УДК 519.21

Н.Н. ГОРА, ген. директор ГП Харьковский приборостроительный завод им. Т.Г. Шевченко,
А.В. ВОВК, ХНУРЭ

ВЫВОД СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ОБРАБОТКИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

Розглянуто процес формування багатокомпонентної суміші, яка представляє собою масив часток, утримуваних у рідкому середовищі. Вироблені висновок та аналіз системи диференційних рівнянь, описуючих цей процес. Установлено, що її можна розщепити на системи менших порядків, якщо власні значення головної матриці цієї системи можна розбити на дві групи так, щоб власні значення, які належать різним групам, не збігалися.

Process of formation of a multicomponent mix which represents a file of the particles contained in the liquid environment is considered. The conclusion and the analysis of system of the differential equations describing this process is made. It is established, that it can be split on systems of smaller orders if eigenvalues of the main matrix of this system can be spread out on two groups so that eigenvalues belonging to different groups, did not coincide.

Постановка проблемы. Рассматривается процесс формирования многокомпонентной смеси, содержащейся в некотором объёме V. Предполагается, что исходная смесь представляет собой массив частиц, содержащихся в жидкой среде. Её компонентами являются частицы, размеры которых лежат в произвольных границах. Формирование смеси производится при воздействии на неё возмущений, локализованных в малых частях занимаемого ею объёма. Помимо детерминированных возмущений рассматриваются и случайные возмущения. Предполагается, что их дисперсии достаточно малы.

Производится вывод системы дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс. Показано, что её можно расщепить на системы меньших порядков. Предполагается, что собственные значения матрицы $A_0(t)$ можно разбить на две группы так, чтобы собственные значения из разных групп не совпадали на исследуемом промежутке $[a, b]$.

Анализ литературы. Подробное описание рассмотренных в этой статье способов обработки исходного сырья приведено в [1 – 2]. В работах [3 – 4] детально исследован процесс формирования многокомпонентных смесей.

Свойства случайных возмущений и их вклад в эволюцию процесса подробно рассмотрены в работах [5 – 7].

В работе [8] была исследована задача о расщеплении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, на системы меньших порядков. Предложенный в этих работах подход позволяет выписать дифференциальные уравнения для каждой из полученных систем с любой заданной точностью.

Цель статьи. Вывод и исследование системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс формирования многокомпонентной смеси. Решение задачи о расщеплении полученной системы дифференциальных уравнений с малым параметром на системы меньших порядков.

Процесс формирования фракций многокомпонентной смеси. Рассмотрим процесс обработки жидкой смеси с помощью импульсов (возмущений), воздействие которых на малые части занимаемого ею объёма приводит к разрушению частиц, содержащихся в ней. Целью работы является получение «из обломков» частиц отдельных фракций компонент смеси, которые могут быть использованы в дальнейшем. Предложенный способ формирования компонент применяется и для получения из исходной массы частиц массивов частиц, основные характеристики которых (дисперсность, полидисперсность, пористость) лежат в заданных границах.

Обычно переработка жидкой смеси производится с целью получения её компонент с заданными характеристиками. Если обработка исходной смеси производилась с помощью возмущений, тождественных по своим характеристикам, и возмущения были равномерно распределены во времени и в занимаемой ею объёме V, то полученная в результате смесь будет однородной в V. Предполагается, что её обработка указанным способом производилась достаточно долго. Если обработка смеси в разных частях объёма V неодинакова, то полученная смесь будет неоднородной – её свойства в различных частях V будут различны.

Одной из характеристик многокомпонентной смеси является вектор распределения компонент $\bar{k}(M)$. Он имеет вид

$$\bar{k}(M) = (K_1(M), \ldots, K_n(M)) . \tag{1}$$

Здесь каждый компонент $K_i(M)$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) есть отношение

$$\frac{m_i(M)}{m(M)}$$

массы m_i i-компонента из малого объёма $\Delta V(M)$, содержащего точку M, к сумме масс $m_1 + \ldots + m_n = m(M)$ всех компонент, содержащихся в объёме $\Delta V(M)$, который выбираем настолько малым, что массы компонент в нём распределены равномерно (с точностью до величин, большего порядка малости, чем $m_1(M), \ldots, m_n(M)$).

Считаем, что: *а*) добавки в обрабатываемую смесь, такие как вода и катализаторы (вводимые в смесь в процессе её обработки) не относятся к её компонентам; *б*) сильные возмущениях малых объёмов вязкой смеси существенно уменьшают её вязкость на промежутках их действия.

Исследуем процесс $\Pi(t)$ изменения компонент жидкой смеси, подвергающейся возмущениям.

Обозначим через V_i объёмы из V такие, что:

$$\bigcup V_i = V \ \ (i = 1, 2, 3), \ V_{ij} = V_i \bigcap V_j \neq \varnothing . \qquad (2)$$

Сформулируем следующие утверждения:

– Если многократно возмущать объёмы V_i импульсами, тождественными с точки зрения их воздействия на смесь, то при многократном их повторении, в каждом V_i сформируется смесь, которая при дальнейшей её обработке этими импульсами изменяться уже не будет (незначительные изменения могут быть вызваны процессами диффузии).

– Если возмущать области V_i и V_j так, чтобы возмущения происходили в V_i, V_j поочередно, то при достаточно большом числе их реализаций распределения компонент смеси в областях V_i, V_j, на пересечении $V_{ij} \neq \varnothing$, будут мало различаться между собой. Это различие будет тем меньше, чем больше возмущений было реализовано на V_i и V_j.

– Если указанным возмущениям многократно подвергать все пары объёмов V_i, V_j, для которых $V_{ij} \neq \varnothing$, то при дальнейших возмущениях любого V_i распределения компонент V изменяться уже не будут.

Отсюда следует, что к некоторому моменту времени T распределения компонент процесса $\Pi(t)$, ($t > T$) на пересечениях V_{ij} любой пары V_i, V_j не будут зависеть от того, с каким элементом этой пары его связать.

Отметим, что сформулированные утверждения не имеют места, если возмущения настолько сильны, что их многократное повторение приводит к чрезмерному измельчению частиц. Таким образом, процесс $\Pi(t)$ может быть стабилизирован только с помощью специально подобранных импульсов.

Уравнение процесса формирования компонент смеси. Изменение компонент происходит за счёт возмущений, локализованных в отдельных частях V_i объёма V.

Возмущениям подвергаются все объёмы V_i, но характеристики возмущений (степень их воздействия на смесь) в разных V_i неодинаковы. В каждом V_i эти характеристики являются функциями точки $M \in V_i$. Указанные различия обусловлены стремлением сформировать в каждом V_i смесь, распределение компонент которой по своим свойствам отличалось бы от смесей в $V_j \neq V_i$.

Каждой точке $M \in V$ ставится в соответствие её окрестность $O(M)$, удовлетворяющая следующим условиям: объёмы $O(M)$ на несколько порядков меньше объёмов из (3) (см. ниже); число частиц в $O(M)$ достаточно велико. Далее за размер частицы в точке M принимается усреднение размеров всех частиц, содержащихся в $O(M)$.

Возмущения, действующие на смесь, подобраны так, что при многократном их повторении в различных частях V, будет получена смесь с заданным предельным распределением частиц по размерам. Это предельное распределение $U(M)$ является функцией точки M (точнее функцией $O(M)$ – окрестности этой точки).

Считаем, что скорости изменения характеристик смеси, происходящие под действием возмущений, неодинаковы в разных V_i. Сила действия возмущений в V_i убывает с ростом i. Отсюда следует, что скорости сходимости к предельному распределению в V_i убывают с ростом i. Возмущения во всех V_i производятся с одинаковой частотой.

Процесс обработки смеси в каждом V_i производится следующим образом. Объём V_i разбивается на N_i объёмов

$$V_{i,1}, V_{i,2}, \ldots, V_{i,N_i}, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3}$$

В каждом из них искомая функция $U(M,t)$, описывающая процесс формирования компонент, заменяется её усреднением (средним значением). Таким образом, каждому объёму V_r ($1 \le r \le N_i$) из (3) ставится в соответствие усреднение $w_r(t)$ функции $U(M,t)$ по V_r. При этом параметр t (время) предполагается фиксированным. Считаем, что величины объёмов из (3) приблизительно одинаковы. Смесь, содержащаяся в них, подвергается возмущениям в разные моменты времени. Точность аппроксимации функции $U(M,t)$ её средними значениями по объёмам (3) возрастает с ростом N_i.

При реализации возмущений в объёмах V_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) основная масса смеси остаётся в каждом из них. Для объёмов из (3) это утверждение неверно, поскольку их величины малы. При возмущении каждого V_r из (3) часть смеси, содержавшейся в нём, перемещается в соседние с V_r объёмы. При этом усреднения $w_r(t)$ будут изменяться.

Получим дифференциальные уравнения, описывающие процесс формирования смеси в объёме V_i ($i = 1,\ 2,\ 3$). Пусть

$$\overline{W_i}(t) = (w_{i,1},\, w_{i,2},\, \ldots,\, w_{i,N_i}(t)) \tag{4}$$

– векторы, компонентами которого являются усреднения функции $U(M,t)$ по каждому объёму из (3).

Вычислим производные от компонент векторов $\overline{W_i}(t)$. При этом считаем, что возмущения, которым подвергается смесь в каждом объёме V_r ($1 \le r \le N_i$) из (3), приводят к перемешиванию смеси в V_i. Таким образом, усреднение $w_\alpha(t)$ по любому V_α из (3) является функцией усреднений $(w_{i,1}, w_{i,2}, \ldots, w_{i,N_i}(t))$. Поэтому

$$\frac{d\tilde{w}_\alpha(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{w}_\alpha(t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n_i} \frac{\partial \tilde{w}_\alpha(t)}{\partial \tilde{w}_\beta(t)} \times \frac{d\tilde{w}_\beta(t)}{dt}. \tag{5}$$

В уравнениях (5) функции $\tilde{w}_r(t)$ являются усреднениями функций $w_r(t)$ по временным промежуткам, содержащим несколько десятков возмущений. Аргумент t в (5) является центром каждого такого промежутка.

Вектор $\overline{W_i}(t)$ с компонентами $\tilde{w}_\alpha(t)$ из (4) является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{W_i}(t)}{dt} = \frac{\partial \overline{W_i}(t)}{\partial t} A_i(t)\overline{W_i}(t). \tag{6}$$

Здесь матрица $A_i(t)$ порядка $N_i \times N_i$ имеет вид

$$A_i(t) = \left\| \frac{\partial \tilde{w}_\alpha(t)}{\partial \tilde{w}_\beta(t)} \right\|; \ \alpha \ne \beta, \ \alpha, \beta = 1, \ldots, N_i.$$

Объединяя уравнения (6) по всем V_i ($i = 1, 2, 3$), получим систему дифференциальных уравнений, описывающую процесс формирования смеси в объёме

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i.$$

Матрица системы имеет блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Размерности блоков в матрице (7) равны $N_1 \times N_1, N_2 \times N_2, N_3 \times N_3$. Матрица, стоящая в блоке имеет вид

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}_\alpha(t)}{\partial \tilde{w}_\beta(t)} \right\|; \ \alpha, \beta = 1, \ \ldots, \ N_i. \tag{8}$$

Элементы матрицы A, не принадлежащие этим блокам, равны нулю.

Диагональные элементы матрицы (7), отвечающие разным объёмам V_i, V_j, не совпадают: если возмущения объёма V_i превосходит возмущение V_j, то диагональные элементы матрицы (7) для V_i будут больше, чем её элементы для V_j. Отсюда для разных блоков имеем

$$\frac{\partial \tilde{w}_\alpha(t)}{\partial \tilde{w}_\beta(t)} \neq \frac{\partial \tilde{w}_\alpha(t)}{\partial \tilde{w}_\beta(t)} . \qquad (9)$$

Поэтому собственные значения матриц A_i, отвечающих различным блокам матрицы (7), не совпадают. Это обстоятельство будет использовано ниже.

Вклад случайных возмущений в эволюцию процесса. Считаем, что множество всех возмущений $(\delta\Pi)_i$ процесса Π на $[s_0, t_0]$ конечно. Через $[t_i, \tau_i]$, Π_i, V_i обозначим промежутки времени, на которых действуют $(\delta\Pi)_i$, процессы, которые $(\delta\Pi)_i$ порождают, и их фазовые пространства. Предполагается, что: все V_i являются областями, а τ_i – точками фокусировки процессов Π_i на V_i; $(\delta\Pi)_i$ $(i = 1, 2, 3)$ являются независимыми. Через $I(V_i)$ будем обозначать индикаторные функции множеств V_i. Положим $V_i \bigcup V_j = V_{ij}$. Считаем, что на $V(V_i)$ задана функция распределения $\bar{k}(M,t)$ процесса $\Pi(\Pi_i)$, если для любого события B из $V(V_i)$ и любого $t \in [s_0, t_0]$

$$P(M \in B) = \int_B \bar{k}(N,t) dV_N .$$

Здесь вероятность $P(M \in B)$ вычисляется в момент t. Предполагается, что начальное распределение $\bar{k}(M, s_0)$ процесса Π на V задано. Выясним, как изменяется функция распределения вероятностей $\bar{k}(N,t)$ процесса Π при очередном возмущении $(\delta\Pi)_i$. Все функции $\bar{k}(N,t)$, $I(V)$ предполагаются непрерывными на V.

Пусть V_i выбрано произвольно, множество $\{V_j\}$ содержит все фазовые пространства, для которых $P(V_{ij}) > 0$, $\{\tau_j\}$ – моменты фокусировки на $\{V_j\}$. Обозначим через ν_i наибольший элемент из $\{\tau_j\}$, для которого $\nu_i < \tau_i$. Положим $\beta = \max\{\nu_i, t_i\}$.

Пусть $\bar{k}(M, \beta_i) I(V_i)$, $\bar{k}(M, \tau_i) I(V_i)$ – функции распределения на V_i в моменты времени β_i, τ_i. Тогда, чтобы получить функцию распределения процесса Π на V в момент τ_i, следует переопределить её на V_i, заменив $\bar{k}(M, \beta_i) I(V_i)$ на $\bar{k}(M, \tau_i) I(V_i)$. Для $M \in V \setminus V_i$, $\bar{k}(M, \beta_i) = \bar{k}(M, \tau_i)$.

Усреднения функций $\bar{k}(M, \beta_i)$, $\bar{k}(M, \tau_i)$ по V_i совпадают:

$$\int_{V_i} \bar{k}(M, \beta_i) dV_M = \int_{V_i} \bar{k}(M, \tau_i) dV_M \ .$$

Это следует из условия нормировки $\int_V \bar{k}(M, t) dV_M = 1$, которое выполняется при всех $t \in [s_0, \infty]$ и равенства

$$\bar{k}(M, \beta_i) I(V \setminus V_i) = \bar{k}(M, \tau_i) I(V \setminus V_i) .$$

Это равенство имеет место, поскольку на (β_i, τ_i) все возмущения кроме $(\delta\Pi)_i$ сосредоточены лишь на $V \setminus V_i$, а $(\delta\Pi)_i$ действуют на V_i.

Любая точка $M \in V$ с вероятностью 1 содержится в бесконечном множестве областей V_i; до любого момента t $(t < \infty)$ происходит лишь конечное число возмущений. Для любой V_i найдётся хотя бы одна V_j, $i < j$, не совпадающая с V_i, для которой $P(V_{ij}) \geq p > 0$. Здесь p не зависит от i, j.

Если все перечисленные условия выполняются, то при бесконечном числе возмущений всех областей V_i фокусировка на V будет иметь место. Если же число возмущений всех V_i будет достаточно большим, то распределения на всех V_i будут лишь незначительно отличаться от их предельных значений.

Упрощение исследуемой системы. Рассмотрим задачу о расщеплении полученной выше системы дифференциальных уравнений на подсистемы меньших порядков.

Исследуемая система имеет вид

$$\varepsilon^h Y' = A(t, \varepsilon) Y + \overline{f} \ . \qquad (10)$$

Здесь Y – невырожденная $(n \times n)$-матрица, её столбцами являются решения системы (10), $h > 0$ – целое число. Элементами вектора $\overline{f}$ являются величины $\sigma_i d\eta_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь $d\eta_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) есть белый шум, σ_i – случайные величины с заданными функциями распределения. Предполагается, что: компоненты $d\eta_i(t)$ вектора $\overline{f}$ некоррелированы; матрица $A(t, \varepsilon)$ имеет асимптотическое разложение

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(t) \varepsilon^r \ , \ \varepsilon << 1 . \qquad (11)$$

Все исследуемые далее функции и матрицы предполагаются голоморфными по переменной t.

Пусть в точке t_0, исследуемого промежутка $[a, b]$, невозможно разделить собственные значения матрицы $A_0(t)$ на группы, не имеющие общих элементов. Предположим, что в этом случае существует малая δ-окрестность точки t_0 такая, что собственные значения из разных групп не будут совпадать на промежутках $[a, t_0 - \delta]$, $[t_0 + \delta, b]$.

Рассмотрим исходную систему (10) на промежутке $[a, t_0 - \delta]$.

Пусть $Y = T(t)Y^*$, тогда:

$$\tilde{A}(t, \varepsilon) = T^{-1}(t)A(t, \varepsilon)T(t) - \varepsilon^h T^{-1}(t)T'(t). \tag{12}$$

Если собственные значения λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ *матрицы* $A_0(0)$ *можно разбить на три группы,* $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+l}$, $\lambda_{k+l+1}, \ldots, \lambda_n$ *так, чтобы собственные значения из разных групп не совпадали, то существует трёхдиагональная матрица* $T(t)$

$$T(t) = \begin{pmatrix} I & T_{12}(t) & 0 \\ T_{21}(t) & I & T_{23}(t) \\ 0 & T_{32}(t) & I \end{pmatrix},$$

с помощью которой матрицу $A_0(t)$

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A_0^{11}(t) & A_0^{12}(t) & A_0^{13}(t) \\ A_0^{21}(t) & A_0^{22}(t) & A_0^{23}(t) \\ A_0^{31}(t) & A_0^{32}(t) & A_0^{33}(t) \end{pmatrix}$$

можно привести к блочно-диагональному виду

$$\tilde{A}_0(t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_0^{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_0^{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_0^{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{A}_0^{11}(t)$, $\tilde{A}_0^{22}(t)$, $\tilde{A}_0^{33}(t)$ – квадратные матрицы порядков k, l, m; собственные значения матриц $\tilde{A}_0^{11}(0)$, $\tilde{A}_0^{22}(0)$, $\tilde{A}_0^{33}(0)$ не совпадают в некоторой окрестности нуля.

Элементы матрицы $T(t)$ можем найти, решая систему линейных алгебраических уравнений.

После проведенных преобразований случайный вектор примет вид $\bar{g}$.

Обозначим $Y = P(t, \varepsilon)Z$, при условии, что $\det P_0(t) \neq 0$.

Уравнение (10) относительно новой неизвестной можно записать так

$$\varepsilon^h P'(t, \varepsilon)Z + \varepsilon^h P(t, \varepsilon)Z' = \tilde{A}(t, \varepsilon)P(t, \varepsilon)Z + \bar{g}.$$

Обозначим $B(t, \varepsilon) = P^{-1}(t, \varepsilon)\tilde{A}(t, \varepsilon)P(t, \varepsilon) - \varepsilon^h P^{-1}(t, \varepsilon)P'(t, \varepsilon) + \bar{g}$. Тогда система (10) преобразуется к виду:

$$\varepsilon^h Z' = B(t, \varepsilon)Z + \bar{g}. \tag{13}$$

Из (13) получим

$$\varepsilon^h P'(t,\varepsilon) = \tilde{A}(t,\varepsilon)P(t,\varepsilon) - P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon) + \bar{g}\,. \tag{14}$$

Матрицы функций $P(t,\varepsilon)$ и $B(t,\varepsilon)$ в (14) представим в виде

$$P(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)\varepsilon^r\,, \quad B(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(t)\varepsilon^r. \tag{15}$$

Подставим ряды из (15) и (11) в (14) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ε. Уравнение (14) имеет место при выполнении следующих условий:

$$\tilde{A}_0(t)P_0(t) - P_0(t)B_0(t) = 0\,; \tag{16}$$

$$\tilde{A}_0(t)P_r(t) - P_r(t)B_0(t) = \sum_{s=0}^{r-1}\left[P_s(t)B_{r-s}(t) - \tilde{A}_{r-s}(t)P_s(t)\right] + P'_{r-h}(t)\,. \tag{17}$$

В (17) $r > 0$; последний член при $r < h$ опускаем.

Считаем, что $B_0(t) = \tilde{A}_0(t)$, $\quad P_0(t) = I$. Тогда (16) примет вид

$$\tilde{A}_0(t)P_r(t) - P_r(t)\tilde{A}_0(t) = B_r(t) - H_r(t)\,,\ r > 0\,. \tag{18}$$

Здесь $H_r(t)$ зависит только от $P_j(t)$, $B_j(t)$ и $P'_j(t)$ с номерами $j < r$.

Из (18) находим

$$H_r(t) = \begin{pmatrix} H_r^{11}(t) & H_r^{12}(t) & H_r^{13}(t) \\ H_r^{21}(t) & H_r^{22}(t) & H_r^{23}(t) \\ H_r^{31}(t) & H_r^{32}(t) & H_r^{33}(t) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Уравнения (18) можно последовательно разрешить при помощи матриц $P_r(t)$, $B_r(t)$, которые имеют вид

$$P_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & P_r^{12}(t) & 0 \\ P_r^{21}(t) & 0 & P_r^{23}(t) \\ 0 & P_r^{32}(t) & 0 \end{pmatrix},\ B_r(t) = \begin{pmatrix} B_r^{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & B_r^{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & B_r^{33}(t) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрица $P_r(t)$ в (20) является трёхдиагональной.

Установлено, что замена

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)\varepsilon^r\right)Z$$

переводит уравнение (10) *в дифференциальное уравнение*

$$\varepsilon^h Z' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r(t)\varepsilon^r\right)Z + \bar{g}\,.$$

Матрицы $B_r(t)$ *этой системы имеет блочно-диагональный вид* (20).

Таким образом, исходная система, состоящая из n *уравнений, может быть расщеплена на три подсистемы меньших порядков:* k, l, m.

Аналогичные преобразования могут быть проведены и на промежутке

$[t_0 + \delta, b]$.

При достаточно малом δ решения исследуемой системы можно заменить их линейными приближениями.

Выводы. Научная новизна состоит в следующем. Произведён вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс формирования многокомпонентной смеси. Проведено исследование этой системы. Установлено, что её можно расщепить на системы меньших порядков.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученные результаты позволяют производить общий анализ процессов, происходящих в многокомпонентных смесях. Это даёт возможность предсказать эволюцию таких процессов при условии, что их основные характеристики известны.

Предполагается, что при решении системы (5) содержащиеся в ней производные заменяются разностными отношениями: дифференциалы искомых функций в (5) заменяются соответствующими разностями. Их нахождение основано на обработке опытных данных.

Список литературы: **1**. *Белянин П.Н.* Применение порошковых материалов. Состояние и перспективы // Проблемы машиностроения и надёжность машин. – 1996. – № 2. – С. 3 – 16. **2.** *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 350 с. **3.** *Фигуровский Н.И.* Седиментационный анализ. – М.: Изд-во АН СССР, 1982. – 332 с. **4.** *Грановский М.Г., Лавров И.С., Смирнов О.В.* Электрообработка жидкостей. – Л.: Химия, 1976. – 216 с. **5.** *Дикарев В.А.* Стабилизация распределений марковского процесса при возмущениях континуальных компонент // Доклады НАН Украины. – 2003. – № 6. – С. 47 – 53. **6.** *Дикарев В.А., Герасин С.Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Доклады НАН Украины. – 2000. – № 8. – С. 90 – 93. **7.** *Дикарев В.А., Герасин С.Н.* Конкурирующие возмущения в задаче о фокусировке распределений марковских процессов / 10-я Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». – Новороссийск, 2002. – С. 151. **8.** *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.