О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ В R^n В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Яковлев С.В.[2], *Пичугина О.С.*[1]
[1] – *Харьковский национальный университет радиоэлектроники*
[2] – *Харьковский национальный университет внутренних дел*

В докладе вводятся понятия множественного, функционального и функционально-множественного представлений точек евклидового пространства, приводится классификация и области применения в задачах дискретной оптимизации.

Пусть E – некоторое дискретное множество точек R^n:

$$E \subseteq R^n. \tag{1}$$

Назовем <u>множественным представлением</u> E.

<u>Функциональным</u> назовем представление множества E при помощи функциональных зависимостей вида

$$f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'}, \tag{2}$$

$$f_{j+m'}(x) \le 0,\ j \in J_{m''}, \tag{3}$$

$$m = m' + m''.$$

Введем обозначения:

$$M = \bigcap_{j \in J_m} M_j, \tag{4}$$

$$M_j = \left\{x \in R^n : f_j(x) = 0\right\},\ j \in J_{m'}, \tag{5}$$

$$M_{j+m'} = \left\{x \in R^n : f_j(x) \le 0\right\},\ j \in J_{m''}, \tag{6}$$

Введем понятие <u>функционально-множественного представления :</u>

$$E = \{x \in E^* \subseteq R^n : f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'};\ f_{j+m'}(x) \le 0,\ j \in J_{m''}\}. \tag{7}$$

К примеру, для сферы $S_r(a)$ радиуса r с центром в точке a:

1. множественное представление – совокупность точек R^n, удаленных на r от точки a;
2. функциональное представление – $S_r(a) = \{x \in R^n : (x-a)^2 = r^2\}$.

Осуществим классификацию функциональных представлений в зависимости от свойств функций -(3):

3. непрерывные;
4. дифференцируемые;
5. выпуклые.

Соответственно функциональные представления назовем

6. <u>строгим</u> если $m' = m$, иначе <u>нестрогим</u> ;
- <u>неизбыточным</u>, если извлечение из (2) любого условия нарушает (4), т.е. $\forall j \in J_m : M \setminus M_j \ne E$, иначе – <u>избыточным</u>;
- <u>ограниченным</u>, если по крайней мере одно из множеств (5)-(6) является ограниченным, т.е.

$$\exists i \in J_m,\ r_i \in R,\ a^i \in R^n : M_i \subseteq C_{r_i}(a^i), \quad (8)$$

где $C_r(a) = \text{conv } S_r(a)$ – шар, иначе ФП <u>неограниченное;</u>

- <u>касательным</u>, если E является подмножеством точек касания поверхностей (5), удовлетворяющих (2), иначе <u>пересекающимся</u> .

Функциональные представления существуют как для континуальных, так и для дискретных множеств. Так, например, для множества B_n булевых векторов в R^n

Множественное представление:

$$B_n = \{x \in R^n : x_i \in \{0,1\},\ i \in J_n\}; \quad (9)$$

Функциональное представление:

$$B_n = \{x \in R^n :\ x_i^2 - x_i = 0,\ i \in J_n\}; \quad (10)$$

Функционально-множественное представление:

$$B_n = \{x \in \Pi_n :\ \sum_{i=1}^{n}(1 - \cos(2\pi x_i)) = 0\}, \quad (11)$$

$$\Pi_n = \{x \in R^n :\ \bar{0} \le x \le \bar{1}\}. \quad (12)$$

<u>**Теорема.**</u> Система

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{n}{4},\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{2})^4 = \frac{n}{16} \quad (13)$$

задает касательное непрерывное представление множества B_n.

Рассмотрим дискретное множество вершин n – мерного параллелепипеда

$$E = B_n(a,b) = \text{conv}P,\ P = \Pi_n(a,b) = \{x \in R^n : a \le x \le b,\ a < b\}. \quad (14)$$

Обобщим приведенные ниже представления.

<u>**Утверждение**</u>. Следующие системы являются представлениями $B_n(a,b)$:

$$B_n(a,b) = \{x \in R^n : x_i \in \{a_i, b_i\},\ i \in J_n\};$$

$$B_n(a,b) = \{x \in R^n :\ (x_i - a_i)\cdot(x_i - b_i) = 0,\ i \in J_n\};$$

$$B_n(a,b) = \{x \in \Pi_n(a,b) :\ \sum_{i=1}^{n}(1 - \cos(2\pi \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i})) = 0\}.$$

Пусть E – дискретное множество (конечное или счетное), $N = |E|$.

Множественное и функционально-множественное представление E могут быть:

7. точечное $E = \{x_i \in R^n\}_{i \in J_N}$;
8. континуальное $E = \bigcap_i E_i,\ \{E_i\}_i \subseteq R^n$ – континуальные;
9. смешанное (точечно-континуальное) (например $E = E' \cap E'',\ E' = Z^n$ - точечное, $E'' = C_r(a)$ – континуальное).

Каждое из представлений дискретных множеств имеет свои преимущества.

В докладе приводятся приложения указанных представлений в задачах дискретной оптимизации.