Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, Н. Е. ШАРОНОВА, канд. техн. наук,
И. Ю. ШУБИН

ГОРИТМЫ КАНОНИЧЕСКОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

В работе [1] введено понятие теории интеллекта и разработан ее формальный аппарат: конечные предикаты, конечные алфавитные операторы, алгебра конечных предикатов. Установлена универсальность алгебры конечных предикатов для целей математического описания детерминированных, дискретных и конечных информационных объектов. Были введены такие двуместные операции над конечными предикатами, как дизъюнкция, конъюнкция и импликация, которая определялась как $A \supset B = \overline{A} \vee B$ (1), где A, B — произвольные формулы алгебры конечных предикатов. Заменой в базисе алгебры операции дизъюнкции на операцию импликации была получена новая алгебра конечных предикатов с базисом, состоящим из операций конъюнкции, импликации и всевозможных узнаваний символов. Такая алгебра названа *импликативной алгеброй конечных предикатов* [1, с. 39]. Ранее [1] введено понятие импликанты конечного предиката следующим образом: предикат g является *импликантой* предиката f, если для любого набора значений аргументов, при котором $g=1$, выполняется $f=1$. Говорят, что импликанта g накрывает своими единицами единицы предиката f.

Данная работа продолжает указанные выше и развивает понятие импликанты, описывает некоторые свойства импликант. Цель работы — теоретическое обоснование применения алгоритмов минимизации алгебры логики, обобщенных на случай алгебры конечных предикатов, при введенной операции импликации.

x \ y	d	e	a
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	1	1

f

x \ y	d	e	a
a	0	0	1
b	0	1	0
c	1	0	0

g

x \ y	d	e	a
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	0	1

h

Рассмотрим пример. Пусть $A_1=\{a, b, c\}$; $A_2=\{d, c, a\}$ — два непустых алфавита букв и $B=\{x, y\}$ — алфавит переменных. Предикаты f, g, h заданы таблицей. Требуется определить являются ли предикаты g и h импликантами предиката. По определению импликанты, чисто визуально, определяет, что предикат g является импликантой предиката f, а предикат h — нет.

Теорема 1. *Для того чтобы конечный предикат g был импликантой конечного предиката f, необходимо и достаточно выполнение условия $g \supset f \equiv 1$* **(2).**

Доказательство. *Необходимость*. Пусть предикат g является импликантой предиката f. Тогда для любого набора $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, если $g(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$, то $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$. Это означает, что $g(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \supset f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$. Следовательно, $g \supset f \equiv 1$.

Достаточность. Предположим, что справедливо тождество (2), т. е. на любом наборе $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ справедливо $g(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \supset \supset f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$. Предположим, что $g(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$, тогда $1 \supset f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$, откуда согласно тождеству (1) $0 \vee f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$. Следовательно, $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1$. Это означает, что предикат g является импликантой предиката f. Теорема доказана.

Рассмотрим пример применения теоремы. Пусть $A_1=\{a, b, c\}$, $A_2=\{d, e, f\}$, $A_3=\{a, d, g\}$, $B=\{x, y, z\}$. Заданы предикаты f и h: $f \equiv x^a \vee y^e z^g$, $h \equiv x^b y^e \cdot z^g$.

Требуется выяснить, является ли предикат h импликантой предиката f. Проверяем выполнение условия (2):

$$h \supset f = x^b y^e z^g \supset x^a \vee y^e z^g = \overline{x^b y^e z^g} \vee x^a \vee y^e z^g =$$

$$= \overline{x^b} \vee \overline{y^e z^g} \vee x^a \vee y^e z^g = \overline{x^b} \vee x^a \vee 1 = 1.$$

Таким образом, предикат h является импликантой предиката f.

Теорема 2. *Если f, g, h — произвольные конечные предикаты, связанные тождеством $f = g \vee h$* (3), *то предикат g является импликантой f.*

Доказательство. Пусть $f = g \vee h$. Если $g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, то $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \vee h(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1 \vee h \times (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример применения теорем 1 и 2. Выберем следующие области определения: $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e, a\}$, $A_3 = \{a, c\}$, $B = \{x, y, z\}$; предикат f имеет вид $f = x^a \vee y^e z^e$. Элементарная конъюнкция $g = y^e z^c$ согласно теореме 2 есть импликанта предиката f. Требуется выяснить, является ли предикат g простой импликантой предиката f. В работе [1] дано определение простой импликанты как элементарной конъюнкции, обладающей такими свойствами: она импликанта предиката f и никакая ее собственная часть не может быть импликантой предиката f. Собственными частями элементарной конъюнкции g служат предикаты $g_1 = y^e$ и $g_2 = z^c$. Проверяем, являются ли эти предикаты импликантами предиката f. Имеем

$$g_1 \supset f = y^e \supset x^a \vee y^e z^c = \overline{y^e} \vee x^a \vee y^e z^c = x^a \vee \overline{y^e} \vee z^c \neq 1;$$

$$g_2 \supset f = z^c \supset x^a \vee y^e z^c = \overline{z^c} \vee x^a \vee y^e z^c = x^a \vee y^e \vee \overline{z^c} \neq 1.$$

Итак, g_1 и g_2 не являются импликантами предиката f. Отсюда следует, что предикат $g = y^e z^c$ есть простая импликанта предиката f.

Теорема 3. *Дизъюнкция любого числа импликант конечного предиката является импликантой этого предиката.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_p$ — импликанты конечного предиката f. Это означает, что $g_1 \supset f = 1$, $g_2 \supset f = 1, \ldots, g_p \supset f = 1$. Тогда

$$g_1 \vee g_2 \vee \ldots \vee g_p \supset f = \overline{g_1 \vee g_2 \vee \ldots \vee g_p} \vee f = \overline{g_1} \cdot \overline{g_2} \cdot \ldots \cdot \overline{g_p} \vee f =$$

$$= (\overline{g_1} \vee f)(\overline{g_2} \vee f) \ldots (\overline{g_p} \vee f) = (g_1 \supset f)(g_2 \supset f) \ldots (g_p \supset f) = 1.$$

Теорема доказана.

При решении уравнений алгебры конечных предикатов особое значение имеет проблема минимизации формул алгебры конечных предикатов. Была поставлена каноническая задача минимизации — выбрать из множества такую форму, в которую входит наименьшее число узнаваний букв [1]. Так как проблема канонической минимизации в алгебре конечных предикатов имеет много общего с одноименной проблемой в алгебре логики, то методы минимизации алгебры конечных предикатов можно рассматривать как обобщение известных в алгебре логики методов канонической минимизации. Такими методами явились обобщенные алгоритмы канонической минимизации Квайна—Мак-Класки, Порецкого-Блейка, Нельсона [1, 2].

Утверждение 1. Для любого конечного предиката f результатом применения алгоритма Квайна—Мак-Класки, распространенного на случай алгебры конечных предикатов к его совершенной ДНФ является сокращенная ДНФ этого предиката.

Доказательство. Представим окончательную форму записи предиката f в виде $q \vee Q$, где q — одно из элементарных произведений, составляющих f_i, а Q — дизъюнкция всех остальных членов ДНФ. Отождествляя полученную форму f_i с заданным предикатом f, заметим, что q является импликантой f. Это следует из определния дизъюнкции непосредственно. Запись $f_i = q \vee Q$ указывает также на полноту системы импликант q и Q.

Предположим, что q не простая импликанта предиката f, тогда найдется элементарное произведение g, составленное из части элементарного произведения q и являющееся импликантой предиката f. По свойствам произведения импликанта g также обращается в единицу на тех наборах, на которых $q = 1$, система импликант g и Q — полная система, и справедливо, что $f = g \vee Q$. Поскольку к исходной форме $f = g \vee Q$ может быть применена одна из операций алгоритма Квайна—Мак-Класки, то приходим к противоречию, так как предполагалось, что g — не простая импликанта. Ввиду произвольности выбора элементарного произведения g, можно сделать вывод, что применение алгоритма Квайна—Мак-Класки к исходной совершенной дизъюнктивной нормальной форме конечного предиката f представляет собой дизъюнкцию некоторого множества ее простых импликант, т. е. сокращенную ДНФ предиката f.

Утверждение 2. Если в произвольном ДНФ предиката f произвести операции, предусмотренные алгоритмом минимизации Порецкого-Блейка (все возможные обобщенные склеивания и устранить затем все элементарные поглощения), то в результате получится сокращенная ДНФ предиката f.

Сформулированное утверждение докажем многократным применением операции обобщенного склеивания из произвольной ДНФ предиката, в результате чего может быть получена любая простая импликанта этой функции. В самом деле, в случае применения к ДНФ операции обобщенного склеивания мы снова имеем некоторую ДНФ. Каждый же член ДНФ является элементарным произведением и импликантой предиката f, поэтому он поглощается какой-либо простой импликантой предиката f. Таким образом, после получения всех простых импликант устранение всех элементарных поглощений обязательно приведет нас к сокращенной ДНФ.

Для доказательства того, что в результате обобщенных склеиваний из произвольной ДНФ предиката f могут быть получены все ее простые импликанты, проведем индукцию по числу переменных n, от которых зависит предикат f. Для $n=1$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для всех $n<m$, и докажем его для $n=m$. Заметим прежде всего, что простая импликанта p — конституэнта единицы, входит во всякую ДНФ F и, следовательно, получается из нее в результате воздействия на ДНФ F пустого множества обобщенных склеиваний. Действительно, в ДНФ F обязательно найдется элементарное произведение r, которое обращается в единицу на наборе, соответствующем конституэнте p. Но тогда, очевидно, $p=rl$, где l — некоторое элементарное произведение, и поскольку r — импликанта предиката f, а p — ее простая импликанта, то $l=1$ и, следовательно, $p=r$.

Итак, когда простая импликанта p является констинуэнтой единицы, она обязательно войдет в любую ДНФ предиката f, в том числе и в ту ДНФ, которая получается в результате применения операции обобщенного склеивания к любой данной исходной ДНФ F предиката f. Предположим, что p не является конституэнтой единицы, тогда в p не входит хотя бы одна из переменных, от которых зависит предикат f; этой переменной может быть, например, переменная x. В этом случае представим ДНФ в виде $F=Ax\vee B\bar{x}\vee C$, группируя члены, содержащие x и $\bar{x}$, и выноcя x и $\bar{x}$ за скобки. Являясь импликантой функции F и не завися от x, элементарное произведение p будет, очевидно, и импликантой функций, которые получаются из функции F в результате приравнивания x к нулю и единице, иными словами, p является импликантой функций $A\vee C$ и $B\vee C$. Но тогда p будет, очевидно, импликантой и произведения этих функций $(A\vee C)\times\times(B\vee C)=AB\vee C$. Обозначим это произведение через F_1 — импликанту функции F, поскольку, применяя к F операцию обобщенного склеивания, получим

$$F=Ax\vee B\bar{x}\vee A=Ax\vee B\bar{x}\vee AB\vee C=Ax\vee B\bar{x}\vee F_1 \qquad (4)$$

Теперь ясно, что никакая собственная часть элементарного произведения p не может быть импликантой функции F_1, так как в противном случае она была бы импликантой функции F, что исключено ввиду простоты импликанты p. Следовательно, p представляет собой простую импликанту функции F_1. Поскольку функция F_1 зависит от меньшего числа переменных, чем функция F, к ней можно применить индуктивное предположение. Поэтому можно считать, что простая импликанта p получается из любой ДНФ функции F_1 в результате некоторого числа обобщенных склеиваний. Но согласно (4) некоторая ДНФ функции F_1 получается при обобщенных склеиваниях (по x) из исходной ДНФ F. Следовательно, простая импликанта p возникает из ДНФ F предиката в результате применения операции обобщенного склеивания, повторенной некоторое число раз. Ввиду произвольности выбора p и F утверждение доказано.

Исходной информацией при минимизации формул алгебры конечных предикатов по обобщенному алгоритму Нельсона служит произвольно выбранная КНФ предиката. Если в произвольной КНФ предиката 1) раскрыть все скобки в соответствии с перрым законом дистрибутивности, 2) устранить и объединить соответственно (где это возможно) нулевые и равные дизъюнктивные члены, 3) применить операцию элементарного поглощения, т. е. выполнить шаги алгоритма Нельсона, то в результате получится сокращенная ДНФ данного предиката.

Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что при раскрытии скобок и выполнении пунктов 2) и 3) в произвольной КНФ $H=H_1, H_2, \ldots, H_s$ предиката f может быть получена любая простая импликанта q этого предиката (где H_i — элементарная дизъюнкция, $1 \leqslant i \leqslant s$). При этом исходим из того, что рассматриваемая форма предиката не является тривиальной, т. е. исходный предикат отличен от константы. Тогда, не нарушая общности рассуждений, представим простую импликанту q данного предиката в виде произведения некоторого (непустого) множества узнаваний. В силу закона ложности оно будет сведено к нулю (при наличии в произведении двух различных узнаваний по одной буквенной переменной) либо к элементарному произведению узнаваний

$$q = x_{j1}^{a_{ji}} x_{j2}^{a_{jk}} \ldots x_{jl}^{a_{jr}} \quad (l \geqslant 1,\ 1 \leqslant i, k, \ldots, r \leqslant p) \tag{5}$$

Нетрудно убедиться в том, что предположение о простоте импликанты q не позволяет обратить исходный предикат f в тождественную единицу, когда $x_{j1}^{a_{ij}} = 1$, $x_{j2}^{a_{jk}} = 1, \ldots, x_{jl}^{a_{jr}} = 1$, поскольку произведение узнаваний

$$x_{j2}^{a_{jk}} x_{j3}^{a_{jm}} \ldots x_{jl}^{a_{jr}}$$

также было бы импликантой предиката f. Это означает, что в форме H предиката f найдется такая элементарная дизъюнкция (хоть одна), которая не содержит узнаваний $x_{j2}^{a_{jk}}, x_{j3}^{a_{jm}}, \ldots, x_{jl}^{a_{jr}}$.

Сохраняя при этом общность рассуждений, считаем, что такой элементарной дизъюнкцией является H_1. Далее, полагая, что $x_{j1}^{a_{ji}}=1$, $x_{j2}^{a_{jk}}=1, \ldots$ $x_{jl}^{a_{jr}}=1$, получим тождественное равенство единице и самого предиката f. С другой стороны, это возможно, когда в каждую элементарную дизъюнкцию входит хотя бы одно из рассматриваемых узнаваний (так как вся форма равна единице, при $f \equiv 1$). Из предположения, что элементарная дизъюнкция не содержит узнаваний

$$x_{j2}^{a_{jk}},\ x_{j3}^{a_{jm}},\ \ldots,\ x_{jl}^{a_{jr}},$$

следует, что она содержит узнавание $x_{j1}^{a_{ji}}$, т. е. представима в виде $H_1 = x_{j1}^{a_{ji}} \vee H_1^*$.

Аналогичным образом, не нарушая общности доказательства, имеем

$$H_2 = x_{j2}^{a_{jk}} \vee H_2^*, \ldots, H_l = x_{jl}^{a_{jr}} \vee H_l^*.$$

В каждую из остальных $(s-l)$ элементарных дизъюнкций входит, по крайней мере, одно из узнаваний вида

$$x_{j1}^{a_{ji}}, \; x_{j2}^{a_{jk}}, \ldots, x_{jl}^{a_{jr}}.$$

Нетрудно убедиться, что раскрытие скобок в КНФ и выполнение всех, где это возможно, операций устранения нулевых и объединения одинаковых дизъюнктивных членов и элементарного поглощения частот в полученной таким образом дизъюнктивной форме член

$$q = x_{j1}^{a_{ji}} x_{j2}^{a_{jk}} \ldots x_{jl}^{a_{jr}}.$$

Ввиду произвольности выбора исходной конъюнктивной нормальной формы и получения любой наперед заданной простой импликанты предиката f приходим к выводу о том, что полученная дизъюнктивная нормальная форма содержит все простые импликанты рассматриваемого предиката, т. е. является его сокращенной ДНФ.

Доказанные утверждения показывают, что обобщенные на случай алгебры конечных предикатов алгоритмы алгебры логики эффективны при решении проблемы канонической минимизации формул, что является актуальным вопросом при построении процессоров обработки информации в человеко-машинных интерфейсах.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х., 1984. 144 с. 2. *Глушков В. М.* Синтез цифровых автоматов. М., 1962. 196 с.

Поступила в редколлегию 12.03.87