УДК519.7

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ ЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦ В ВИДЕ БИНАРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПРЕДИКАТОВ

ГВОЗДИНСКИЙ А.Н., ЯКИМОВА Н.А., ГУБИН В.А.

Показывается возможность представления логических матриц с использованием аппарата дискретной математики, а именно бинарных предикатов. Описываются основные операции над логическими матрицами, которые рассматриваются как некий предикат.

Актуальность исследования определяется тем, что устоявшиеся представления о математической логике как о науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становятся слишком узкими [1]. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача – структурное моделирование таких систем.

Состояние проблемы. Человеческий язык, как явление дискретное, естественно, должен описываться средствами дискретной математики. Между тем, выбор средств указанного типа весьма ограничен. Это языки программирования для ЭВМ, логические исчисления, языки теории алгоритмов, аппарат теории графов. При попытке использования языков программирования или языков теории алгоритмов приходится столкнуться со следующим препятствием. Эти языки, как известно, предназначены для описания алгоритмов, т.е. процедур с однозначным исходом. Между тем, естественный язык многозначен, что проявляется, например, в виде омографичности слов, т.е. в неоднозначности их смысла. Языки программирования и теории алгоритмов – это такие языки, которые могут описывать только однозначные функции, естественный же язык требует формальных средств для описания многозначных функций.

Сущность исследования. Для описания естественного человеческого языка лучше всего подошел бы аппарат уравнений, подобный аппарату, используемому в математическом анализе, но отличающийся от последнего тем, что он предназначен для формализации не непрерывных, а дискретных процессов. Такой язык дают логические исчисления, а именно: исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако чтобы иметь возможность эффективно решать указанные уравнения, необходимо довести эти исчисления до уровня алгебраической системы [2, с.54].

В работах [3, 4] вводится понятие логической матрицы, заданной над скалярным логическим полем K={0, 1} или над скалярным полем предикатов произвольной арности. Рассмотрены также основные операции над такими логическими матрицами. Однако булеву модель можно свести к предикатной не только в том случае, если рассматривать элементы скалярного поля K={0, 1} как предикаты нулевой арности. Этого можно добиться, если рассматривать как некоторый предикат всю матрицу, а не отдельные ее элементы. В данной статье исследуется именно такое представление булевых логических матриц и описываются основные операции над логическими матрицами, которые рассматриваются как некий предикат.

Целью исследования является поиск принципиальной возможности использования и представления различных типов логико-алгебраических моделей в форме булевых логических матриц в виде бинарных предикатов.

Постановка задачи и подходы к ее решению. Представим логическую матрицу A как бинарный предикат. Возьмем матрицу A, представленную предикатом, который определяется табл. 1.

Таблица 1

x \ y	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	1	0	0	1
3	0	0	0	1
4	1	1	1	0

Предикат A(x, y) задан на декартовом произведении mŕn, где m=1,…, 4, n=1,…, 4, и определяется формулой: A(x, y)=

$$=x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^1 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \vee x^4y^1 \vee x^4y^2 \vee x^4y^3.$$

В случае разбиения матрицы A ее блоки тоже можно рассматривать как бинарные предикаты. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

ее блоки могут иметь следующий вид:

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix},\ A_{21}=(1\ \ 1),\ A_{22}=(1\ \ 0).$$

Им будут соответствовать следующие предикаты, определенные на декартовых произведениях $\{1, 2, 3\}\times\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}\times\{3, 4\}$, $\{4\}\times\{1, 2\}$, $\{4\}\times\{3, 4\}$ соответственно (табл. 2,3).

Таблица 2

y \ x	1	2
1	0	0
2	1	0
3	0	0

Таблица 3

y \ x	3	4
1	1	1
2	0	1
3	0	1

Выражаться эти предикаты будут следующими формулами:

$A_{11}(x, y)=x^2y^1$, $A_{12}(x, y)=x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4$,

$A_{21}(x, y)=x^4y^1 \vee x^4y^2$, $A_{22}(x, y)=x^4y^3$.

Таблица 4

y \ x	1	2
4	1	1

Таблица 5

y \ x	3	4
4	1	0

В этом случае рассматриваемая блочная матрица может быть записана в виде:

$$A=\begin{pmatrix} x^2y^1 & x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^3 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ блоки могут определяться предикатами

$B_{11}=x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 \vee x^3y^2$, $B_{12}=x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4$,

$B_{21}=x^4y^1 \vee x^4y^2$, $B_{22}=x^4y^3$,

определенными на тех же декартовых произведениях, что и соответствующие блоки матрицы A. Запишем матрицу B в блочном виде с помощью бинарных предикатов:

$$B=\begin{pmatrix} x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 \vee x^3y^2 & x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $C=A \vee B$ будет иметь вид:

$$C=\begin{pmatrix} (x^2y^1) \vee (x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 \vee x^3y^2) & (x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4) \vee (x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4) \\ (x^4y^1 \vee x^4y^2) \vee (x^4y^1 \vee x^4y^2) & (x^4y^3) \vee (x^4y^3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 \vee x^3y^2 & x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти конъюнкцию матриц A и B, конъюнкцию соответствующих бинарных предикатов следует проводить по следующему правилу: операция конъюнкции проводится только над теми дизъюнкциями предикатов, у которых совпадают индексы при переменных. Другими словами, при операции дизъюнкции каждый из дизъюнктов блоков матриц A и B являлся дизъюнктом результирующего предиката, если он был дизъюнктом хотя бы одного из дизъюнктируемых блоков. При операции конъюнкции необходимо его вхождение в оба конъюнктирумых предиката. Таким образом, матрица $C=A \wedge B$ будет иметь следующий вид:

Как и в случае дизъюнкции блочных логических матриц A и B, блоки их конъюнкции также будут представлены бинарными предикатами, определенными на тех же декартовых произведениях, что и соответствующие блоки матриц A и B.

Для того чтобы построить отрицание булевой блочной логической матрицы, представленной бинарными предикатами, нужно в каждом ее блоке заменить представляющий его предикат на такой, дизъюнктами которого будут пары, не вошедшие в соответствующий блок матрицы A и определенные на том же декартовом произведении. При этом вошедшие в исходный бинарный предикат дизъюнкты следует исключить. Таким образом, отрицание блочной булевой матрицы A запишется в виде:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^2 \vee x^3y^1 \vee x^3y^2 & x^2y^3 \vee x^3y^3 \\ 0 & x^4y^4 \end{pmatrix},$$

где блок $A_{21}=0$ будет нулевым.

Умножение на логический скаляр α булевой логической матрицы A, представленной бинарными предикатами, происходит таким же образом, как и умножение обыкновенной логической матрицы на скаляр [3]. Для блочной матрицы разбиение на блоки при этом также сохраняется [4]. Таким образом, матрица αA будет следующей:

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} x^2y^1 & x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha x^2y^1 & \alpha x^1y^3 \vee \alpha x^1y^4 \vee \alpha x^2y^4 \vee \alpha x^3y^4 \\ \alpha x^4y^1 \vee \alpha x^4y^2 & \alpha x^4y^3 \end{pmatrix}.$$

Умножение блочных булевых логических матриц, представленных бинарными предикатами, как и их конъюнкция и отрицание, аналогично тому, которое было введено для обыкновенных блочных логических матриц [4]. Другими словами, область определения переменной y для блока A_{ij} должна совпадать с областью определения переменной x блока B_{jk}. Только в этом случае над матрицами A и B можно проводить операцию умножения. Областью определения блока C_{ik} при этом будет декартово произведение области определения переменной x блока A_{ij} на область определения переменной y блока B_{jk}. В рассматриваемом примере для выполнения правила членения матриц для возможности их перемножения матрицу B необходимо переразбить следующим образом:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 & x^1y^4 \vee x^2y^4 \\ x^3y^2 \vee x^4y^1 \vee x^4y^2 \vee x^4y^3 & x^3y^4 \end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix} (x^2y^1) \wedge (x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 \vee x^3y^2) & (x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4) \wedge (x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4) \\ (x^4y^1 \vee x^4y^2) \wedge (x^4y^1 \vee x^4y^2) & (x^4y^3) \wedge (x^4y^3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^2y^1 & x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^3 \end{pmatrix}.$$

Области определения ее блоков при таком разбиении будут следующими: для B_{11} $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$, для B_{12} – $\{1, 2\} \times \{4\}$, для B_{21} – $\{3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$, для B_{22} – $\{3, 4\} \times \{4\}$. В этом случае блок C_{11} в качестве области определения будет иметь декартово произведение $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, блок C_{12} – декартово произведение $\{1, 2, 3\} \times \{4\}$, блок C_{21} – декартово произведение $\{4\} \times \{1, 2, 3\}$, блок C_{22} – декартово произведение $\{4\} \times \{4\}$. Таким образом, матрица C=AB будет выглядеть следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix} x^2y^1 & x^1y^3 \vee x^1y^4 \vee x^2y^4 \vee x^3y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^3 \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^2y^1 & x^1y^4 \vee x^2y^4 \\ x^3y^2 \vee x^4y^1 \vee x^4y^2 \vee x^4y^3 & x^3y^4 \end{pmatrix}.$$

Умножение соответствующих предикатов в данном случае также происходит не в общепринятом смысле. Каждый дизъюнкт первого предиката умножается только на те дизъюнкты второго, у которых индекс переменной x совпадает с индексом переменной y первого предиката. Результатом такого умножения станет произведение переменной x, которой приписан индекс из дизъюнкта первого предиката, на переменную y из дизъюнкта второго предиката также с приписанным ей индексом. Выполняя это правило, получаем матрицу C из рассматриваемого примера:

$$C=$$
$$\begin{pmatrix} x^1y^1 \vee x^1y^2 \vee x^1y^3 \vee x^2y^1 \vee x^2y^2 \vee x^2y^3 \vee x^3y^1 \vee x^3y^2 \vee x^3y^3 & x^1y^4 \vee x^2y^4 \\ x^4y^1 \vee x^4y^2 & x^4y^4 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим теперь операцию транспонирования блочных булевых логических матриц. В отличие от транспонирования обычных логических матриц, кроме обычного транспонирования, т.е. замены строк столбцами, происходит еще транспонирование самих элементов, которые также представляют собой логические матрицы. Другими словами, транспонированная матрица будет иметь вид: $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T \ldots A_{m1}^T \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}^T \ldots A_{mn}^T \end{pmatrix}$.

В случае поля K=$\{0, 1\}$ и в случае поля предикатов произвольной арности операция транспонирования блочной логической матрицы представляется очевидной. Если же матричные блоки представлены бинарными предикатами, транспонирование самих блоков происходит по следующему правилу: каждый дизъюнкт бинарного предиката, представляющего некоторый блок транспонируемой логической матрицы A, заменяется на такой, где индексы при переменных x и y поменяются местами. При этом области определения каждого блока также поменяются на противоположные, т.е. если некоторый блок A_{ij} матрицы A был определен на декартовом произведении nґm, то блок A_{ji}^T будет определен на декартовом произведении mґn. Таким образом, матрица, транспонированная по отношению к рассматриваемой матрице A, будет иметь следующий вид:

$$A^T=\begin{pmatrix} x^1y^2 & x^1y^4 \vee x^2y^4 \\ x^3y^1 \vee x^4y^1 \vee x^4y^2 \vee x^4y^3 & x^3y^4 \end{pmatrix},$$

блок A_{11}^T которой определен на декартовом произведении $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$, блок A_{21}^T – на декартовом произведении $\{3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$, блок A_{12}^T – на декартовом произведении $\{1, 2\} \times \{4\}$, блок A_{22}^T – на декартовом произведении $\{3, 4\} \times \{4\}$.

Выводы. Разработаны, обоснованы и исследованы новые подходы интерпретации алгебры булевых функций, алгебры конечных предикатов к алгебре предикатных операций как абстрактному эквиваленту этих алгебр. *Научной новизной* приведенных в статье материалов является разработка и обоснование возможности использования математического аппарата логической алгебры в виде бинарных предикатов для формализации текстовой информации в системах искусственного интеллекта. *Практическим значением* полученных теоретических результатов является то, что изложенный подход позволяет разрабатывать и проектировать информационные системы и системы искусственного интеллекта. На базе предложенных результатов может быть создан универсальный естественно-языковой интерфейс.

Литература: **1.** *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера. Киев: Техника, 1975. 768с. **2.** *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Харьков: Вища школа. 144с. **3.** *Гвоздинская-Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических матрицах // Проблемы бионики. Вып. 48. С.12-22. **4.** *Гвоздинский А.Н., Якимова Н.А.* Булевы и предикатные блочные логические матрицы //АСУ и приборы автоматики. Вып. 121. С.109-114.

Поступила в редколлегию 19.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Путятин В.П.

Гвоздинский Анатолий Николаевич, канд. техн. наук, профессор кафедры искусственного интеллекта ХНУРЕ. Научные интересы: оптимизация процедур принятия решений в сложных системах управления. Адрес: Украина, 61166, Харьков, ул. акад. Ляпунова 7, кв. 9, тел. 702-38-23.

Якимова Наталья Анатольевна, канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики Одесского национального университета. Научные интересы: искусственный интеллект, логическая алгебра. Адрес: Украина, 65121, Одесса-121, пр. Маршала Жукова, 10/5, кв.25.

Губин Вадим Александрович, ст. преподаватель кафедры искусственного интеллекта ХНУРЕ. Научные интересы: интеллектуальный анализ текстовых данных. Адрес: Украина, 61054, Харьков, ул. Гв. Широнинцев, 23, кв.286, тел. 710-64-12.