

УДК 621.396

А. Ф. МАСЛОВ, д-р техн. наук, К. П. НЕСТЕРОВ, А. Б. ЖОЛОБЕНКО

**МОДЕЛЬ ВЗАИМНО КОРРЕЛИРОВАННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ
НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ,
РАБОТАЮЩЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

При проведении исследований методом математического моделирования по оцениванию качества обнаружения и разделения сигналов, измерения амплитудно-фазовых распределений на выходах элементов антенной решетки (АР) возникает необходимость в сравнении алгоритмов адаптации в условиях одинакового влияния среды распространения радиоволн. Поэтому актуально моделирование радиосигналов с заданными статистическими характеристиками.

Предлагаемый способ моделирования случайных векторов в рамках корреляционной теории основывается на разложении случайных процессов в ряды по ортогональным дискретным многочленам Чебышева со случайными коэффициентами с последующим применением метода линейного преобразования. Он позволяет в процессе подготовительных вычислений уменьшить размерность системы нелинейных алгебраических уравнений по сравнению с [1], а также сократить число исходных независимых белых шумов в случае коррелированности волновых фронтов радиосигналов.

Рассмотрим линейную АР, содержащую $R + 1$ эквидистантно расположенных элементов, на выходах которых моделируется векторный процесс $\vec{y}(t)$ с компонентами

$$y(\alpha, t) = \sum_{i=1}^L S_i(\alpha, t) + \xi(\alpha, t), \quad (1)$$

где $S_i(\alpha, t)$ — i -й случайный радиосигнал,

$$S_i(\alpha, t) = X_i(\alpha, t) \cos(\Omega_i t + U_i(\alpha, t));$$

α — номер элемента АР, $\alpha = 0, \overline{R}$; $\xi(\alpha, t)$ — мешающее воздействие типа белый шум с характеристиками $\langle \xi(\alpha, t) \rangle = 0$,

$$\langle \xi(\alpha, t_1) \xi(\beta, t_2) \rangle = \frac{1}{2} N_0 \delta(\alpha - \beta) \delta(t_2 - t_1);$$

N_0 — спектральная плотность шумов в элементах АР. Параметры Ω_i — несущие частоты сигналов, полагаем известными. Отличие истинных значений частот упомянутых сигналов от Ω_i , причины появления которых достаточно подробно описаны в работе [2], будут учтены посредством введения случайных процессов $\omega_i(t)$. Угловые скобки означают операцию статистического усреднения.

Пусть флюктуации амплитуд и фаз сигналов моделируются некоторыми случайными процессами $f_i(\alpha, t)$ и $\varphi_i(\alpha, t)$ так, что

$$X_i(\alpha, t) = A_i (1 + m_i^A f_i(\alpha, t)), \quad A_i = \langle X_i(\alpha, t) \rangle;$$

$$U_i(\alpha, t) = \left(\alpha - \frac{R}{2} \right) u_i + \varphi_i(\alpha, t) + \varphi_i^*(t);$$

$$\langle U_i(\alpha, t) \rangle = \left(\alpha - \frac{R}{2} \right) u_i. \quad (2)$$

Здесь m_i^A — постоянные коэффициенты, $\varphi_i^*(t)$ — общее для всех элементов АР изменение фазы, вызванное нестабильностью частот генераторов опорных сигналов и изменением во времени коэффициента преломления среды, A_i, u_i — неизвестные, постоянные на интервале наблюдения амплитуда и направление прихода волнового фронта, $i = \overline{1, L}$.

Выполнение неравенств $1 > 3 m_i^A \sigma_i(\alpha)$, где $\sigma_i(\alpha)$ — среднеквадратическое отклонение случайного процесса $f_i(\alpha, t)$, обеспечивает пренебрежимо малую вероятность амплитудной перемодуляции. Случайные функции $f_i(\alpha, t)$, $\varphi_i(\alpha, t)$, $\varphi_i^*(t)$ полагаем гауссовскими марковскими процессами, заданными следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dt} f_i(\alpha, t) = -h_i^f f_i(\alpha, t) + n_i^f(\alpha, t);$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_i(\alpha, t) = -h_i^\varphi \varphi_i(\alpha, t) + n_i^\varphi(\alpha, t); \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_i^*(t) = h_i^* \omega_i(t) + n_i^*(t);$$

$$\frac{d}{dt} \omega_i(t) = -h_i^\omega \omega_i(t) + n_i^\omega(t). \quad (4)$$

Здесь $n_i^f(\alpha, t)$, $n_i^\varphi(\alpha, t)$, $n_i^*(t)$, $n_i^\omega(t)$ — представляют собой формирующие белые шумы с нулевыми средними и корреляционными функциями:

$$\begin{aligned} \langle n_i^f(\alpha, t_1) n_k^f(\beta, t_2) \rangle &= \frac{1}{2} r_{ik}^f(\alpha, \beta) \sqrt{N_i^f N_k^f} \delta(t_2 - t_1); \\ \langle n_i^\varphi(\alpha, t_1) n_k^\varphi(\beta, t_2) \rangle &= \frac{1}{2} r_{ik}^\varphi(\alpha, \beta) \sqrt{N_i^\varphi N_k^\varphi} \delta(t_2 - t_1); \\ \langle n_i^\omega(t_1) n_k^\omega(t_2) \rangle &= \frac{1}{2} r_{ik}^\omega \sqrt{N_i^\omega N_k^\omega} \delta(t_2 - t_1); \\ \langle n_i^*(t_1) n_k^*(t_2) \rangle &= \frac{1}{2} N_i^* \delta(t_2 - t_1), \quad i, k = \overline{1, L}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $r_{ik}^f(\alpha, \beta)$, $r_{ik}^\varphi(\alpha, \beta)$, r_{ik}^ω — коэффициенты корреляций амплитуд, фаз и частот соответственно, $r_{ik}^{(\cdot)} < 1$, $r_{ik}^{(\cdot)} = 1$ при $\alpha = \beta$ и $i = k$; $N_i^{(\cdot)}$ — спектральные плотности формирующих шумов. В выражениях (5) и (6) флюктуации амплитуд, фаз и частот выбраны некоррелированными между собой. Из уравнений (3) видно, что для формирования L фазовых фронтов с заданными законами флюктуаций фаз в элементах АР требуется $L(R+1)$ взаимно коррелированных белых шумов. Их можно получить из $L(R+1)$ независимых белых шумов путем линейного преобразования [1], элементы матрицы которого находятся в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений порядка $C_L^2 ((R+1)^2 + (R+1)(R+2))$ (C_L^2 — биномиальный коэффициент).

Полагаем, что случайные функции $f_i(\alpha, t)$, $\varphi_i(\alpha, t)$ для любого момента времени могут с достаточной точностью аппроксимироваться на конечной системе точек рядом ортогональных многочленов Чебышева $P_j(\alpha)$ [3] со случайными коэффициентами, причем в разложениях можно ограничиться числом слагаемых M_i , N_i соответственно:

$$\begin{aligned} f_i(\alpha, t) &\approx \sum_{j=0}^{M_i} \rho_j^f(t) P_j(\alpha); \\ \varphi_i(\alpha, t) &\approx \sum_{j=0}^{N_i} \psi_j^\varphi(t) P_j(\alpha), \quad M_i, N_i \leq R. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив в (3) (7), умножим правые и левые части уравнений на $P_j(\alpha)$. Просуммировав по α и воспользовавшись свойствами ортонормированных полиномов, получим модель для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_j^f(t) &= -h_i^f \rho_j^f(t) + n_j^{f_i}(t); \\ \frac{d}{dt} \psi_m^\varphi(t) &= -h_i^\varphi \psi_m^\varphi(t) + n_m^{\varphi_i}(t); \\ n_j^{f_i}(t) &= \sum_{\alpha=0}^R n_i^f(\alpha, t) P_j(\alpha); \\ n_m^{\varphi_i}(t) &= \sum_{\alpha=0}^R n_i^\varphi(\alpha, t) P_m(\alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

где $n_i^{p_i}(t)$, $n_m^{\psi_i}(t)$ — нормальные белые шумы с нулевыми средними и корреляционными функциями

$$\langle n_i^{p_i}(t_1) n_m^{p_k}(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{N_i^p N_k^p} \delta(t_2 - t_1) \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{ik}^p(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_m(\beta);$$

$$\langle n_j^{\psi_i}(t_1) n_m^{\psi_k}(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{N_i^\psi N_k^\psi} \delta(t_2 - t_1) \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{ik}^\psi(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_m(\beta). \quad (10)$$

Таким образом, в данной постановке задача моделирования амплитуд и фаз радиосигналов на выходах элементов АР сведена к задаче моделирования коэффициентов разложения, причем число их не превышает количества требуемых значений амплитуд и фаз.

Если $M_i = N_i = R$, аппроксимации (7) будут точными при любом наборе полиномов $P_j(\alpha)$. Степень приближения зависит от статистики флюктуаций амплитуд и фаз в волновом фронте и числа элементов АР. Не уменьшая общности, проведем анализ ошибки аппроксимации фазы одного из сигналов в элементах АР. Опустим индекс номера сигнала в выражениях, следующих ниже. Тогда ошибка аппроксимации фазы произвольного сигнала в элементе с номером α запишется в виде $\Delta\varphi(\alpha, t) = \varphi(\alpha, t) - \varphi_N(\alpha, t)$, где

$$\varphi(\alpha, t) = \sum_{j=0}^R \psi_j(t) P_j(\alpha); \quad \varphi_N(\alpha, t) = \sum_{j=0}^N \psi_j(t) P_j(\alpha).$$

Поэтому

$$\Delta\varphi(\alpha, t) = \sum_{j=N+1}^R \psi_j(t) P_j(\alpha).$$

Отсюда следует, что среднее значение ошибки аппроксимации равно нулю, а дисперсия определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle (\Delta\varphi(\alpha, t))^2 \rangle &= \left\langle \sum_{i=N+1}^R \psi_i(t) P_i(\alpha) \sum_{j=N+1}^N \psi_j(t) P_j(\alpha) \right\rangle = \\ &= \sum_{i, j=N+1}^R D_{ij}^\psi P_i(\alpha) P_j(\alpha), \end{aligned} \quad (11)$$

в котором D_{ij}^ψ — элемент дисперсионной матрицы коэффициентов разложения, $D_{ij}^\psi = \langle \psi_i(t) \psi_j(t) \rangle$.

Усредняя дисперсии ошибок по всем элементам АР и используя свойства ортонормированности полиномов, получаем

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{R} \sum_{\alpha=0}^R \langle (\Delta\varphi(\alpha, t))^2 \rangle = \frac{1}{R} \sum_{j=N+1}^R D_{jj}^\psi. \quad (12)$$

Так как

$$\psi_j(t) = \sum_{\alpha=0}^R \varphi(\alpha, t) P_j(\alpha),$$

$$D_{ij}^{\psi} = \left\langle \sum_{\alpha=0}^R \varphi(\alpha, t) P_i(\alpha) \sum_{\beta=0}^{R'} \varphi(\beta, t) P_j(\beta) \right\rangle = \\ = \sum_{\alpha, \beta=0}^R K(\alpha, \beta) P_i(\alpha) P_j(\beta), \quad (13)$$

где $\|K(\alpha, \beta)\|$ — корреляционная матрица фазового фронта волны, $K(\alpha, \beta) = \sigma_{\varphi}^2(\alpha) r(\alpha, \beta)$; $\sigma_{\varphi}^2(\alpha)$ — дисперсия флюктуаций фазы в элементе с номером α , $r(\alpha, \beta)$ — элементы корреляционной матрицы,

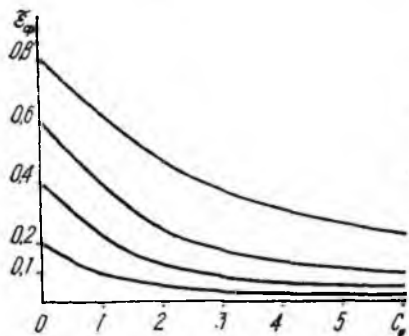


Рис. 1

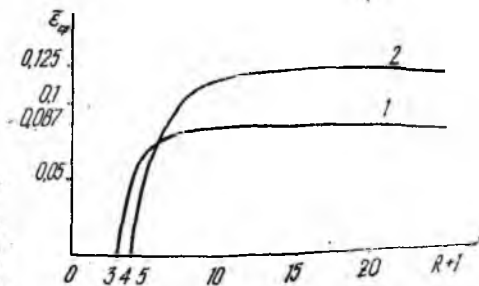


Рис. 2

нормированные относительно $\sigma_{\varphi}^2(\alpha)$. Подставляя в (12) выражение для D_{ij}^{ψ} , имеем

$$\bar{\epsilon}_{\text{ср}} = \frac{1}{R} \sum_{j=N+1}^R \sum_{\alpha, \beta=0}^R \sigma_{\varphi}^2(\alpha) r(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_j(\beta).$$

Если дисперсии флюктуаций фазы в элементах АР равны, то выражение для относительной средней дисперсии ошибки аппроксимации приобретает вид

$$\bar{\epsilon}_{\text{ср}} = \frac{r_{\text{ср}}}{\sigma_{\varphi}^2} = \frac{1}{R} \sum_{j=N+1}^R \sum_{\alpha, \beta=0}^R r(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_j(\beta). \quad (14)$$

Пусть $r(\alpha, \beta) = \exp(-|\alpha - \beta|/c_{\varphi})$, где c_{φ} — относительный радиус корреляции фазового фронта, $c_{\varphi} = r_{\varphi}/d$; r_{φ} — радиус корреляции фазового фронта, d — расстояние между элементами АР.

Были получены зависимости $\bar{\epsilon}_{\text{ср}}$ от числа членов разложения фазы в ряд при различных значениях радиуса корреляции фазового фронта для АР, состоящей из пяти элементов рис. 1. Анализ кривых показывает, что при радиусе корреляции фазового фронта не меньше половины линейного размера антенны рассмотренная аппроксимация фазового фронта в дискретных точках дает приемлемую точность с учетом четырех составляющих из пяти. При радиусе корреляции, большем длины апертуры, можно ограничиться тремя членами разложения. В этих слу-

чаях дисперсия ошибки аппроксимации фазы составляет около 6—7 % от дисперсии флюктуаций фазового фронта.

На рис. 2 приведены графики зависимости относительной дисперсии ошибки аппроксимации от числа элементов АР при фиксированных линейных размерах апертуры и постоянном количестве составляющих в разложении фазы. Кривая 1 соответствует радиусу корреляции фазового фронта, равному длине апертуры при трех членах разложения, кривая 2 — радиусу корреляции, равному половине длины АР при четырех составляющих. Из графиков видно, что с увеличением числа элементов решетки на заданной апертуре относительная дисперсия

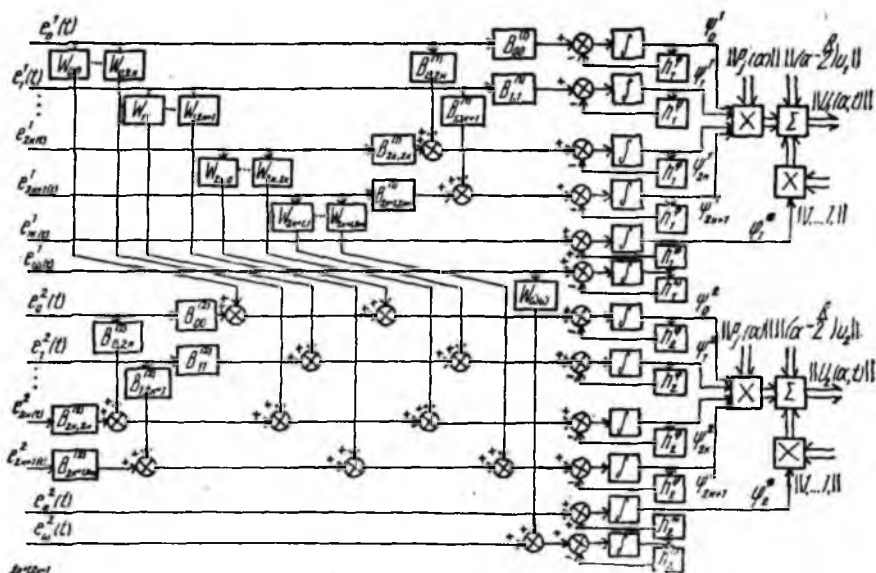


Рис. 3

ошибки аппроксимации фазового фронта незначительно растет, асимптотически приближаясь к своему пределу. Корреляционной матрице фазового фронта, согласно (13), соответствует дисперсионная матрица коэффициентов разложения. Выбирая необходимые значения D_{ij}^{ϕ} , можно формировать случайные процессы $\phi(\alpha, t)$ с требуемыми статистическими характеристиками. На рис. 3 показана структурная схема для моделирования двух коррелированных между собой фазовых фронтов, на вход которой подаются независимые белые шумы $e_i^{(j)}(t)$ с нулевыми средними и одинаковыми спектральными плотностями. С помощью коэффициентов $B_{ij}^{(\cdot)}$, W_{ij} устанавливаются необходимые корреляционные связи между формируемыми фазовыми фронтами. При вычислении D_{ij}^{ϕ} было установлено, что четные и нечетные коэффициенты разложения между собой некоррелированы: $\langle \psi_{2i}(t) \times \psi_{2j+1}(t) \rangle = 0$ (15). Поэтому на схеме опущены связи между четными

и нечетными компонентами векторного белого шума. На выходах низкочастотных фильтров имеем коэффициенты разложения $\psi_{ij}^{(\cdot)}(t)$, умножив которые на значения полиномов в точках расположения элементов АР и выполнив суммирование, получим фазовые флюктуации с требуемыми статистическими характеристиками. Значения $B_{ij}^{(\cdot)}$, W_{ij} вычисляются заранее путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений, записываемой по схеме рис. 3 с использованием соотношений (10), (15):

$$\sum_{i=0}^j B_{2i+1,2j+1}^{(1)} B_{2i+1,2k+1}^{(1)} = \frac{1}{2} N_1^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{11}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j+1}(\alpha) P_{2k+1}(\beta), \quad j < k;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j B_{2i+1,2j+1}^{(2)} B_{2i+1,2k+1}^{(2)} + \sum_{n=0}^{E\left(\frac{N-1}{2}\right)} W_{2n+1,2j+1} W_{2n+1,2k+1} = \\ = \frac{1}{2} N_2^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{22}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j+1}(\alpha) P_{2k+1}(\beta), \quad j < k; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^j B_{2i+1,2j+1}^{(1)} W_{2i+1,2k+1} = \frac{1}{2} \sqrt{N_1^\Phi N_2^\Phi} \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{12}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j+1}(\alpha) P_{2k+1}(\beta),$$

$$j, k = 0, 1, \dots, E\left(\frac{N-1}{2}\right);$$

$$\sum_{i=0}^j B_{2i,2j}^{(1)} B_{2i,2k}^{(1)} = \frac{1}{2} N_1^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{11}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j}(\alpha) P_{2k}(\beta), \quad j < k;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j B_{2i,2j}^{(2)} B_{2i,2k}^{(2)} + \sum_{n=0}^{E\left(\frac{N}{2}\right)} W_{2n,2j} W_{2n,2k} = \\ = \frac{1}{2} N_2^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{22}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j}(\alpha) P_{2k}(\beta), \quad j < k; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^j B_{2i,2j}^{(1)} W_{2i,2k} = \frac{1}{2} \sqrt{N_1^\Phi N_2^\Phi} \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{12}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j}(\alpha) P_{2k}(\beta),$$

$$j, k = 0, 1, \dots, E\left(\frac{N}{2}\right).$$

Здесь $E(G)$ — целая часть выражения G .

Благодаря (15) число уравнений в этой системе почти в два раза меньше, чем в аналогичной системе для фазовых соотношений. Кроме того, при больших радиусах корреляции фазовых фронтов, когда можно ограничиться несколькими членами разложения, размерность данной системы становится еще меньше. Например, для формирования взаимно коррелированных флюктуаций фаз двух источников радио-

сигналов в пятиэлементной АР с радиусом корреляции, соизмеримым с длиной апертуры, методом линейного преобразования требуется решение системы, состоящей из 55 нелинейных алгебраических уравнений, в то время как система (15) содержит только 13 уравнений. Для АР с большим числом элементов выигрыш увеличивается.

Предлагаемый метод позволяет с помощью моделирования небольшого числа случайных коэффициентов с достаточной точностью формировать взаимно коррелированные волновые фронты с требуемыми статистическими характеристиками на выходах многоэлементных АР. Приведенные методика и схему использовали при цифровом моделировании оптимальных адаптивных алгоритмов разрешения, обнаружения, измерения в многоцелевой ситуации при наличии неоднородной среды распространения радиоволн, а также была разработана схема имитатора радиосигналов, отвечающего схеме на рис. 3, и изготовлен действующий макет.

Список литературы: 1. *Быков В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., 1971. 328 с. 2. *Маслов А. Ф., Нестеров К. П.* Квазиоптимальный алгоритм измерения амплитуд и фаз сигналов на выходах элементов приемной антенной решетки, работающей в неоднородной среде // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 3. С. 491—500. 3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М., 1979, 416 с.

Поступила в редколлегию 21.12.87