УДК 51 : 65.012.122

О. К. ИЛЮНИН, Б. В. НОВИКОВ

О ТРАНЗИТИВНЫХ МОДИФИКАЦИЯХ МАЖОРИТАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

В работе Б. Г. Миркина* сформулирована следующая задача: дать алгоритм построения транзитивной модификации мажоритарного отношения для линейных квазипорядков (если оно существует) при четном числе экспертов.

---

* В работе Б. Г. Миркина «Проблема группового выбора» (М., «Наука», 1974) модификация мажоритарного отношения называется модифицированным мажоритарным отношением. Нам удобнее пользоваться первым термином.

Рассмотрим некоторые свойства мажоритарного отношения, с помощью которых строится алгоритм нахождения транзитивной модификации. Терминология, используемая ниже, взята из названной работы.

Пусть M — множество сравниваемых объектов, R_i, $\ldots$, R_n — индивидуальные отношения предпочтения экспертов (n четно), являющиеся линейными квазипорядками; R — мажоритарное отношение, P — пересечение всех модификаций отношения R.

Для объектов $a, b \in M$ обозначим через $n(a, b)$ число отношений R_i, для которых aR_ib. Таким образом, $aRb \leftrightarrow n(a, b) \geqslant n/2$, $aPb \leftrightarrow n(a, b) > n/2$.

В дальнейшем мы будем использовать следующее отношение: $T_{ab} = \Delta U(a, b)$, где Δ — диагональ декартова квадрата $M \times M$ и $a, b \in M$.

Для произвольного бинарного отношения A через $\overline{A}$ обозначается его дополнение, через A^{τ} — его транзитивное замыкание.

Лемма. *Пусть A — произвольный квазипорядок. Тогда для любых $a, b \in M$*

$$(A \cup T_{ab})^{\tau} = AT_{ab}A.$$

Доказательство. Покажем сначала, что отношение $AT_{ab}A$ является квазипорядком. Действительно, $\Delta \subseteq A \cap T_{ab}A$, откуда следует рефлексивность отношения $AT_{ab}A$. Докажем, что $AT_{ab}A$ транзитивно. Пусть $(x, y) \in AT_{ab}A$ и $(y, z) \in AT_{ab}A$. Тогда найдутся такие $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in M$, что $xA\alpha$, $yA\gamma$, $\alpha T_{ab}\beta$, $\gamma T_{ab}\delta$, βAy, δAz. Из $\alpha T_{ab}\beta$ следует $\alpha = \beta$ или $\alpha = a$, $\beta = b$. В первом случае $xA\gamma$, $\gamma T_{ab}\delta$, δAz, т. е. $(x, z) \in AT_{ab}A$. Точно так же $(x, z) \in AT_{ab}A$, если $\gamma = \delta$.

Предположим теперь, что $\alpha = \gamma = a$, $\beta = \delta = b$. Тогда xAa, bAz, откуда $(x, z) \in AT_{ab}A$, т. е. отношение $AT_{ab}A$ транзитивно.

В силу рефлексивности $A \cup T_{ab} \subseteq AT_{ab}A$, откуда $(A \cup T_{ab})^{\tau} \supseteq \supseteq AT_{ab}A$. С другой стороны,

$$(A \cup T_{ab})^{\tau} \subseteq (A \cup T_{ab})^3 = A^3 \cup A^2T_{ab}A \cup \\ \cup AT_{ab}^2 \cup \ldots \subseteq AT_{ab}A.$$

Таким образом, $(A \cup T_{ab})^{\tau} = AT_{ab}A$ и т. д.

Основным утверждением этой работы является следующая

Теорема. *Пусть Q — транзитивное отношение такое, что $P \subseteq \subseteq Q \subseteq R$ и $b\overline{Q}a (a, b) \in M)$. Тогда $(Q \cup T_{ab})^{\tau} \subseteq R$. (Заметим, что из bQa следует $b\overline{P}a$, т. е. $n(b, a) \leqslant n/2$, откуда $n(a, b) \geqslant n/2$ и $(a, b) \in R$).*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $(x, y) \notin R$, $(x, y) \in (Q \cup T_{ab})^{\tau}$ для некоторых объектов $x, y \in M$. По лемме $(x, y) \in QT_{ab}Q$, т. е. $xQ\alpha$, $\alpha T_{ab}\beta$, βQy для некоторых $\alpha, \beta \in M$.

Если $\alpha = \beta$, то $(x, y) \in Q \subseteq R$ (в силу транзитивности отношения Q) вопреки предположению. Поэтому $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, $\alpha = a$, $\beta = b$. Отсюда xQa и bQy. Если bQx, то, снова используя транзитивность отношения Q, получаем bQa, что противоречит условию теоремы. Поэтому $b\overline{Q}x$.

Так как мажоритарное отношение R линейно, то из $x\overline{R}y$ следует yRx. Поэтому $n(x, y) < n/2$, $n(y, x) > n/2$ и, следовательно, $x\overline{P}y$, $y\overline{P}x$ по определению отношения P. Так как $P \subseteq Q$, то yQx. Но bQy, откуда bQx. Противоречие. Следовательно, $(Q \cup T_{ab})^{\tau} \subseteq R$.

Доказанная теорема дает возможность построить следующий алгоритм нахождения транзитивной модификации мажоритарного отношения R.

На первом шаге находим транзитивное замыкание отношения P. Если $P^{\tau} \nsubseteq R$, то транзитивной модификации не существует (P является пересечением всех модификаций, поэтому P^{τ} содержится в пересечении всех транзитивных модификаций). В противном случае обозначаем $Q_1 = P^{\tau}$ и переходим ко второму шагу.

Пусть на i-м шаге ($i \geqslant 1$) получено транзитивное отношение Q_i, $P \leqslant Q_i \leqslant R$. Если aQ_ib или bQ_ia для каждой пары $(a, b) \in M \times M$, то Q_i является искомой транзитивной модификацией. Если же найдутся такие объекты $a, b \in M$, что $a\overline{Q}_ib$ и $b\overline{Q}_ia$, то переходим к $(i+1)$-му шагу, полагая $Q_{i+1} = (Q_i \cup T_{ab})^{\tau} = Q_iT_{ab}Q_i$. По теореме отношение Q_{i+1} содержится в R, будучи при этом отличным от Q_i.

Пример. Пусть 4 эксперта имеют следующие индивидуальные отношения предпочтения на множестве объектов $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R_1 : 2 = 3 > 1 > 4 > 5,$$
$$R_2 : 4 > 5 > 1 > 3 > 2,$$
$$R_3 : 3 > 2 > 5 > 4 > 1,$$
$$R_4 : 5 > 1 > 3 = 4 > 2.$$

Тогда отношения P и R задаются матрицами

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение P совпадает со своим квадратом, поэтому $Q_1 = P^{\tau} = P$. На втором шаге можно к Q_1 добавить пару (1, 2), так как $(1, 2) \notin P$ и $(2, 1) \notin P$. Получаем:

$$Q_2 = (P \cup T_{12})^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а третьем шаге присоединяем пару (1,3):

$$Q_3 = (Q_2 \cup T_{13})^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а четвертом (и последнем шаге) присоединяем пару (2, 4):

$$Q_4 = (Q_3 \cup T_{24})^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное отношение Q_4 и является искомой транзитивной одификацией мажоритарного отношения R.

Замечание 1. При нахождении транзитивной модификации а ЭВМ матрицу отношения $Q_i = (Q_{i-1} \cup T_{ab})^\tau$ удобно вычислять, спользуя лемму. Если $Q_i = (q^i_{\alpha\beta})^n_{\alpha,\beta=1}$, $T_{ab} = (t_{\alpha\beta})^n_{\alpha,\beta=1}$, то из сотношения $Q_i = Q_{i-1} T_{ab} Q_{i-1}$ получаем

$$q^i_{\alpha\beta} = \sum_{x,y=1}^{n} q^{i-1}_{\alpha x} t_{xy} q^{i-1}_{y\beta} = \sum_{x=1}^{n} q^{i-1}_{\alpha x} q^{i-1}_{x\beta} + q^{i-1}_{\alpha a} q^{i-1}_{b\beta}.$$

ак как $Q^2_{i-1} = Q_{i-1}$, то $\sum\limits_{x=1}^{n} q^{i-1}_{\alpha x} q^{i-1}_{x\beta} = q^{i-1}_{\alpha\beta}$, откуда получаем фор-улу для вычисления элементов матрицы Q_i:

$$q^i_{\alpha\beta} = q^{i-1}_{\alpha\beta} + q^{i-1}_{\alpha a} q^{i-1}_{b\beta}.$$

Замечание 2. Нельзя построить транзитивную модификацию, рисоединяя на каждом шагу сразу несколько пар. Так, в приеденном выше примере

$$(P \cup T_{13} \cup T_{25})^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \not\subseteq R.$$

Из теоремы и алгоритма непосредственно получается неободимое и достаточное условие существования транзитивной моификации, удобное для практических применений.

Следствие. Транзитивная модификация мажоритарного отошения R существует тогда и только тогда, когда $P^\tau \leqslant R$.