и мы имеем дело с изменением только частоты и фазы сигнала синхронизации, а добротность контура автогенератора достаточно высока и можно считать амплитуду и фазу колебаний медленно меняющимися функциями. В этом случае, используя метод усреднения, получаем укороченные уравнения:

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2}(y^2 - 1)y = \frac{\varepsilon B}{2\alpha}\cos\theta,$$
$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2y\alpha}\sin\theta = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{d\psi}{d\tau} \qquad (1)$$

где $\theta = \varphi - \psi$, $y = \frac{A}{A_0} > 1$ – безразмерная амплитуда; A и $A_0 = \sqrt{4\alpha_0 / (3\gamma_0)}$ – амплитуда сигнала синхронизированного автогенератора и автогенератора в автономном режиме; $B = \frac{I_s}{I_0} << 1$, $I_0 = A_0 / (RK)$, $\omega_s \approx \omega_0$, $\Delta\omega / \omega_0 = (\omega_s - \omega_0) / \omega_0$, $\frac{d\psi}{d\tau} << 1$, $I_s = \text{const}$.

Вводя новую переменную $\theta^0 = \varphi - \varphi_s$, ($\theta = \theta^0 - kd\theta^0 / d\tau$) в систему (1), имеем:

$$\frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2}(y^2 - 1)y = \frac{\varepsilon B}{2\alpha}\cos(\theta^0 - kd\theta^0 / d\tau),$$
$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2y\alpha}\sin(\theta^0 - kd\theta^0 / d\tau) = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{d\varphi_s}{d\tau}. \qquad (2)$$

Данная система нелинейных дифференциальных уравнений является математической моделью синхронизированного на основном тоне одноконтурного автогенератора с обратной связью, пропорциональной производной сдвига фазы.

Устойчивость колебаний в синхронизированном автогенераторе с обратной связью

Устойчивость стационарных колебаний исследуем первым методом Ляпунова. Исходя из (2), в соответствии с известным алгоритмом приходим к уравнениям для малых возмущений амплитуды δy и фазы $\delta\varphi$:

$$\frac{d(\delta y)}{d\tau} = a\delta y + b(\delta\varphi - k\frac{d(\delta\varphi)}{d\tau}),$$
$$\frac{d(\delta\varphi)}{d\tau} = (c\delta y + d(\delta\varphi)) / (1 + kd),$$

где $a = -\frac{\varepsilon}{2}(3y^2 - 1)$, $b = -\frac{\varepsilon B}{2\alpha}\sin\theta^0$, $c = \frac{\varepsilon B}{2y^2\alpha}\sin\theta^0$, $d = \frac{\varepsilon B}{2y\alpha}\cos\theta^0$. Эта система позволяет получить характеристическое уравнение в виде: $(1 + kd)\lambda^2 - [d + a(1 + kd) - kbc]\lambda + ad - bc = 0$. Тогда, как известно, колебания устойчивы, если выполняются три условия: $(1 + kd) > 0$, $-[d + a(1 + kd) - kbc] > 0$, $ad - bc > 0$. Первое условие выполняется всегда, если $k < (2y\alpha) / (\varepsilon B)$; второе можно записать иначе $[\varsigma\cos\theta^0 - 1] < 0$, если учесть, что $\frac{B}{\alpha} << 1$, $y \approx 1$, и представить выражение для k в виде $k = \varsigma(2y\alpha) / (\varepsilon B)$, $\varsigma < 1$. Данное условие также выполняется при любых значениях аргумента тригонометрической функции. И, наконец, третье условие $ad - bc > 0$. Подставляя значения коэффициентов, получаем

$$(3y^2 - 1)\cos\theta^0 + B / (\alpha y)(\sin(\theta^0 - kd\theta^0 / d\tau))^2 > 0.$$

Нетрудно видеть, что при ограничениях $\frac{B}{\alpha} << 1$ и $y = 1$ оно также выполняется, если

$\frac{-\pi}{2} \le \theta^0 \le \frac{\pi}{2}$, и колебания при этом будут устойчивы.

Решение укороченных уравнений

Система уравнений (2) является системой существенно нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых традиционными аналитическими методами найти не представляется возможным. Используем для этого метод аппроксимации, предложенный в [5], и приведем замечания для его обоснования. В его основу положена одна из тенденций развития методов теории нелинейных колебаний – учет особенностей исследуемых схем. Так, наличие колебательной системы с высокой добротностью позволило Ван дер Полю пренебречь высшими производными медленно меняющихся функций–амплитуды и фазы колебаний и получить укороченные уравнения. Теперь предлагается учесть особенность работы синхронизированного автогенератора, состоящую в том, что практически можно считать, что амплитуда колебаний устанавливается мгновенно по сравнению со сдвигом фазы, т. е. амплитуда колебаний для любого мгновенного значения сдвига фазы может быть найдена из первого уравнения (2), полагая $dy/d\tau = 0$. Для объяснения этого явления перепишем его в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{2}(y^2-1)y + \frac{\varepsilon B}{2\alpha}\cos(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau),. \qquad (3)$$

Изменение члена, содержащего функцию cos, отслеживается другим членом правой части этого уравнения. В стационарном состоянии они компенсируют друг друга. При переходном процессе скорость изменения первого члена описывается выражением $\varepsilon/2(3y^2-1)dy/d\tau$, второго $\varepsilon B/(2\alpha)\sin(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau)d(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau)/d\tau$. Поскольку $\frac{B}{\alpha} \ll 1$, а $y \approx 1$, $(3y^2-1) \gg \left|\frac{B}{\alpha}\sin(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau)\right|$, и достаточно иметь скорость изменения амплитуды колебаний гораздо меньше скорости изменения сдвига фазы, чтобы соотношение скоростей изменения членов правой части уравнения (3) обеспечивало практически взаимную их компенсацию при переходном процессе. Тогда решению подлежит система

$$y^3 - y = \frac{B}{\alpha}\cos(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2y\alpha}\sin(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau) = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{d\varphi_s}{d\tau}. \qquad (4)$$

Перепишем второе уравнение (4) в виде

$$\sin(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau) = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{ng} y,$$

где $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{ng} = \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_g \frac{2\alpha}{\varepsilon B}$ – нормированная обобщенная расстройка, а $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_g = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{d\varphi_s}{d\tau} + \frac{d\theta^0}{d\tau}$ – эквивалентная расстройка. Так как функция $\sin(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau)$ в полосе синхронизации меняется в пределах от –1 до +1, а $y = 1$ на концах ее, то $-1 \le (\Delta\omega/\omega_0)_{ng} \le 1$. Теперь запишем (4) иначе:

$$y^3 - y = \frac{B}{\alpha}\cos(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau),$$

$$\sin(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau) = \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{ng} y.$$

Используем ее для построения фазовой характеристики автогенератора $\theta = \theta^0 - kd\theta^0/d\tau = f((\Delta\omega/\omega_0)_{ng})$, которую аппроксимируем линейной функцией (5), где y_0 определяется из первого уравнения системы (4), если $\cos(\theta^0 - kd\theta^0/d\tau) = 1$:

$$\theta^0 - kd\theta^0/d\tau = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_{ng} \frac{y_0}{1-\Delta}. \qquad (5)$$

Параметр Δ подбираем таким образом, чтобы абсолютные величины погрешностей аппроксимации в точке $(\Delta\omega/\omega_0)^{(1)}_{ng} = 0$ и в некоторой другой точке $\left|(\Delta\omega/\omega_0)^{(2)}_{ng}\right| < 1$ были одинаковы. Тогда, согласно [5], получаем

$$\Delta = 0{,}5 + \frac{y_0}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{(2)}_{ng} / \theta^{(2)}.$$

Учитывая выражение для обобщенной нормированной расстройки, (5) можно записать в виде:

$$\frac{d\theta^0}{d\tau} + \frac{\xi(1-\Delta)}{1-k\xi(1-\Delta)}\theta^0 = -\frac{1}{1-k\xi(1-\Delta)}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{d\varphi_s}{d\tau}\right), \qquad (6)$$

где $\xi = \varepsilon B/(2\alpha y_0)$. Допустим $\varphi_s = \text{const}$, а $\theta^0_{(0)} = 0$. Тогда

$$\theta^0_{(\tau)} = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\frac{1}{\xi(1-\Delta)}(1\exp(\frac{\xi(1-\Delta)}{1-k\xi(1-\Delta)}\tau)) .(7)$$

Легко видеть, что при отсутствии обратной связи

$$\theta^0_{(\tau)} = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\frac{1}{\xi(1-\Delta)}(1-\exp(-\xi(1-\Delta)\tau)) .$$

Из полученных выражений ясно, что обратная связь, пропорциональная производной сдвига фазы, уменьшает длительность процесса установления сдвига фазы при соответствующем выборе величины коэффициента k, оставляя при этом неизменным значение этого сдвига в стационарном режиме, в отличие от фазовой обратной связи, представленной в [5], где он уменьшается.

Эксперимент

В качестве эксперимента использовалось численное интегрирование уравнений синхронизированного автогенератора с обратной связью, схема которого представлена на рис. 1. Параметры собственно LC-автогенератора, изображенного на рис. 2, следующие: $f_0 = 50$ кГц, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $\varepsilon = 1{,}702\cdot10^{-3}$, $y_0 = 1{,}061$, $K = 0{,}16$, $A_0 = 0{,}9$ В, $Q = 47$, $R = 7{,}5\cdot10^3\,\Omega$, $u_0 = 1$ В, $I_s = 8\cdot10^{-6}\,A$, $\alpha = 0{,}08$, $\xi = 1{,}07\cdot10^{-4}$, $\frac{B}{\alpha} = 0{,}1335$; нелинейную характеристику усилительного элемента автогенератора аппроксимируем полиномом $i = 1{,}538 + 1{,}302u_c - 0{,}356u_c^2 - 0{,}502u_c^3 - 0{,}098u_c^4$, мА. Рабочий диапазон симметричен $(\Delta\omega/\omega_0)^{(2)}_{ng} = \pm0{,}8$, тогда $\theta^{(2)} = \pm0{,}9723$ и $\Delta = 0{,}06549$, $k = 1/(2\xi)$. Изменения сдвига фазы колебаний автогенератора с обратной связью, рассчитанные по (2) (толстая кривая) и (7) (тонкая кривая), показаны на рис. 3. Здесь $\varphi_s = \text{const}$, $\theta^0_{(0)} = 0$, $(\Delta\omega/\omega_0) = -0{,}9089\cdot10^{-4}$, а вместо независимой переменной τ для удобства введена новая переменная $\xi\tau$. Близкое расположение этих кривых говорит о хорошей точности аппроксимации системы нелинейных уравнений (2) линейным уравнением (6) и о малом влиянии процесса установления амплитуды колебаний.

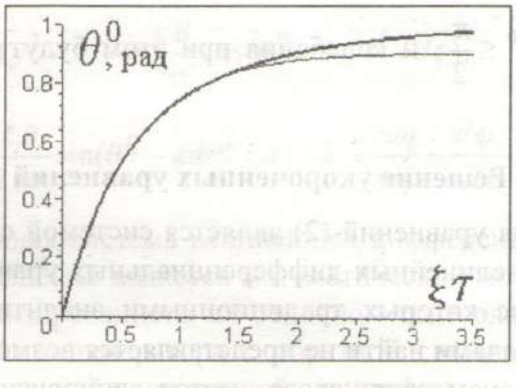

Рис. 3

Предложен синхронизированный на основном тоне одноконтурный LC-автогенератор с обратной связью, пропорциональной производной сдвига фазы колебаний автогенератора. Показано, что эта обратная связь может существенно уменьшить длительность переходного процесса установления сдвига фазы колебаний, не влияя при этом на его значение в стационарном режиме. Использованный метод решения укороченных уравнений – метод линейной аппроксимации, в отличие от численного, позволяет существенно упростить анализ синхронизированных автогенераторов и особенно их систем и получать требуемые зависимости в виде простых аналитических выражений. Это дает возможность, например, не только производить качественный анализ, но и создавать простые и достаточно точные методики проектирования синхронизированных LC-автогенераторов. Следует отметить, что данная обратная связь уменьшает длительность процесса установления сдвига фазы, не меняя других параметров автогенератора, что упрощает его применение.

Литература

1. *Daikoku, K., Mizushima, Y.* Properties of Injection Locking in Linear Oscillator. – International Journal of Electronics, 1971, vol. 31, March.
2. *Isobe, T., Tokida, M.* Power Amplification for FM and PM Signals with Synchronized IMPATT Oscillators. – IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1970, vol. MTT-18, Nov.
3. *Фомин Н.* Теория синхронизации генераторов СВЧ на приборах с отрицательным сопротивлением. – М.: Наука, 1992.
4. *Hunton, R., Weiss, A.* Synchronization of Oscillators. – Proc. of the IRE., 1947, Dec.
5. *Rapin, V.* Synchronized oscillators with the phase negative feedback. – IEEE Trans. Circuits and Systems, 2002, vol. CAS-49, № 8.

Поступила после доработки 14 января 2003 г.