

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Бобкову Марку Ігоровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу скінченних сум Фур'є з проєкційними даними для відновлення розривних функцій з відомими лініями розриву

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи Тестові задачі з відомими лініями розриву однієї або двох ліній спеціального вигляду

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми застосування методу скінченних сум Фур'є з проєкційними даними для відновлення функцій з відомими лініями розриву

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Литвин О. Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 99 с., 12 табл., 63 рис., 1 дод., 16 джерел.

МЕТОД ФУР'Є, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТОМОГРАФІЯ, РЕКОНСТРУКЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ, РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, ЛІНІЯ РОЗРИВУ, СПЛАЙН, ЯВИЩЕ ГІББСА.

Об'єкт дослідження – клас задач з обчислювальної томографії: відновлення розривних функцій спеціального вигляду з відомими лініями розриву з використанням проєкцій та скінченних сум Фур'є. Дані функції застосовуються для опису внутрішньої структури двомірного тіла, що потрапляють з томографа у вигляді проєкцій.

Мета роботи – протестувати метод Фур'є для наближення розривних функцій з відомими лініями розриву, при цьому дослідити явище Гіббса. Протестувати використання розривних сплайнів двох змінних для пошуку ліній розриву та метод О. М. Литвина для розрахунку коефіцієнтів Фур'є.

Методи дослідження – створення тестових розривних функцій, що моделюють дані та структури, які можуть бути отримані з томографа. Наближення функцій розривними сплайнами двох змінних, відновлення за допомогою методу Фур'є та обчислення коефіцієнтів методом О. М. Литвина.

Наближення розривних функцій однієї і багатьох змінних скінченними сумами Фур'є призводить до явища Гіббса. Це явище виникає також в комп'ютерній томографії. Для усунення цього явища пропонується відновлювати не вихідну функцію, а дещо змінену за допомогою сплайнів. Як результат, задача зводиться до відновлення неперервної функції.

ABSTRACT

Introductory note: 99 pages, 12 tables, 63 figures, 1 appendix, 16 sources.

BREAK LINE, COMPUTER TOMOGRAPHY, DISCONTINUES FUNCTION, FOURIER METHOD, GIBBS' PHENOMENON, IMAGE RECONSTRUCTION, SPLINE.

The object of research is a class of problems in computed tomography: restoration of discontinuous functions of a special kind with known discontinuity lines using projections and finite Fourier sums. These functions are used to describe the internal structure of a two-dimensional body coming from the tomograph in the form of projections.

The purpose of the work is to test the Fourier method for the approximation of discontinuous functions with known discontinuity lines while investigating the Gibbs phenomenon. Also, we are going to test the usage of discontinuous splines of two variables and automatic discontinuity lines detection. Check on practice tasks the method of O. M. Lytvyn for calculating Fourier coefficients.

Methods of research are the creation of test discontinuous functions that model the data and structures that can be obtained from the tomograph. Approximation of functions by discontinuous splines of two variables, reduction using the Fourier method, and calculation of coefficients by the method of O. M. Lytvyn.

The approximation of discontinuous functions of one and many variables by finite Fourier sums leads to the Gibbs phenomenon. This phenomenon also occurs in computed tomography. To eliminate this phenomenon, it is proposed to restore slightly modified function with the help of splines rather than the original function. As a result, the problem comes down to restore the continuous function.

ЗМІСТ

	С.
Вступ.....	8
1 Системний аналіз проблеми відновлення розривних функцій методом Фур'є та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми відновлення розривних функцій	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи.....	10
1.1.3 Проблематика методів томографічної реконструкції.....	11
1.1.4 Огляд алгоритмів відновлення в томографічній реконструкції	11
1.1.5 Проблематика двовимірної реконструкції Фур'є та явище Гіббса ...	12
1.1.6 Інформаційно-функціональна модель системи томографічної реконструкції.....	14
1.2 Аналіз сценарію вирішення проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції.....	16
1.2.1 Модель аналізу проблем	16
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	18
1.2.3 Модель вирішення проблеми	23
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі.....	23
1.3.1 Змістовна постановка задачі.....	23
1.3.2 Формальна постановка задачі	25
1.3.3 Математична модель	28
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	30
2.1 Метод скінченних сум Фур'є та Фейєра.....	30
2.2 Дослідження явища Гіббса	39
2.3 Наближення розривних функцій сплайнами.....	41
2.4 Алгоритм побудови сплайнів	43
3 Програмна реалізація	44

	7
3.1 Mathcad як система комп'ютерної математики	44
3.2 Опис програми.....	46
4 Результати обчислювального експерименту	48
4.1 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має одну лінію розриву, що є колом	48
4.2 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має одну лінію розриву, що є квадратом	53
4.3 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має одну лінію розриву, що є еліпсом	57
4.4 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має дві лінії розриву, що є концентричними колами	61
4.5 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має дві лінії розриву, що є вкладеними квадратами.....	66
4.6 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має дві лінії розриву, що є вкладеними еліпсами	70
5 Аналіз можливих застосувань.....	75
Висновки	76
Перелік джерел посилання	77
Додаток А Програмна реалізація у Mathcad.....	79

ВСТУП

Математично задача реконструктивної обчислювальної томографії зводиться до відновлення функції декількох змінних по відомим криволінійним інтегралам вздовж деяких множин (як правило, уздовж прямих). Хоча принципово це завдання було вирішено І. Радоном в 1917 році, котрий вказав спосіб інтегрального перетворення, що отримав його ім'я (перетворення Радона). Дослідження цієї задачі провадяться надалі, оскільки необхідні швидкі, точні та оптимальні в обчислювальному плані алгоритми.

Одним із способів розв'язку даних інтегральних рівнянь є метод скінченних сум Фур'є [1, 2], але він потребує великої кількості обчислювальних розрахунків, оскільки необхідно обчислювати велику кількість інтегралів, порівняно з задачею. Ще одною проблемою є той факт, що при відновленні розривної функції методом Фур'є виникає явище Гіббса, що приносить похибку у точках розриву.

У роботі [3] пропонують застосувати фільтри, які зменшують осциляції, тобто усувають явище Гіббса. Ми пропонуємо узагальнити метод, введений в роботі [1] на випадок наближення розривних функцій двох змінних з використанням проекцій і скінченних сум Фур'є [2]. Для зменшення впливу явища Гіббса застосовуються розривні сплайни двох змінних для автоматичного знаходження ліній розриву та метод О. М. Литвина обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з допомогою періодичних розривних сплайнів однієї змінної і проекцій.

Зазначимо, що в області обчислювальної томографії вже розроблено багато методів, оскільки вона активно розвивається останні 60-70 років [4].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ФУР'Є ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми відновлення розривних функцій

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Томографічний знімок».

Предмет аналізу – «Відновлення розривної функції».

Точка зору: дослідник.

Ціль: отриманні дані з томографу реконструювати у зображення.

Томографія – це метод дослідження об'єкту, що дозволяє дізнатися про його внутрішню структуру – отримати перерізи об'єкту, не пошкоджуючи (розбираючи) його, якщо тільки мова не йде про анатомічну томографію.

Методи томографії широко використовуються при дослідженні багатьох об'єктів, наприклад, в медицині: якщо у лікарів виникають підозри на деякі патології внутрішніх органів людини, то необов'язково хірургу розрізати людину і дивитися на його структуру, достатньо зробити магнітно-резонансу томограму і, порівнюючи з нормами, можна зробити висновок про відхилення.

Томографія дозволяють побачити внутрішню структуру не тільки людини, а й багатьох інших об'єктів, наприклад, структура планети чи структура клітини.

Задача відновлення зображення методами комп'ютерної томографії ставиться таким чином: необхідно відновити зображення за допомогою зареєстрованого випромінювання.

Предметом дослідження у нас виступає томограма – рентгенівський знімок, отриманий за допомогою магнітно-резонансного-томографу. З точки зору математики – відновити функцію двох змінних за її проекціями вздовж набору деяких ліній.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Деякий об'єкт опромінюється рентгенівськими пучками. Випромінювання починає поглинатися, проходячи через об'єкт і на виході з об'єкту його інтенсивність менша і даний показник реєструється. Схема досліду наведена на рисунку 1.1. Тому, знаючи розміщення коліматорів та детекторів, інтенсивність випромінювання на вході та виході, можна відновити зображення засобами прикладної математики та відповідними алгоритмами.

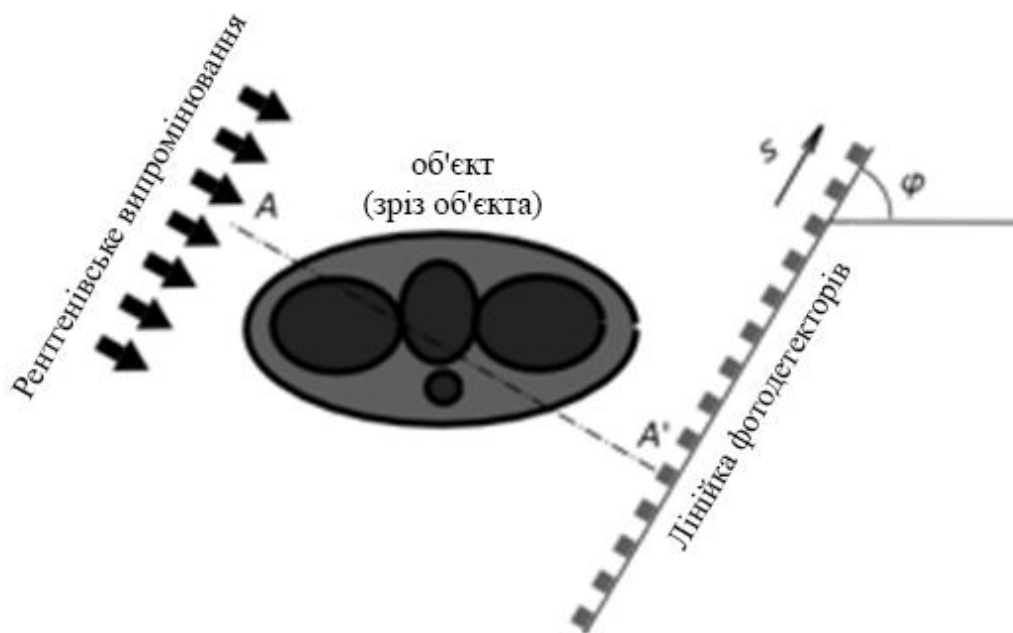


Рисунок 1.1 – Схема досліджуваної системи

Мета системи – дізнатися про внутрішню структуру досліджуваного об'єкта з достатньою точністю, не розбираючи його.

Призначення системи – опромінення досліджуваних об'єктів пучками гама квантів та реєстрація кількості поглинутого випромінювання.

Як результат опромінення об'єкта, ми отримуємо не саме зображення, а множину величин випромінювання на початку, та після поглинання об'єктом. А також положення джерела та детектора (кут нахилу).

З точки зору математики ми працюватимемо з масивом чисел, які необхідно перетворити у зображення.

1.1.3 Проблематика методів томографічної реконструкції

Використовуючи підхід, зазначений у пункті 1.1.2 можна одразу виявити деякі проблеми. По перше, коліматори не можна нескінченно щільно один до одного встановити, а значить, між точками будуть щілини, що зменшить точність та якість відновлюваного зображення, але ціна на обладнання буде менша. Тому, щоб досягнути неперервності зображення необхідно буде використовувати інтерполяцію, наприклад, гладкими сплайнами. Теж саме стосується і детекторів. По-друге, чим більше коліматорів та детекторів, тим складніше відновлювати зображення та дорожче обладнання. Відновлення може зайняти значний час, тому необхідно досліджувати алгоритми на швидкість та складність розрахунків.

Отже, необхідно знайти оптимальну кількість коліматорів та детекторів, щоб не було занадто складно відновити зображення, а також, щоб не допустити помилку, бо пропущена патологія може спричинити до фатальної помилки та смерті пацієнта. Дослідити алгоритми відновлення зображення на точність, швидкість та складність.

1.1.4 Огляд алгоритмів відновлення в томографічній реконструкції

Для розв'язання задачі реконструкції зображень запропоновано багато різних методів, кожний з яких забезпечував хоч і невелике, але все-таки важливе поліпшення якості зображення.

Відомо [5, 6], що алгоритми реконструкції зображень розподіляють на дві великі групи та також мають місце сучасні алгоритми:

а) аналітичні алгоритми:

- 1) алгоритми зворотного проєціювання;
- 2) двовимірна реконструкція за Фур'є;

б) ітеративні алгоритми:

- 1) традиційні алгоритми;
- 2) алгебраїчний метод відновлення (ART);
- 3) метод одночасного ітеративного відновлення (SIRT);
- 4) ітеративний метод найменших квадратів (ILST);

в) сучасні алгоритми:

- 1) алгоритм максимізації математичного очікування максимуму правдоподібності (ML – EM);
- 2) алгоритм максимізації математичного очікування упорядкованих підсистем проєкційних даних (OS – EM);
- 3) алгоритм коротшого спуску (ICD) та інші.

Аналітичні алгоритми простіші при достатньо повних неспотворених вихідних даних. Вони працюють значно швидше і дають зображення високої якості. Точніші ітеративні методи реконструкції, особливо за недостатньо повних вихідних даних, за малої кількості проєкцій [7]. Але вони працюють повільніше порівняно з аналітичними алгоритмами. Для їх реалізації потрібна потужніша комп'ютерна техніка.

1.1.5 Проблематика двовимірної реконструкції Фур'є та явище Гіббса

В даній роботі ми будемо досліджувати метод Фур'є для реконструкції зображень томографії. Відомо [8], що в кінці 1898 – початку 1899 років великий американський фізик Джозайя Віллард Гіббс (1839 – 1903), один з основоположників статистичної механіки, професор математичної фізики на факультеті філософії і витончених мистецтв Єльського університету (США), який є тонким знавцем і цінителем математики опублікував в англійському загальнонауковому журналі «Природа» (видається з 1869 р.) дві невеликих замітки [9] і [10], в яких показав, що ряд Фур'є не завжди представляє функцію, що розкладається з належною точністю. Редакція англійського журналу, як і сам Гіббс, не знали, що цей результат – ряд Фур'є розривної функції не збігаються до розкладаємої

функції в околі точки розриву – вже був опублікований в Англії англійським ученим Г. Уїлбрагамом за 50 років до цього [11], і за цим явищем встановилась назва: «Явище Гіббса». Приклад «Явища Гіббса» наведено на рисунку 1.2.

Отже, «Явище Гіббса» представляє інтерес в даній роботі, оскільки може бути джерелом додаткової похибки, тому необхідно усунути дане явище. На рисунку 1.2 в околі точки розриву функція отримує максимальну похибку.

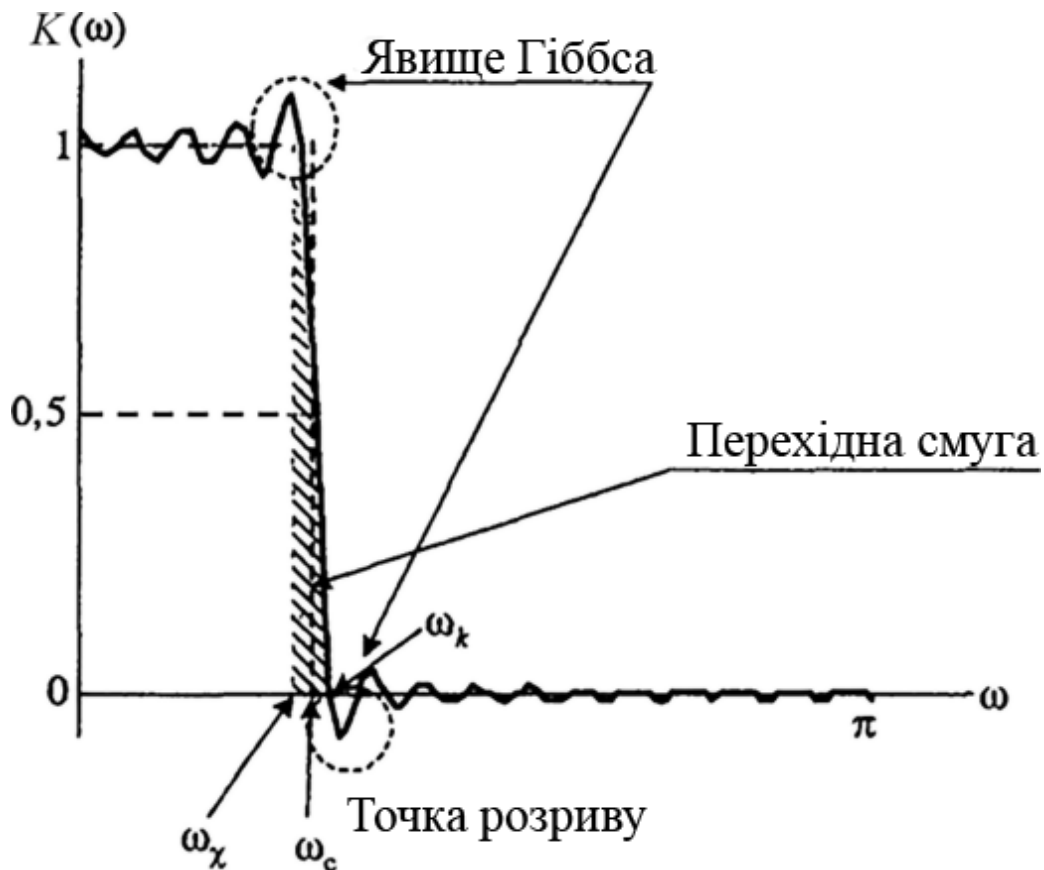


Рисунок 1.2 – Явище «Гіббса»

Осциляції досягають максимуму в точці розриву «стрибок», а потім починають спадати та збігатися до відновлювальної функції. Тому для забезпечення кращих результатів відновлювана функція має бути з мінімальною кількістю точок розриву першого роду.

На практиці контури образів мають загострення, кутові точки, що приводить до появи розривів у функції. Добре відомо, що при наближенні такої функції скінченними сумами Фур'є, виникає явище Гіббса. Воно породжує осциляції, яких оригінал не має.

1.1.6 Інформаційно-функціональна модель системи томографічної реконструкції

Отже, у пунктах 1.1.1 – 1.1.5 ми розглянули основні проблеми, які можуть виникнути при реконструкції зображень, отриманих методами томографії. Для того, щоб повністю проаналізувати всю систему, а не тільки її складову, необхідно розглянути надсистему та середовище, в якому вона виникає. Тому, розглянемо деяке середовище, де виникає необхідність сканування об'єктів.

Для прикладу, розглянемо деякий медичний заклад. Під час дослідження пацієнтів може виникнути потреба в магнітно-резонансній томографії за призначенням лікаря. Отже, представимо це у вигляді контекстної діаграми IDEF0 на рисунку 1.3.

Далі зробимо декомпозицію контекстної діаграми DFD на дрібніші рівні IDEF3 для подальшого вивчення та аналізу. Декомпозицію функціонального блоку «Магнітно-резонансна томографія» наведено на рисунку 1.4.

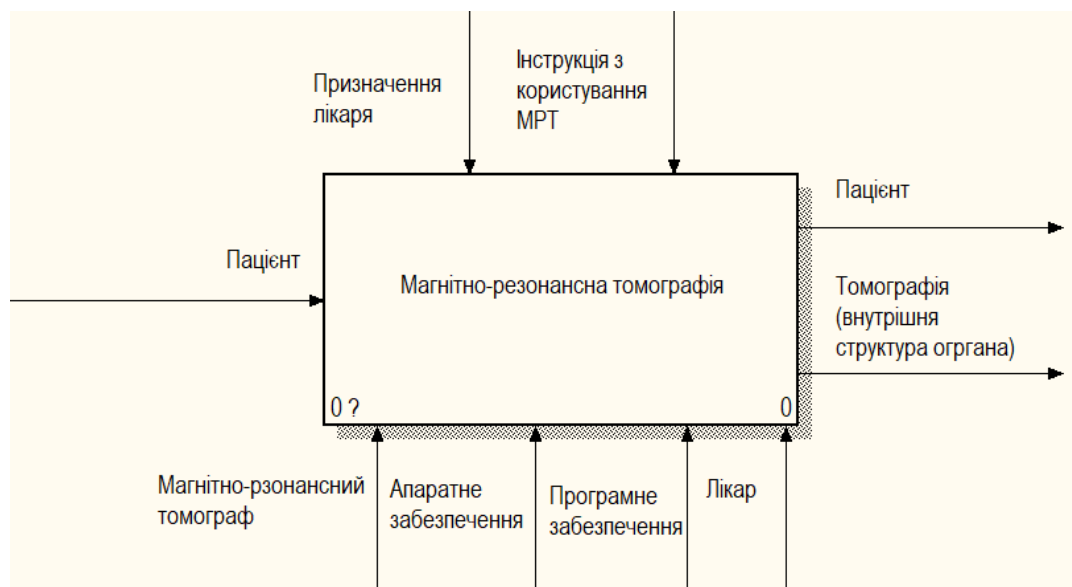


Рисунок 1.3 – Діаграма IDEF0, рівень А-0 (магнітно-резонансна томографія)

Як бачимо з діаграми IDEF0, проблема бере початок з деякого медичного закладу. На початку пацієнт проходить томографію а потім на виході отримує комп'ютерну томографію, діагноз, призначення лікаря, тощо.

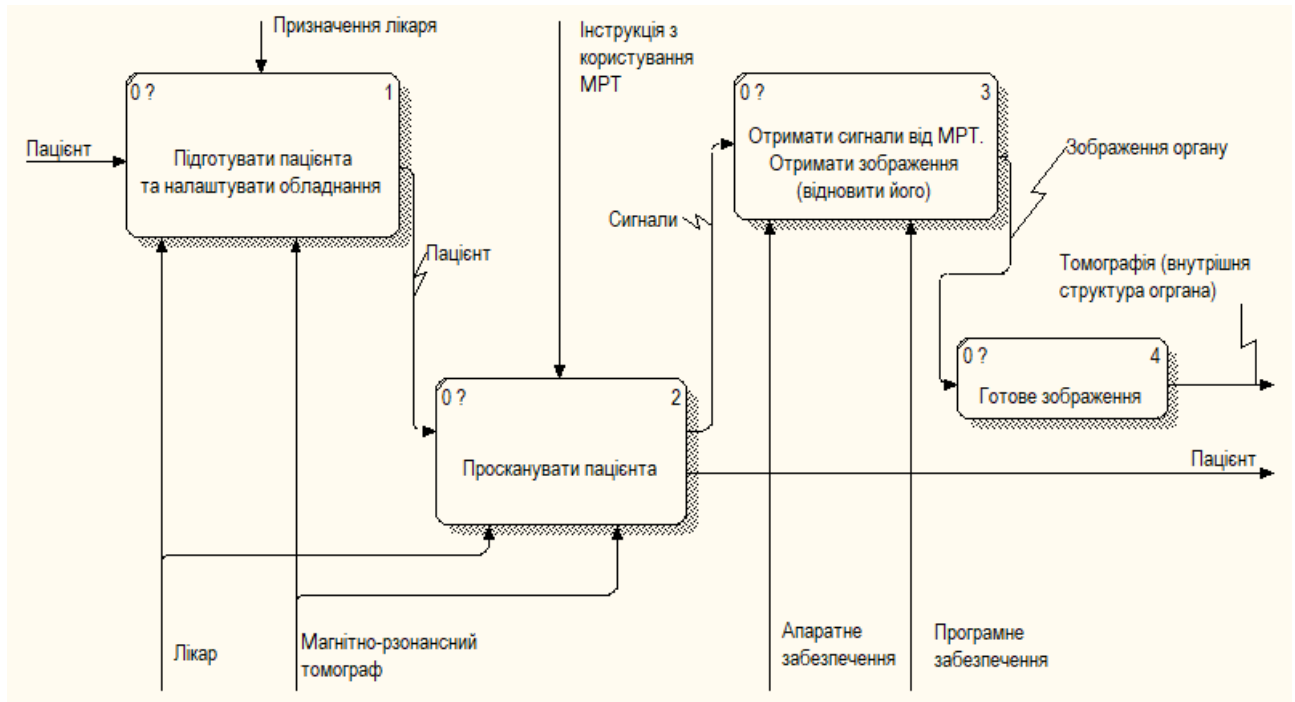


Рисунок 1.4 – Діаграма DFD, рівень A0

Як бачимо, після декомпозиції функціонального блоку рівня A-0, ми знайшли застосування даної роботи на практиці. Розглянемо блок 3 на рисунку 1.4. Для того, щоб отримати зображення, нам необхідні відповідні сигнали від томографа, апаратне та програмне забезпечення. Нас цікавить саме блок 3, тому розглянемо його декомпозицію в нотації IDEF3 для подальшого аналізу. Діаграму IDEF3, рівень A3.1 наведено на рисунку 1.5.

З діаграми IDEF3 видно, як виконується процес отримання зображення, а також, можна побачити місця, де виникає похибка. Для того, щоб отримати зображення необхідно дані з детекторів привіряти перетворенню Радона, звідки отримуємо задачу прикладної математики, а саме – набір інтегральних рівнянь, розв'язком яких буде функція щільності досліджуваного об'єкта. Лінії рівня і будуть зображенням (перерізом) внутрішньої структури органа.

У нас два джерела похибки:

- точність обладнання (ми можемо отримати дані з деякою похибкою, в залежності від обладнання);
- точність алгоритмів відновлення.



Рисунок 1.5 – Діаграма IDEF3, рівень А3.1 (Відновлення зображення)

Отже, тепер ми можемо сформулювати проблеми, дослідити їх та розробити сценарії їх вирішення.

Необхідно розробити чи застосувати точний, швидкий та незатратний алгоритм для вирішення задачі.

1.2 Аналіз сценарію вирішення проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції

1.2.1 Модель аналізу проблем

Перейдемо до моделі аналізу вирішення проблеми математичного моделювання. Основним завданням аналізу є виділення значущих властивостей для визначеної незадоволеності системи у процесі її функціонування. В результаті отримаємо три категорії незадоволень і відповідні характеристики для кожної з них:

а) бажані властивості;

- 1) збільшення точності результатів;
 - 2) збільшення швидкості обробки даних;
 - 3) надійність та «адекватність» розрахунків;
- б) критичні властивості:
- 1) складність реалізації методу;
 - 2) багатофункціональність застосування;
- в) небажані властивості:
- 1) проблеми побудови границь області моделювання;
 - 2) накопичення похибки розрахунків;
 - 3) збільшення обчислювальних витрат.

Формалізуємо проблему у вигляді структури ієрархії (рисунок 1.6), виділивши в ній три рівня:

- нульовий – ціль моделі, що задається у вигляді проблеми незадоволеності;
- перший – класифікація незадоволень;
- другий – характеристики незадоволень, що задаються у вигляді компонент проблеми.

Таким чином, модель аналізу проблеми можна вважати описаною. Ієрархічна структура аналізу проблеми наведено на рисунку 1.6.

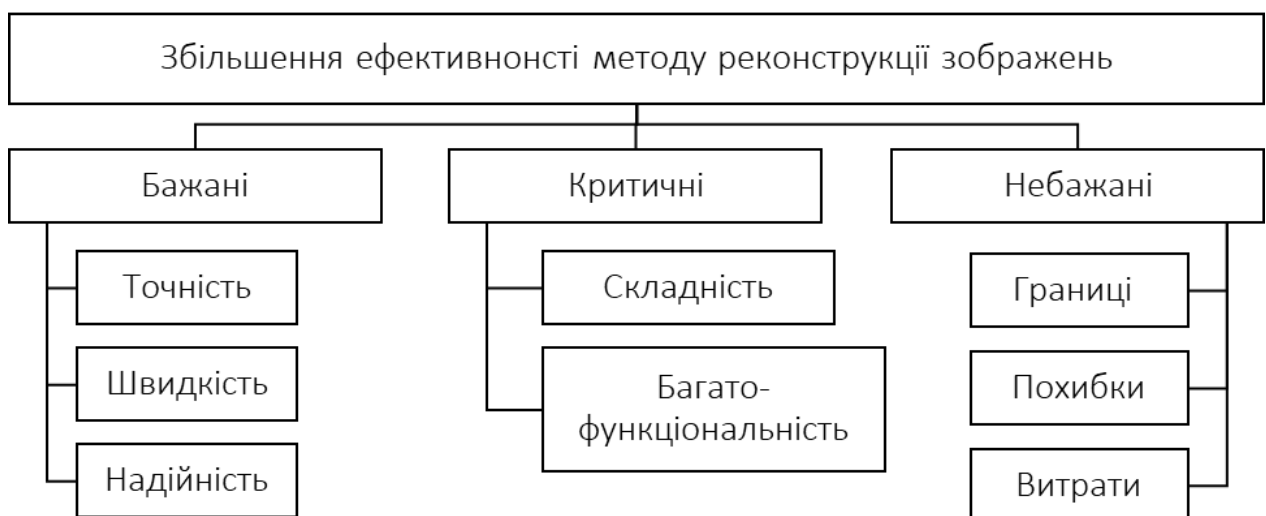


Рисунок 1.6 – Ієрархічна структура аналізу проблеми

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу проблеми, зокрема оцінювання глобального вектора пріоритетів, необхідно побудувати матрицю попарних порівнянь першого рівня, а також і кожної виділеної властивості. Усі матричні дані порівнянь першого рівня та всіх властивостей наведені у відповідних таблицях 1.1 – 1.4. Нижче наведено показники $CI = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$ та $CR = CI / RK$:

$$CI^{(K)} = \frac{3,08 - 3}{2} = 0,043, \quad CR^{(K)} = \frac{0,043}{0,58} = 0,074,$$

$$CI^{(1)} = \frac{3,026 - 3}{2} = 0,013, \quad CR^{(1)} = \frac{0,013}{0,58} = 0,022,$$

$$CI^{(2)} = \frac{2 - 2}{2} = 0,00, \quad CR^{(2)} = 0,00 = 0,00,$$

$$CI^{(3)} = \frac{3,28 - 3}{2} = 0,14, \quad CR^{(3)} = \frac{0,14}{0,58} = 0,24.$$

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь першого рівня

Номер п/п	Бажані властивості	Критичні властивості	Небажані властивості	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Бажані	1	5	3	2,466	0,631
Критичні	1/5	1	1/4	0,368	0,094
Небажані	1/3	4	1	1,075	0,275

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь бажаних властивостей

Бажані властивості	Точність	Швидкість	Надійність	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Точність	1	2	5	2,154	0,57
Швидкість	1/2	1	4	1,26	0,333
Надійність	1/5	1/4	1	0,368	0,097

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь критичних властивостей

Критичні властивості	Складність	Функціональність	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Складність	1	1/4	0,5	0,2
Багатофункціональність	4	1	2	0,37

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь небажаних властивостей

Небажані властивості	Границі	Похибка	Витрати	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Границі	1	4	1/6	0,322	0,075
Похибки	1/4	1	1/5	1,077	0,252
Витрати	6	5	1	2,885	0,673

Далі у таблиці 1.5 та на рисунку 1.7 приведені значення глобальних пріоритетів властивостей.

Таблиця 1.5 – Вектор глобальних пріоритетів

Точність роботи методу	0,57
Швидкість роботи методу	0,33
Багатофункціональність	0,37
Складність	0,2
Границі	0,075
Витрати	0,673
Надійність	0,097
Похибка	0,252

На рисунку 1.8 наведено вектор пріоритетів критеріїв. На рисунках 1.9 – 1.11 наведено вектор пріоритетів по кожному з критеріїв «Бажані», «Критичні», «Небажані» відповідно.

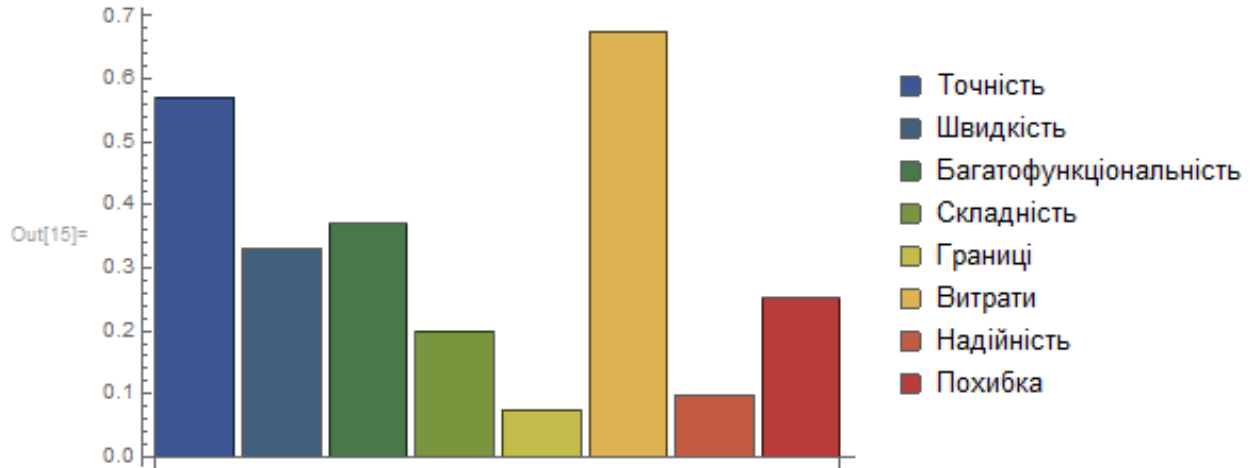


Рисунок 1.7 – Діаграма глобальних пріоритетів

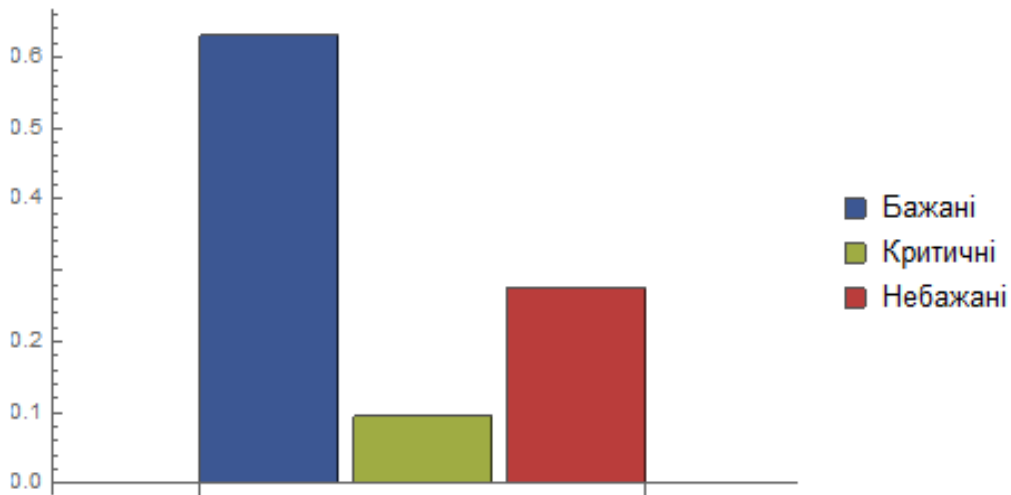


Рисунок 1.8 – Порівняння критеріїв

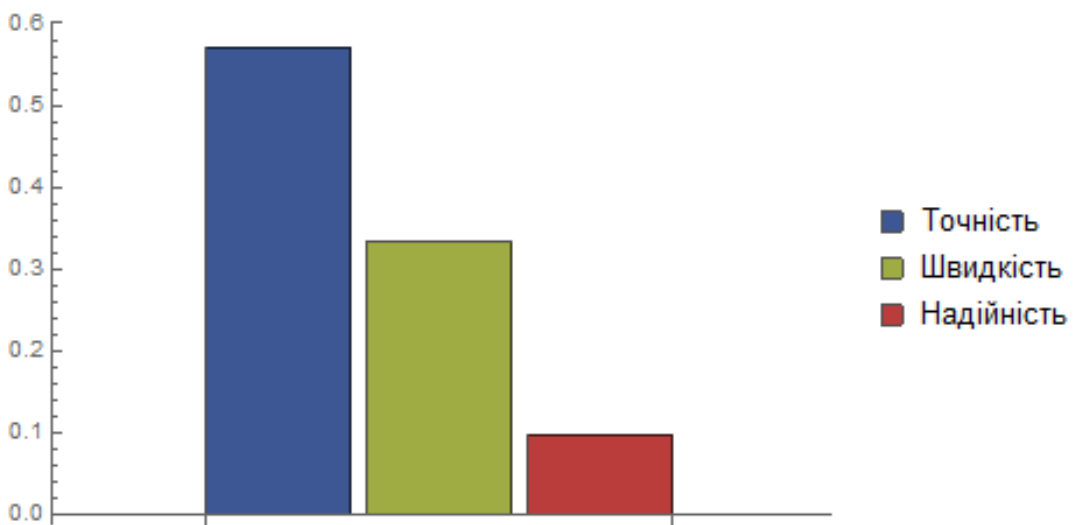


Рисунок 1.9 – Значення пріоритетів за критерієм «Бажані властивості»

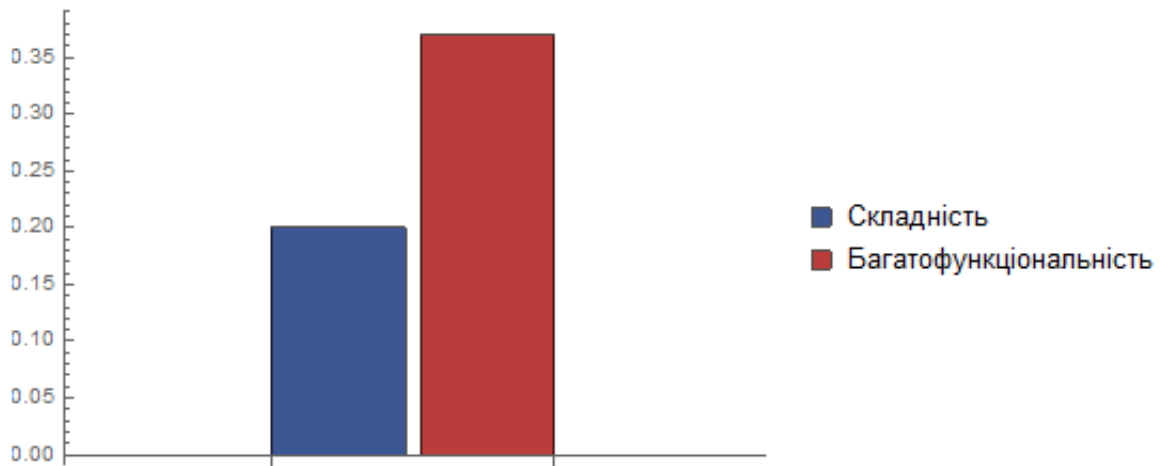


Рисунок 1.10 – Значення пріоритетів за критерієм «Критичні властивості»

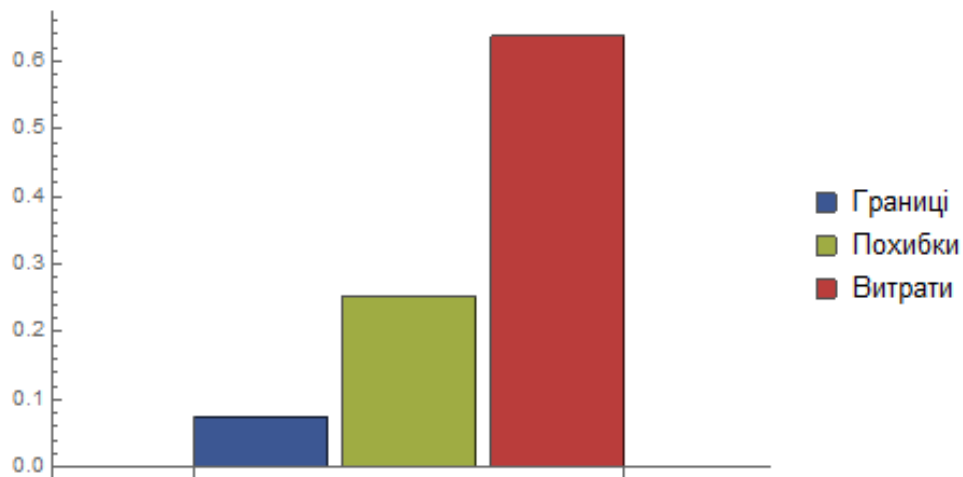


Рисунок 1.11 – Значення пріоритетів за критерієм «Небажані властивості»

Скориставшись принципом Парето, отримаємо такі найважливіші властивості:

- точність роботи методу – 0.22;
- швидкість роботи методу – 0.13;
- багатофункціональність – 0.14;
- витрати – 0.26;
- похибка – 0,1.

Отже, найбільший вплив на проблему надають «Обчислювальні витрати», «Точність роботи методу» та «Багатофункціональність». Тому, якщо усунути дані незадоволеності, можна дозволити вихідну проблему на 62%.

Грунтуючись на проведених аналізах невдоволень, можна сформулювати кілька можливих логічних результатів (контрастних сценаріїв) вирішенні завдання «Томографічної реконструкції зображення»:

а) сценарій «Методи розкладання функції в ряд» (СЦ-1). Цей сценарій характеризує побудову математичної моделі задачі відновлення функції за її проєкціями, при якому відновлювана функція знаходиться як скінченний ряд координатних функцій з деякими ваговими коефіцієнтами. При збільшенні кількості доданків ряду точність збільшується, але й обчислювальні витрати збільшуються;

б) сценарій «Застосування нейронних мереж» (СЦ-2). У разі застосування нейронних мереж, обчислювальні витрати зменшуються. Час необхідний тільки на навчання моделі. Точність залежить від того, як добре нейронну мережу сформовано та як вона навчилася;

в) сценарій «Використання алгебраїчних методів» (СЦ-3). При цьому сценарії проблема зводиться до вирішення системи лінійних рівнянь, розв'язок можна отримати на будь-якому процесорі, оскільки чисельні методи застосовують прості арифметичні операції. Точність та час при цьому сценарії програють.

Побудуємо калібрувальну таблицю, в якій за психометричною шкалою Т. Сааті для кожного сценарію експертним шляхом визначені збільшення розглянутих показників.

Таблиця 1.6 – Калібрувальний варіант показників

Показники стану системи	СЦ1 (0,42)	СЦ2 (0,35)	СЦ3 (0,23)	Узагальнений сценарій
Точність роботи методу	+3	+2	-2	+1,85
Швидкість роботи методу	-3	+5	+2	+0,95
Багатофункціональність	-1	+3	+4	+1,55
Витрати	+5	+1	+3	+3,14
Похибка	-2	+1	+3	+0,2

1.2.3 Модель вирішення проблеми

На основі результатів, отриманих у вигляді стовпчастої діаграми властивостей методу, зробимо висновок, що найвпливовішою трійкою властивостей є зменшення обчислювальних витрат, збільшення точності результатів та забезпечення багатofункціональності методу.

У зв'язку із цим зазначимо, що основна увага вирішення поставленої проблеми буде зосереджена на першій трійці властивостей. Оскільки більша доля припадає на бажані властивості, то і зусилля відповідною мірою будуть направлені на покращення цих показників.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Нам необхідно дізнатися про внутрішню структуру деякого об'єкта, не порушуючи його цілісності. Для того, щоб дізнатися про внутрішню структуру об'єкта ми проводимо його сканування. Нехай об'єктом дослідження виступатиме деякий орган людини. Будемо вважати, що сканування проводиться таким чином: людина розташовується у магнітно-резонансному томографі і проводиться опромінення пучками гама-квантів тієї частини тіла, де знаходиться орган.

Джерела опромінення, зазвичай, називають коліматорами. Оскільки частина квантів поглинається об'єктом дослідження, то після проходження пучка квантів через тіло людини їх частина поглинається. Різниця між початковою інтенсивністю та після проходження через тіло реєструються детектором. Схема дослідження наведена на рисунку 1.12.

На основі даної різниці між інтенсивністю «до» та «після», а також застосовуючи інформацію про положення детекторів, можна побудувати математичну модель, яка буде відповідати за реконструкцію зображення.

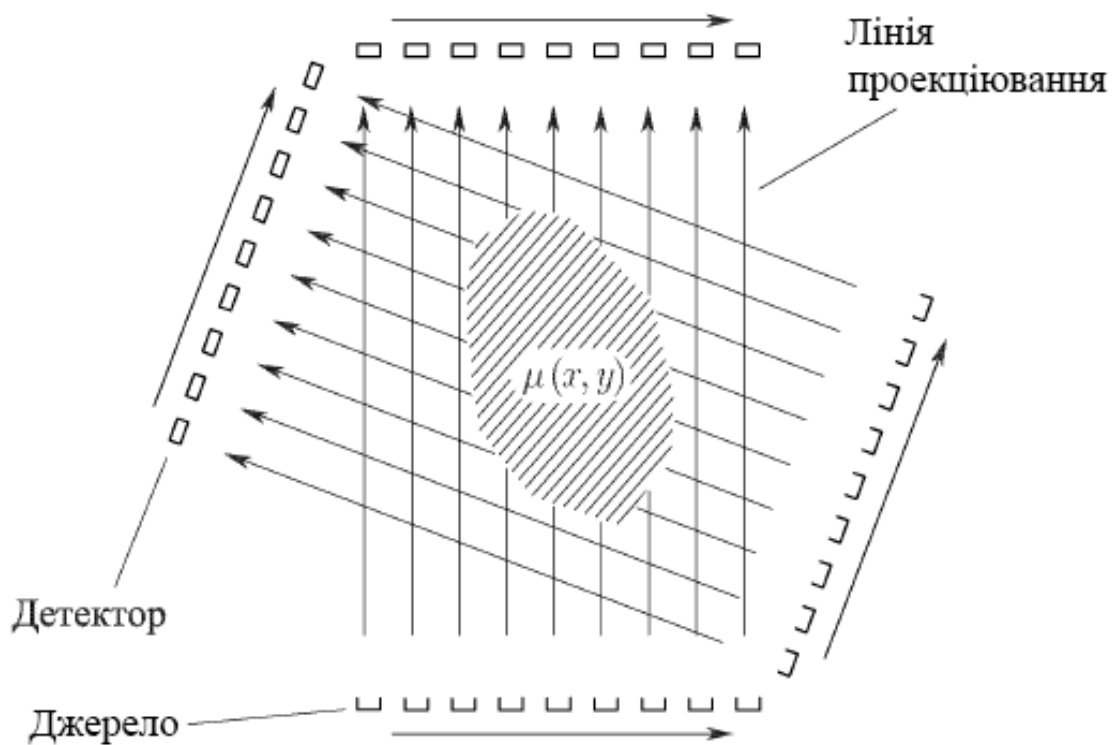


Рисунок 1.12 – Кругова геометрія вимірів з паралельними проєкціями

Отже, процес вимірювання виглядає наступним чином. Джерело випромінювання, формуючи «олівцевий» пучок, проходить вздовж об'єкта. Синхронно з джерелом з іншої сторони об'єкта рухається детектор випромінювання. Набір відгуків, отриманий таким чином, визначає одомірну функцію, так звану проєкція. Після цього система «Джерело-Детектор» повертається відносно об'єкта на деякий кут та знімає новий набір відгуків, визначаючи наступну проєкцію.

Такі виміри повторюються, доки система «Джерело-Детектор» не повернеться на кут 2π . Строго кажучи, достатньо повернути на кут π , так як після цього результати вимірювань почнуть повторюватися. По отриманому набору одомірних проєкцій необхідно відновити двомірний розподіл $\mu(x, y)$. Оскільки система «Джерело-Детектор» обертається навколо об'єкта, таку схему вимірювань називають круговою геометрією вимірювань, а так як для отримання наступного відгуку в проєкції пучок зміщується паралельно попередньому положенню, проєкції називають паралельними.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Розглянемо закон Бугера–Ламберта–Бера. Нехай тонкий «олівцевий» пучок гама-випромінювання з інтенсивністю $I_0 = I(0)$ падає на прошарок речовини з розподілом коефіцієнта поглинання (ослаблення) $\mu(x)$ вздовж розповсюдження пучка (рисунок 1.13).

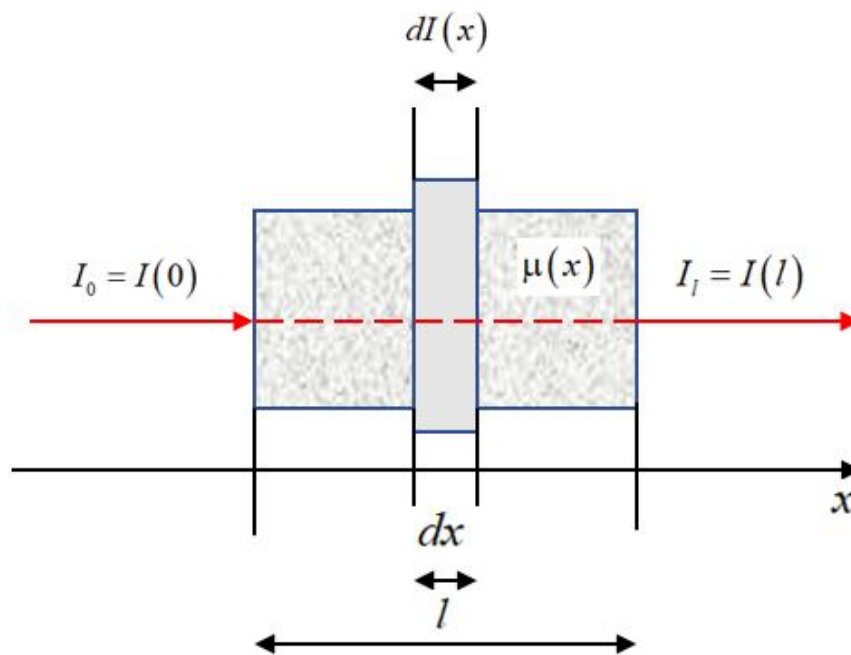


Рисунок 1.13 – Поглинання випромінювання у середовищі

Якщо розглянути приріст $dI(x)$ випромінювання $I(x)$, то його можна апроксимувати таким чином:

$$dI(x) = -\mu(x) \cdot I(x) \cdot dx. \quad (1.1)$$

Оскільки $I(x)$ має бути незростаючою, то приріст буде від'ємним. Абсолютна кількість поглинутого випромінювання будемо вважати такою $\mu(x) \cdot I(x) \cdot dx$.

Інтегруючи рівняння (1.1), отримаємо:

$$I(x) = I_0 \exp \left\{ - \int_0^x \mu(x) dx \right\}. \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) можна записати таким чином:

$$p(x) = -\ln \frac{I(x)}{I_0} = \int_0^x \mu(x) dx. \quad (1.3)$$

Перетворення Радона – інтегральне перетворення функції багатьох змінних, схоже до перетворення Фур'є. Найважливіша властивість перетворення Радона – оберненість, тобто можливість відновити вхідну функцію за її перетворенням Радона.

Розглянемо функцію $f(x, y)$, що визначена на двомірній площині та достатньо швидко спадає на безкінечності (так, щоб відповідні невластні інтеграли збігалися). Тоді перетворенням Радона називається функція

$$R(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho \cos \alpha - z \sin \alpha, \rho \sin \alpha + z \cos \alpha) dz. \quad (1.4)$$

Формулу (1.4) можна отримати із формули (1.3) для випадку функції щільності двох змінних:

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \zeta) d\zeta. \quad (1.5)$$

Виконуючи заміну змінних, отримаємо:

$$\begin{cases} x = \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \\ y = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \\ \zeta = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \end{cases}$$

$$f(\xi, \zeta) = f(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) = f(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta).$$

Тобто

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \sin \vartheta) d\zeta.$$

Що в точності співпадає з наведеною формулою (1.4):

$$R(\rho, \alpha) = p(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho \cos \alpha - z \sin \alpha, \rho \sin \alpha + z \cos \alpha) dz.$$

Геометрична інтерпретація перетворення Радона наведена на рисунку 1.14.

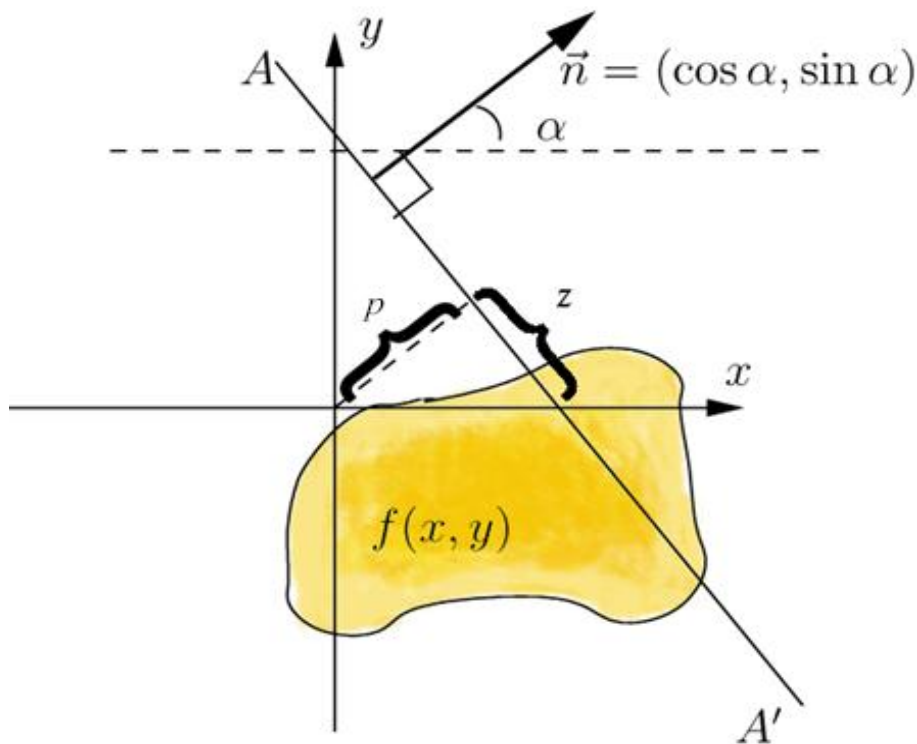


Рисунок 1.14 – Перетворення Радона – інтеграл від $f(x, y)$ вздовж прямої AA'

Формулу (1.4) можна записати іншим способом, використовуючи дельта-функцію Дірака:

$$R(\rho, \alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy. \quad (1.6)$$

1.3.3 Математична модель

Якщо сканування об'єкту виконується по колу, відносно початку координат – рисунок 1.15.

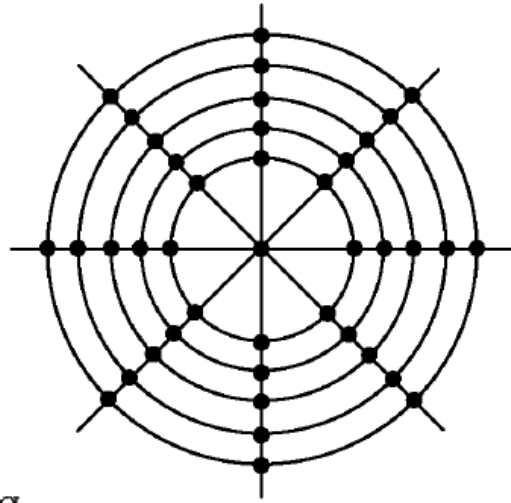


Рисунок 1.15 – Схема ліній проєкцій (полярна система координат)

То ми маємо набір ліній l_k вздовж яких ми проводимо сканування можна однозначно задати кутом $\alpha \in [0, \pi]$ – лінія у полярній системі координат. Згідно закону Бугера–Ламберта–Бера – формула (1.3) маємо набір інтегральних рівнянь:

$$\gamma(\alpha_k) = \gamma_k = \int_{l_k} f(\xi, \eta) dl_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (1.7)$$

де $f(x, y)$ – шукана функція;

γ_k – задані числа;

α_k – кут нахилу лінії l_k .

Формально пряму l_k можна описати наступним чином:

$$l_k = l(\xi, \eta, \alpha_k) : \xi \cdot \sin \alpha_k - \eta \cdot \cos \alpha_k = 0.$$

У випадку, коли лінії проєкцій задані у вигляді наборів паралельних ліній

(рисунок 1.11 та рисунок 1.14), то у нас ще з'являється відстань ρ від центру координат, тобто у полярній системі координат залежить від (ρ, α) , можна застосувати перетворення Радона і отримаємо більш загальну постановку задачі:

$$\gamma(\rho_k, \alpha_l) = \gamma_{k,l} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho \cos \alpha - z \sin \alpha, \rho \sin \alpha + z \cos \alpha) dz, \quad (1.8)$$

де $k = 1, 2, \dots, m$;

$l = 1, 2, \dots, p$.

Надалі при розв'язанні практичних задач ми будемо вивчати рівняння (1.8), оскільки воно є більш загальним. Геометрична інтерпретація наведена на рисунках 1.11 та 1.14. Також зауважимо, що задачу розглядають на обмеженій множині і там де тіло відсутнє – $f(x, y) = 0$, тому границі інтегрування беруть скінченними відповідно до задачі. Резюмуючи, маємо задачу:

$$\gamma_{k,l} = \int_{l_{k,l}} f(x, y) dl. \quad (1.9)$$

У формулах (1.8, 1.9) ρ_k та α_l параметри системи прямих, які можна описати, наприклад, нормальним рівнянням прямої:

$$l_{k,l} : x \cdot \cos \alpha_k + y \cdot \sin \alpha_k = \rho_k.$$

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод скінченних сум Фур'є та Фейєра

Нехай треба дослідити щільність $f(x, y)$ всередині деякого тіла на площині Oxy методами рентгенівської комп'ютерної томографії, використовуючи задані проекційні дані, що згідно з (1.7) являють собою криволінійні інтеграли

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = 1, \dots, M. \quad (2.1)$$

Інтеграли (2.1) беруться на заданій системі прямих L_k , $k = 1, \dots, M$, що перетинають тіло. Як було сказано раніше, ці проекції можна отримати шляхом вимірювання інтенсивностей рентгенівського променя вздовж відповідних прямих на виході з джерела рентгенівського випромінювання і після проходження через тіло. Згідно з [1, 2], наближення для функції $f(x, y)$ шукається у вигляді скінченної суми Фур'є або Фейєра відповідно:

$$f(x, y) \approx SF_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} \cdot e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (2.2)$$

$$f(x, y) \approx SFE_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) F_{k,l} \cdot e^{i2\pi(kx+ly)}. \quad (2.3)$$

Коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою:

$$F_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (2.4)$$

Для обчислення матриці коефіцієнтів (2.4), де $k = -N, \dots, N$, $l = -N, \dots, N$, окремо розглядаються різні – випадки співвідношень між k та l , а саме коли:

- $k \geq l$;
- $k < l$;

$$-k \geq l \geq 1;$$

$$-1 \leq k < l.$$

Далі для робиться заміна змінних

$$kx - ly = t, \quad kx - ly = v, \quad (2.5)$$

$$x = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}, \quad y = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}. \quad (2.6)$$

Таким чином, коли $k > l$ або $k < l$ область інтегрування $D = [0,1] \times [0,1]$ розіб'ється на три підобласті D_1, D_2, D_3 . А у випадку коли $k = l$ область D розіб'ється на дві підобласті D_1 та D_3 . Ці випадки відображені на рисунку 2.1.

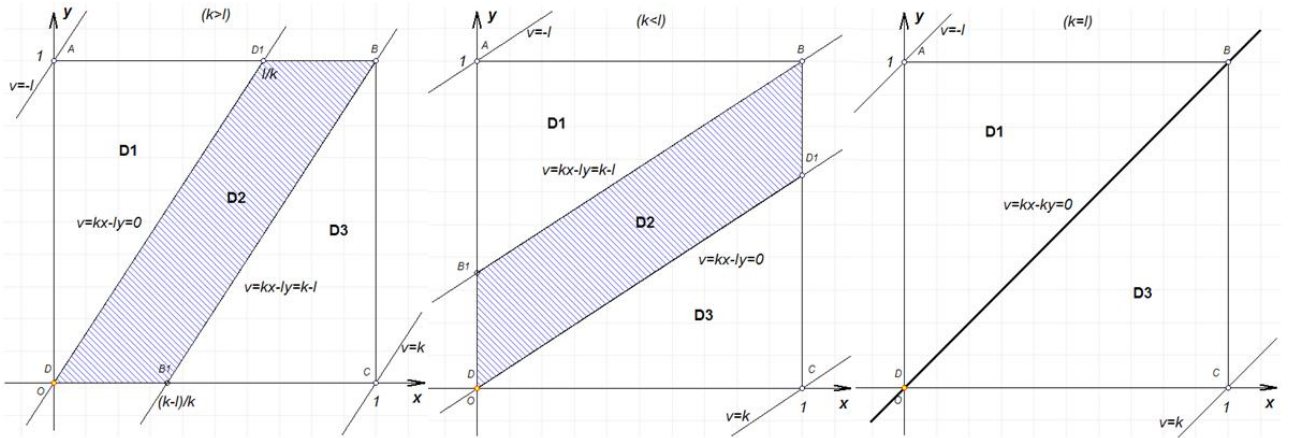


Рисунок 2.1 – Розбиття області D на підобласті

Розглянемо детальніше випадок, коли $k > l > 0$. В цьому випадку $lx + ky = t$ області D_1, D_2, D_3 та області $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3$ (для змінних (v, t)) можна записати як

$$D_1 := \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq \frac{ly}{k} \right\},$$

$$\tilde{D}_1 = \left\{ (v, t) : -l \leq v \leq 0; -\frac{kv}{l} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 + lv}{k} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; kx - ly \geq 0; kx - ly \leq k - l \right\},$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_2 &= \{(x, y): 0 \leq y \leq k, kx - ly \geq 0; kx - ly \leq k - l\}, \\ D_3 &= \{(x, y): kx - ly \geq k - l; kx - ly \leq k; 0 \leq y \leq (kx - kl + l) / l\}, \\ \tilde{D}_3 &= \{(v, t): k - l \leq v \leq k; lv / k \leq t \leq (k^2 + l^2 - kv) / l\}.\end{aligned}$$

Таким чином для коефіцієнтів Фур'є (2.4) можна написати

$$\begin{aligned}F_{k,l} &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_1 + I_2 + I_3, \\ I_1 &= \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy, \\ I_2 &= \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy, \\ I_3 &= \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy.\end{aligned}$$

Далі напишемо формули для обчислення інтегралів I_1, I_2, I_3 , враховуючи зроблені заміни змінних (2.5) – (2.6) та розрахувавши значення якобіану

$$\begin{aligned}|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k}{k^2+l^2} & \frac{-l}{k^2+l^2} \\ \frac{l}{k^2+l^2} & \frac{k}{k^2+l^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2+l^2}, \\ I_1 &= \frac{1}{k^2+l^2} \int_{-l}^0 e^{-i2\pi v} dv \left[\int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} v = z(k-l); dv = (k-l)dz; \\ \frac{k^2+l^2+lv}{k} \\ \frac{kv}{l} \\ v=0 \Rightarrow z=0; v=k-l \Rightarrow z=1 \end{array} \right] \phi_1(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \phi_1(z) dz. \quad (2.7)\end{aligned}$$

Далі у формулі (2.7) зробимо заміну $v = -lz$, $dv = -ldz$, $v = 0 \Rightarrow z = 0$,
 $v = -l \Rightarrow z = 1$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \phi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(-l)} dz = |\phi_1(z(-l)) = \phi_1(z)| = \\ &= \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(-l)} \phi_1(z) dz. \end{aligned}$$

Аналогічно напишемо формули для інтегралів I_2 та I_3

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{k^2 + l^2} \int_0^{k-l} e^{-i2\pi v} dv \left[\int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} v = z(k-l); \quad dv = (k-l)dz; \\ \phi_2(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \\ v = 0 \Rightarrow z = 0; \quad v = k-l \Rightarrow z = 1 \end{array} \right] = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \phi_2(z) dz, \\ I_3 &= \frac{1}{k^2 + l^2} \int_{k-l}^k e^{-i2\pi v} dv \left[\int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \right] = a, \\ &= \left[\begin{array}{l} v = k-l+zl; \quad dv = ldz; \\ \phi_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \\ v = k-l \Rightarrow z = 0; \quad v = k \Rightarrow z = 1 \end{array} \right] = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz = \\ &= \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k-l+zl)} \phi_3(z) dz. \end{aligned}$$

Аналогічно можна записати формули для інтегралів I_1 , I_2 , I_3 при інших співвідношеннях між k та l :

а) при $k \geq l$:

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl) e^{-i2\pi zl} dz}{k^2 + l^2}, \quad F_1(t) = \int_{-\frac{l}{k}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv, \quad (2.8)$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \int_0^1 F_2(l + z(k-l)) e^{-i2\pi[l+z(k-l)]} dz, \quad F_2(t) = \int_{-\frac{l}{k}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv,$$

$$I_3 = l \int_0^1 \frac{F_3(k + zl) e^{-i2\pi(k+zl)} dz}{k^2 + l^2}, \quad F_3(t) = \int_{\frac{l}{l}[-k^2 - l^2 + kt]}^{\frac{1}{k}[k^2 + l^2 - lt]} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv;$$

б) при $k < l$:

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} G_1(kz) dz, \quad G_1(t) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k+z(l-k))} G_2(k + z(l-k)) dz, \quad G_2(t) = \int_{\frac{-k^2 - l^2 + kt}{l}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(l+kz)} G_3(l + kz) dz, \quad G_3(t) = \int_{\frac{-k^2 - l^2 + kt}{l}}^{\frac{k^2 + l^2 - lt}{k}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv;$$

в) при $k \geq l \geq 1$:

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \phi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(l)} dz, \quad \phi_1(v) = \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_2(z(k-l)) e^{-i2\pi z(k-l)} dz, \quad \phi_2(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz, \quad \phi_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt;$$

г) при $1 \leq k < l$:

$$I_1 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(kz-l)} \omega_1(kz-l) dz, \quad \omega_1(v) = \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \omega_2[z(k-l)] dz, \quad \omega_2(v) = \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} \omega_3(kz) dz, \quad \omega_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt.$$

Для значень k, l , що задовольняють умови $k \leq -1, l \leq -1$ виконується рівність:

$$CF_{-k,-l} = \overline{CF_{k,l}}; \quad CF_{-k,l} = \overline{CF_{k,-l}}, \quad \overline{\alpha + i\beta} := \alpha - i\beta.$$

Таким чином отримали формули для розрахунку коефіцієнтів Фур'є (2.4). Отримані формули дають точні значення коефіцієнтів Фур'є за умови того, що функції $F_i, G_i, \phi_i, \omega_i, i = \overline{1,3}$ відомі для кожного значення аргументів. Але оскі-

льки для кожного значення цих аргументів ці функції чисельно дорівнюють відповідним проєкціям, які поступають з томографа, то вони можуть бути відомі лише для дискретного набору значень відповідного аргументу.

Далі буде розглянуто отримання формул для розрахунку інтегралів з врахуванням проєкційних даних на основі використання кусково-сталих функцій на прикладі інтеграла (2.8), цей інтеграл заміняємо на суму інтегралів, використовуючи властивість адитивності інтегралів. З цією цілю відрізок $[0,1]$ розбиваємо на M частинних відрізків точками z_1, z_2, \dots, z_{M-1} , тобто точками z_q , $q = \overline{0, M-1}$.

Повторимо формули (2.8) і проведемо вказану процедуру.

$$I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl)}{k^2 + l^2} dz, \quad F_1(t) = \int_{-\frac{l}{k}}^{\frac{k}{l}t} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv.$$

Тоді (2.8) буде мати вид

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \sum_{q=0}^{M-1} \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi izl} F_1(k, l, l \cdot z) dz. \quad (2.9)$$

Функцію $F_1(k, l, zl)$ замінюємо на кусково-сталу функцію

$$F_1(k, l, zl) \approx \sum_{q=1}^{M-1} F_1\left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2}\right) \cdot H_q(z), \quad (2.10)$$

$$H_q(z) = \begin{cases} 1, & z \in [z_q; z_{q+1}], \\ 0, & z \notin [z_q; z_{q+1}]. \end{cases}$$

Формула (2.10) означає, що по кожному відрізку $[z_q; z_{q+1}]$ функція $F_1(k, l, zl)$ замінюється значенням цієї функції в середній точці відрізка

$[z_q; z_{q+1}]$. Тоді після винесення константи, інтеграл I_1 отримає вид

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \sum_{q=0}^{M-1} F_1 \left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} dz. \quad (2.11)$$

Далі обчислюємо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} dz &= \frac{1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi zl} \Big|_{z_q}^{z_{q+1}} = -\frac{1}{i2\pi l} \left(e^{-i2\pi z_{q+1}l} - e^{-i2\pi z_q l} \right) = \left| \begin{array}{l} z_q = \frac{q}{M} \\ z_{q+1} = \frac{q+1}{M} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{i2\pi l} \left(e^{-i2\pi \frac{q+1}{M} l} - e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} \right) = -\frac{1}{i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} \left(e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} - 1 \right) = \frac{e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} - 1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}, \\ \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} dz &= \frac{e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} - 1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Підставимо (2.12) в (2.11)

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} - 1}{-i2\pi l} \cdot \sum_{q=0}^{M-1} F_1 \left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}. \quad (2.13)$$

Відмітимо, що

$$\frac{z_q + z_{q+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{M} + \frac{q+1}{M} \right) = \frac{2q+1}{2M} = \frac{q+0.5}{M}.$$

Таким чином,

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \sum_{q=0}^{M-1} F_1\left(k, l, l \cdot \frac{q+0.5}{M}\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}l}. \quad (2.14)$$

Аналогічним чином підраховуються інші інтеграли

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(k-l)}{M}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \sum_{q=0}^{M-1} F_2\left(k, l, l + \frac{q+0.5}{M}(k-l)\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(k-l)}, \quad (2.15)$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \sum_{q=0}^{M-1} F_3\left(k, l, l \cdot \frac{q+0.5}{M} + k\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}l}. \quad (2.16)$$

У випадку коли $k > l$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} G_1\left(k, l, k \cdot \frac{q+0.5}{M}\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}, \quad (2.17)$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(l-k)}{M}} - 1}{-i2\pi(l-k)} \sum_{q=0}^{M-1} G_2\left(k, l, k + \frac{q+0.5}{M}(l-k)\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(l-k)}, \quad (2.18)$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} G_3\left(k, l, l + k \cdot \frac{q+0.5}{M}\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}. \quad (2.19)$$

Для коефіцієнтів $F_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3$, $k > 0$, $l > 0$ аналогічним чином отримуються формули для інтегралів I_1 , I_2 , I_3 .

Коли $k \geq l \geq 1$

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{-l}{M}} - 1}{-i2\pi(-l)} \sum_{q=0}^{M-1} \phi_1\left(k, l, -l \cdot \frac{q+0.5}{M}\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(-l)}, \quad (2.20)$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(k-l)}{M}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \sum_{q=0}^{M-1} \phi_2\left(k, l, l + \frac{q+0.5}{M}(k-l)\right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(k-l)}, \quad (2.21)$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \sum_{q=0}^{M-1} \phi_3 \left(k, l, k - l + l \cdot \frac{q + 0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}l}. \quad (2.22)$$

Коли $1 \leq k \leq l$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} \omega_1 \left(k, l, k \cdot \frac{q + 0.5}{M} - 1 \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}, \quad (2.23)$$

$$I_2 = \frac{k - l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(k-l)}{M}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \sum_{q=0}^{M-1} \omega_2 \left(k, l, k + \frac{q + 0.5}{M} \cdot (k - l) \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(k-l)}, \quad (2.24)$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} \omega_3 \left(k, l, k \cdot \frac{q + 0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}. \quad (2.25)$$

2.2 Дослідження явища Гіббса

Явищем Гіббса називають особливість поведінки частинних сум Фур'є в околі точки розриву функції, вперше виявлена Вілбрейамом у 1848 році та пізніше перевідкрита Гіббсом у 1898 році.

Знайомство з явищем Гіббса почнемо з розгляду розривної функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \text{ або } x = \pi, \\ 1, & \text{якщо } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

З [12] відомо, що для всіх $|x| \leq \pi$ справедлива рівність

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Розглянемо частинну суму:

2.3 Наближення розривних функцій сплайнами

У даній роботі пропонуються явні формули для побудови розривних сплайнів від двох змінних, які мають розриви першого роду на границі системи вкладених одна в одну двовимірних областей D_k , $k = \overline{0, M}$, $D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_M$.

Досліджується метод використання розривних сплайнів для наближення розривних функцій двох змінних скінченними сумами Фур'є, у яких коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проєкцій, що поступають з комп'ютерного томографа.

Дано, що $D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_M \subset D = [0, 1]^2$.

Невідома функція $f(x, y)$ є періодичною з періодом $l = 1$ за змінною x та періодом $l = 1$ за змінною y і має розриви першого роду на границях $\Gamma_k : w_k(x, y) = 0$ областей $D_{k, k+1} : w_k(x, y) \geq 0$, $w_{k+1}(x, y) < 0$, $k = \overline{0, M}$.

Вважаємо, що:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y), w_0(x, y) \geq 0, \\ f_1(x, y), w_0(x, y) \geq 0, w_1(x, y) < 0, \\ \vdots \\ f_k(x, y), w_{k-1}(x, y) \geq 0, w_k(x, y) < 0, \\ \vdots \\ f_M(x, y), w_M(x, y) < 0. \end{cases}$$

Для аналітичного зображення цієї функції використовуємо формулу:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\left(f_0(x, y) + f_M(x, y) + \sum_{k=0}^{M-1} (f_k(x, y) - f_{k+1}(x, y)) \frac{|w_k(x, y)|}{w_k(x, y)} \right) \right).$$

Вона є узагальненням формули (1.9) з роботи [14, с. 8] на випадок двох змінних, коли розриви функції $f(x, y)$ задаються не на лініях $x - x_k = 0$, а на

лініях Γ_k . Наступна функція $sp(x, y)$ має ті ж самі розриви першого роду, що і невідома функція $f(x, y)$.

$$sp(x, y) = \begin{cases} h_0(x, y), w_0(x, y) \geq 0, \\ h_k(x, y), w_{k-1}(x, y) \geq 0, w_k(x, y) < 0, \\ k = \overline{1, M}, \\ h_M(x, y), w_M(x, y) < 0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} h_0(x, y) &= f_0^-(x, y), \\ h_k(x, y) &= \frac{-f_{k-1}^+(x, y)w_k(x, y) + f_k^-(x, y)w_{k-1}(x, y)}{w_{k-1}(x, y) - w_k(x, y)}, \\ &k = \overline{1, M-1}, \\ h_M(x, y) &= f_M^+(x, y). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} f_k^-(x, y) &= \lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (x,y) \\ w_k(u,v) < 0, w_k(x,y) = 0}} f(u, v), \\ f_k^+(x, y) &= \lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (x,y) \\ w_k(u,v) > 0, w_k(x,y) = 0}} f(u, v), \quad k = \overline{0, M-1}. \end{aligned}$$

Це означає, що дана функція не буде мати розривів:

$$F(x, y) = f(x, y) - sp(x, y).$$

Будемо її наближувати за допомогою скінченної суми Фур'є, коефіцієнти в якій обчислюються за допомогою проєкцій методом, запропонованим в [1].

2.4 Алгоритм побудови сплайнів

Вважаємо лінії розриву функції $f(x, y)$ відомими. Будуємо сплайн-функцію $Sp(x, y)$, яка має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція. У даній роботі використовуємо метод побудови розривного сплайну, викладений у роботі авторів [14].

Знаходимо функцію

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Відновлюємо функцію $\varphi(x, y)$ за допомогою метода скінченних сум Фур'є, наведеного у роботі [1], враховуючи, що ця функція не має розривів. Тобто її можна наближувати з допомогою відповідних сум Фур'є без явища Гібса. Позначимо цю функцію $\tilde{\varphi}(x, y)$.

Використовуємо для аналізу функції $f(x, y)$ суму побудованого вище сплайну та наближення функції $\varphi(x, y)$ сумами Фур'є.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathcad як система комп'ютерної математики

Mathcad – математичний пакет, який призначений для розрахунків з математики, що виникають в багатьох областях науки та техніки. З його допомогою можна виконувати як численні розрахунки так і символльні. Основна відмінність від інших математичних пакетів полягає у тому, що основні розрахунки можна зробити, використовуючи синтаксис, наближений до мови математики.

Даний математичний пакет стосовно математичного аналізу може справлятися з диференціюванням, інтегруванням, пошуком сум частинних та нескінченних рядів, границь функцій. Можна виконувати побудову графіків та є панель, яка дозволяє запрограмувати частини розрахунків, подібно, як у мовах програмування. Також у Mathcad добре розроблений апарат лінійної алгебри – операції над векторами та матрицями. Попри все інше є можливість отримувати чисельні розв'язки диференціальних рівнянь і т. д.

Для взаємодію користувача з інтерфейсом програми є декілька панелей, які містять основні оператори, які необхідні для розв'язку основних задач. Приклад панелей наведено на рисунку 3.1.

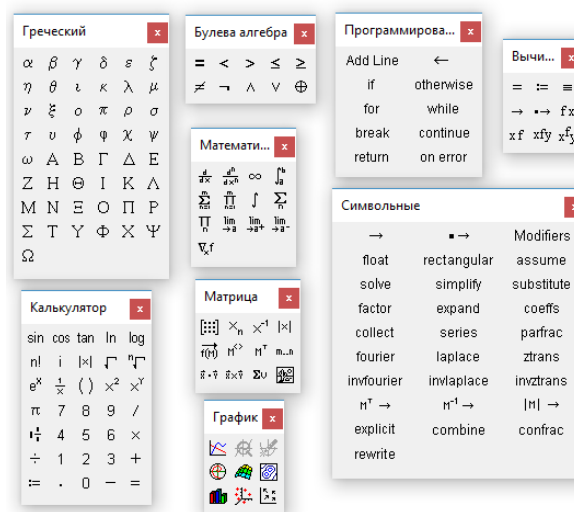


Рисунок 3.1 – Оператори та функції в Mathcad

Приклад визначення функцій наведено на рисунку 3.2.

$$\begin{aligned} xx(x, y, xc, yc, O) &:= (x - xc)\cos(O) + (y - yc)\sin(O) \\ yy(x, y, xc, yc, O) &:= -(x - xc)\sin(O) + (y - yc)\cos(O) \\ elps(x, y, xc, yc, a, b, O) &:= -\left(\frac{xx(x, y, xc, yc, O)}{a}\right)^2 - \left(\frac{yy(x, y, xc, yc, O)}{b}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Рисунок 3.2 – Визначення функцій в Mathcad

Приклад обчислення інтегралів наведено на рисунку 3.3.

$$\int x \cdot \sin(x) dx \rightarrow \sin(x) - x \cdot \cos(x) \quad \int_0^1 x^2 dx \rightarrow \frac{1}{3}$$

Рисунок 3.3 – Обчислення інтегралів у Mathcad

Приклад побудови графіку наведено на рисунку 3.4.

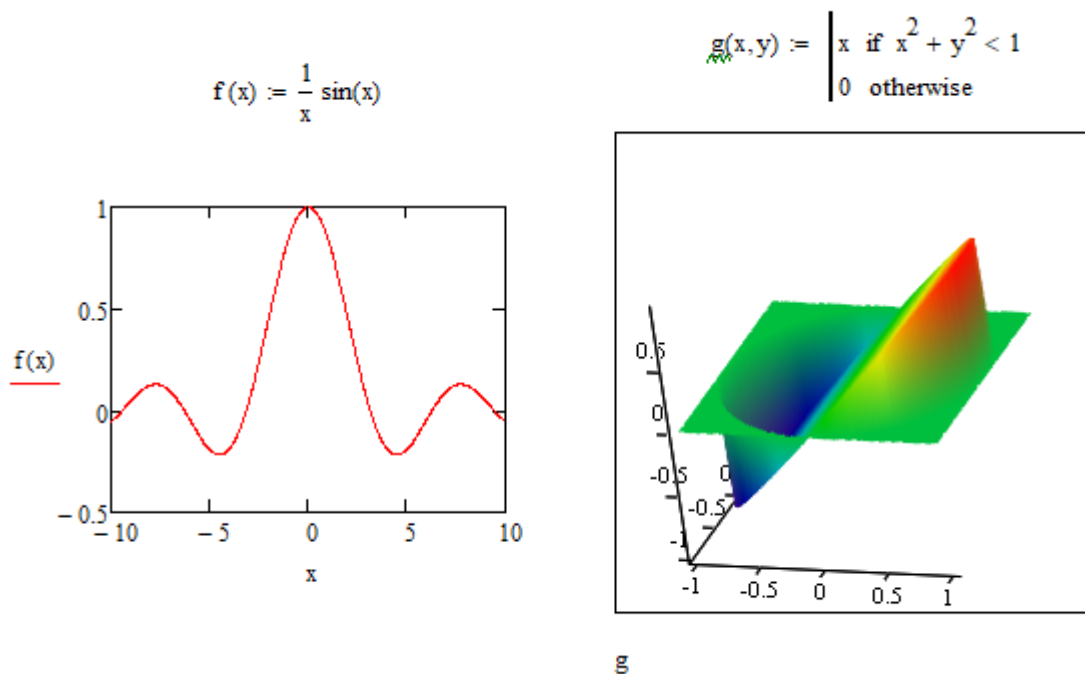


Рисунок 3.4 – Приклад побудови графіків в Mathcad

3.2 Опис програми

Використовуючи розрахункові формули, що наведено у розділі 2, реалізовано алгоритм реконструкції зображення методами скінченних сум Фур'є та Фейєра.

Вхідні дані програми:

- деяка функція $f(x, y)$ задана на області $D = [0, 1]^2$;
- N – число, що обмежує верхній та нижні індекси у сумі Фур'є (2.2);
- n – число яке задає кількість частинних відрізків, на які розбивається відрізок $[0, 1]$ при підрахунку інтегралів (2.11) – (2.26). Число M – кількість прямих, вздовж яких проводиться сканування.

Для можливості порівняння похибок, вхідні функції нормуються таким чином, щоб вони приймали максимальне значення яке дорівнює 1.

В програмі розраховуються наближені значення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3$ згідно з формулами (2.11) – (2.26) та окремо розраховуються $F_{0,0}$, $F_{k,0}$, $F_{0,l}$.

Для візуалізації і можливості порівняння результатів у програмі використовуються суми Фур'є (3.2):

$$SF(x, y, N) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}.$$

Точність відновлення оцінюється за допомогою порівняння отриманих результатів з точним значенням функції, шляхом розрахунку похибок. Для порівняння розглядаються максимальна по модулю (3.1), середньоквадратична (3.2) та середня абсолютна (3.3) похибки:

$$E = \max_{i \in [1, n]} |x_i - \tilde{x}_i|, \quad (3.1)$$

$$D = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|. \quad (3.3)$$

Як прийнято при розгляданні задач комп'ютерної томографії, результати представляються у вигляді трьох графіків (відновленої функції, ліній рівня та напівтоновим зображенням), а також у аналітичному вигляді

Графічні ілюстрації результатів приведені для сум Фур'є.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

4.1 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має одну лінію розриву, що є колом

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 1$;
- $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x, y)$;
- радіус кола R_1 і його центр $(0,5;0,5)$;
- проєкційні дані для функції $f(x, y)$.

Розв'язання задачі. Побудуємо функцію $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y), & w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = R_1 - \sqrt{(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2}.$$

Побудуємо сплайн $Sp(x, y)$:

$$Sp(x, y) = \begin{cases} \frac{w_1(x, y)}{R_1} f_1(0,5, 0,5) + \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1}\right) f_{1,N}(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ \frac{w(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} f_{2,N}(x, y) + \frac{-w_1(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} Of_2(x, y), & w_1(x, y) < 0. \end{cases}$$

Формули для функцій, використаних для побудови сплайну:

$$f_{1,N}(x, y) = f_1(x - w_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y), y - w_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, y)),$$

$$f_{2,N}(x, y) = f_2(x - w_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y), y - w_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, y)),$$

$$w(x, y) = x(1-x)y(1-y),$$

$$O_1 f_2(x, y) = \frac{x-1}{0-1} f_2(0, y) + \frac{x-0}{1-0} f_2(1, y),$$

$$O_2 f_2(x, y) = \frac{y-1}{0-1} f_2(x, 0) + \frac{y-0}{1-0} f_2(x, 1),$$

$$O_1 O_2 f_2(x, y) = \frac{x-1}{0-1} O_2 f_2(0, y) + \frac{x-0}{1-0} O_2 f_2(1, y),$$

$$O f_2(x, y) = O_1 f_2(x, y) + O_2 f_2(x, y) - O_1 O_2 f_2(x, y).$$

Побудова неперервної функції $\varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Застосування методу О.М. Литвина [1] для знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проєкцій для функції $\varphi(x, y)$. Вважаються відомими відповідні проєкційні дані. Отримаємо функцію $\tilde{\varphi}(x, y)$.

Наближене відновлення функції $f(x, y)$:

$$\tilde{f}(x, y) = Sp(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y).$$

У чисельному експерименті для прикладу 1 задавались функції:

$$f_1(x, y) = k_1 \sin((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2), \quad f_2(x, y) = k_2 e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

де $k_1 = 10$, $k_2 = 10$ – задані числа;

$R_1 = 0,25$ – радіус кола;

(0,5;0.5) – центр кола.

На рисунку 4.1 наведено вихідну функцію $f(x, y)$, на рисунку 4.2 зображено отриманий сплайн $Sp(x, y)$, а на рисунку 4.3 зображено отриману функцію $\varphi(x, y)$.

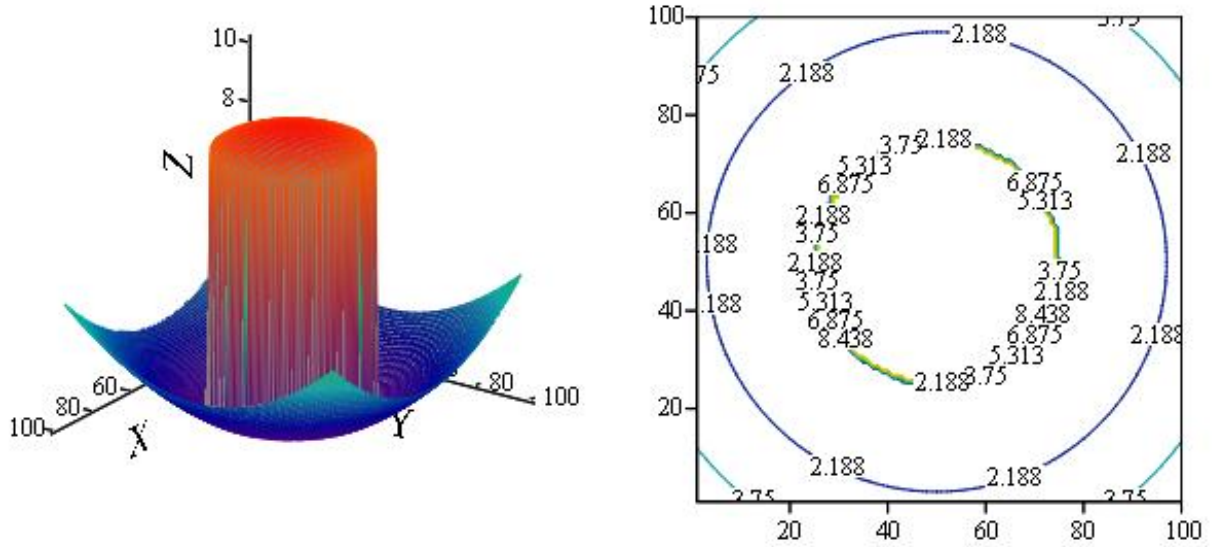


Рисунок 4.1 – Вихідна функція $f(x, y)$ та її лінії рівня

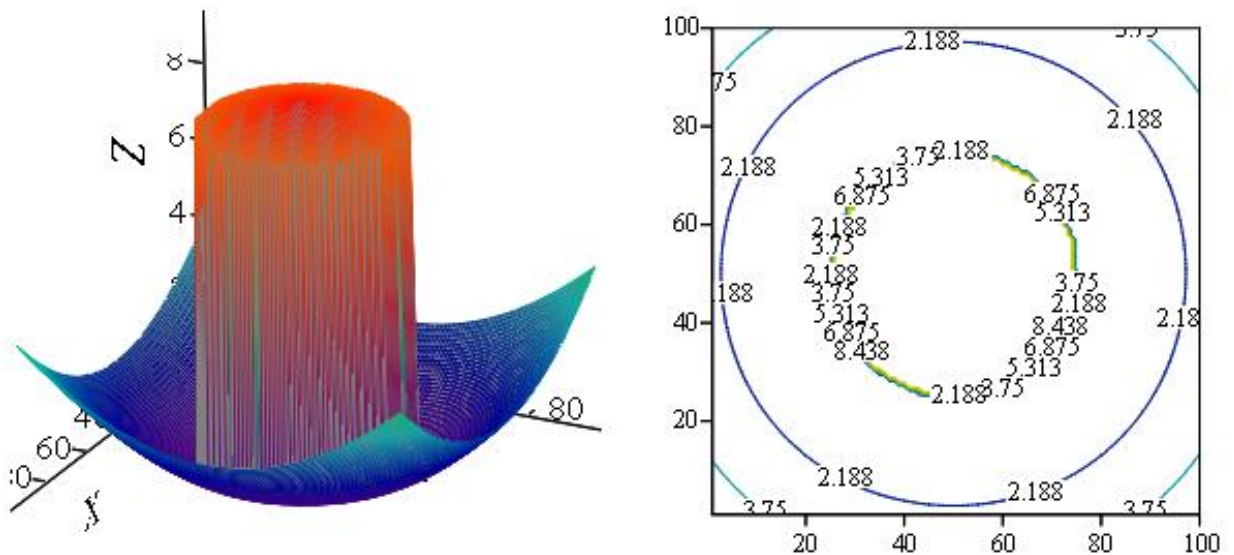


Рисунок 4.2 – Сплайн $Sp(x, y)$ та його лінії рівня

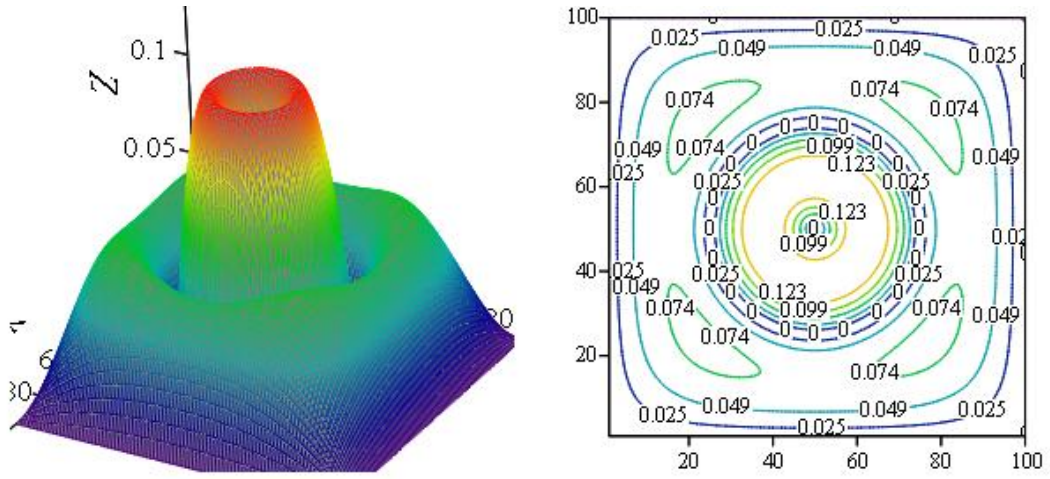


Рисунок 4.3 – Функція $\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$

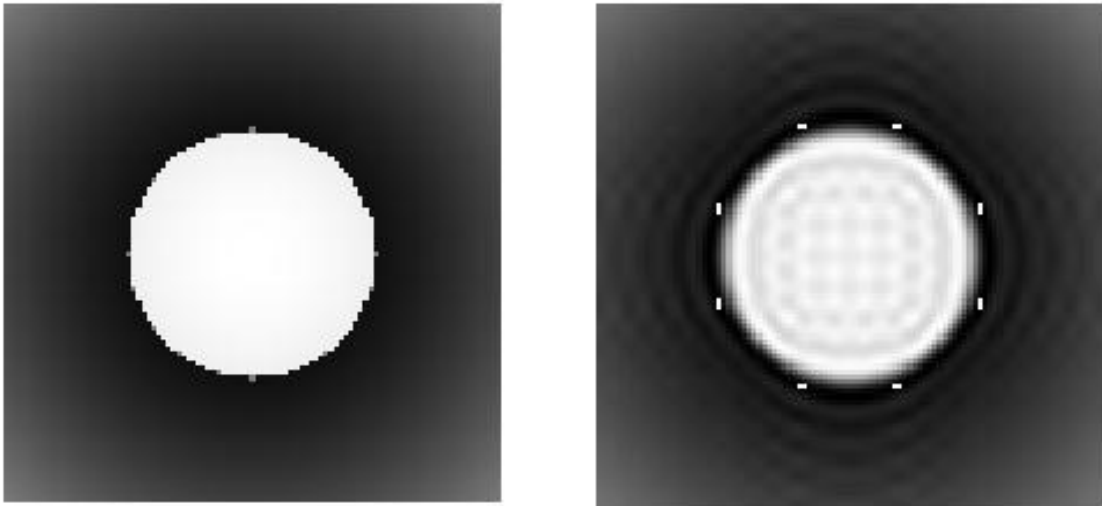


Рисунок 4.4 – Вихідне та відновлене зображення з впливом явища Гіббса

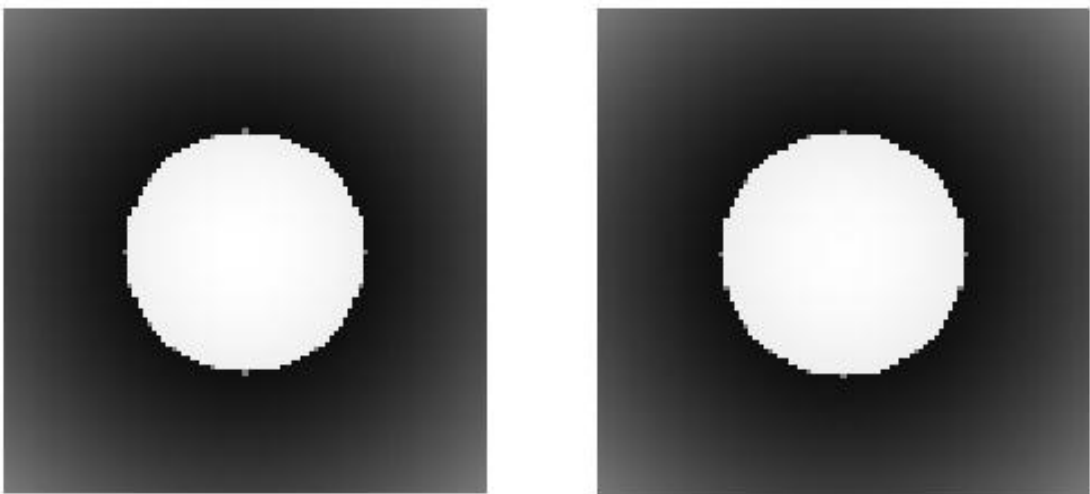


Рисунок 4.5 – Вихідне та відновлене зображення без явища Гіббса

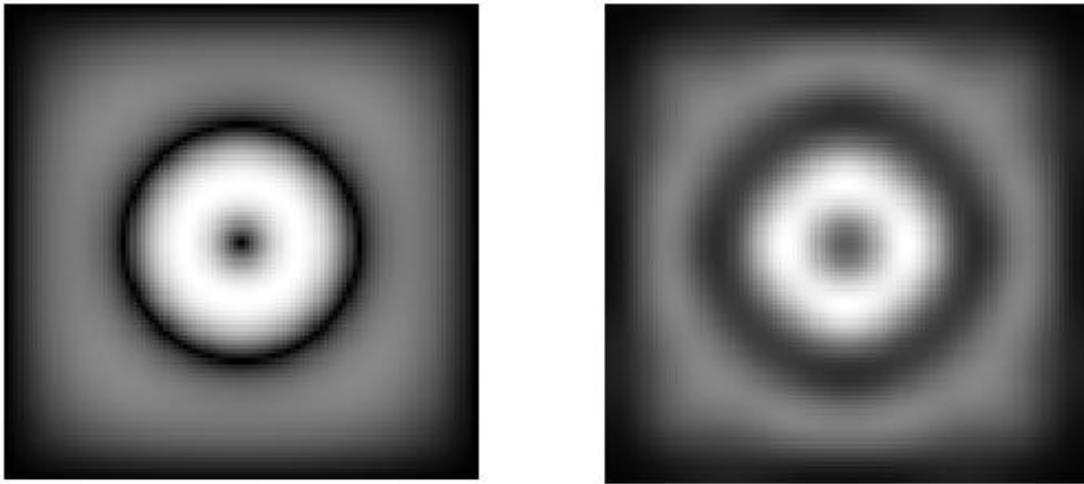


Рисунок 4.6 – Вихідна та відновлена функція $\varphi(x, y)$

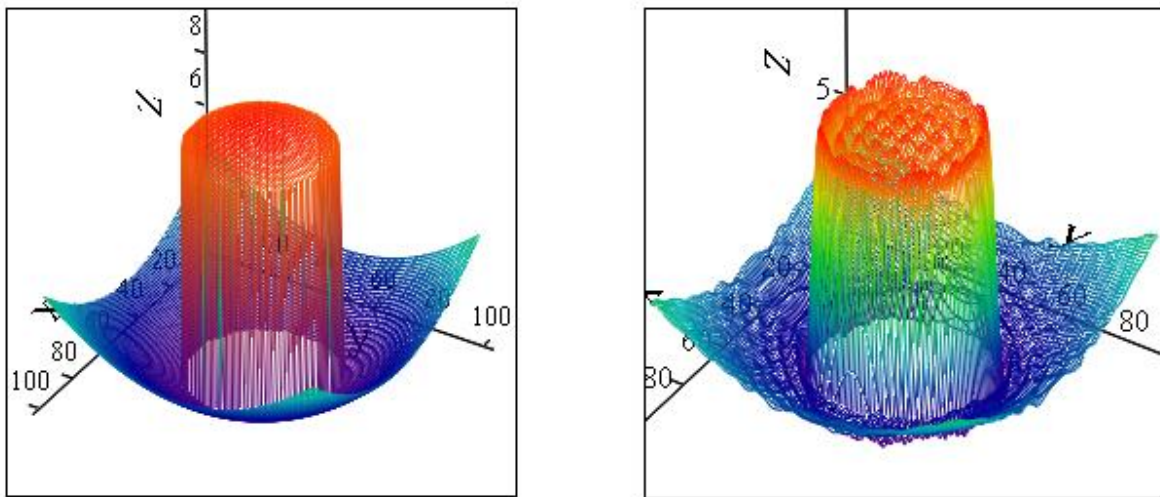


Рисунок 4.7 – Відновлена фігура без явища Гіббса та з явищем

У таблиці 4.1 Наведено порівняння похибок результатів відновлення функцій з впливом явища Гіббса та без.

Таблиця 4.1 – Порівняння результатів

	N	Максимальна відносна	Середня квадратична	Середня абсолютна
Без впливу явища Гіббса	16	0,00230	0,00015	0,00080
З впливом явища Гіббса	16	0,45530	0,56430	0,22980

4.2 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має одну лінію розриву, що є квадратом

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 1$;
- $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x, y)$;
- довжина півсторони R та центр $(0,5;0,5)$;
- проєкційні дані для функції $f(x, y)$.

Розв'язання задачі. Побудуємо функцію $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y), & w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = \sigma_1(x, y) \wedge \sigma_2(x, y),$$

$$\sigma_1(x, y) = R^2 - (x - 0,5)^2, \quad \sigma_2(x, y) = R^2 - (y - 0,5)^2.$$

Побудуємо сплайн $Sp(x, y)$:

$$Sp(x, y) = \begin{cases} \frac{w_1(x, y)}{R_1} f_1(0,5, 0,5) + \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1}\right) f_{1,N}(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ \frac{w(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} f_{2,N}(x, y) + \frac{-w_1(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} Of_2(x, y), & w_1(x, y) < 0. \end{cases}$$

Побудова неперервної функції $\varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Застосування методу О.М. Литвина [1] для знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проєкцій для функції $\varphi(x, y)$. Вважаються відомими відповідні проєкційні дані. Отримаємо функцію $\tilde{\varphi}(x, y)$.

Наближене відновлення функції $f(x, y)$:

$$\tilde{f}(x, y) = Sp(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y).$$

У чисельному експерименті для прикладу 1 задавались функції:

$$f_1(x, y) = k_1 \sin((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2), \quad f_2(x, y) = k_2 e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

де $k_1 = 10$, $k_2 = 10$ – задані числа;

$R = 0,25$ – довжина півсторони;

$(0,5; 0,5)$ – центр квадрата.

На рисунку 4.8 наведено вихідну функцію $f(x, y)$, на рисунку 4.9 зображено отриманий сплайн $Sp(x, y)$, а на рисунку 4.10 зображено отриману функцію $\varphi(x, y)$.

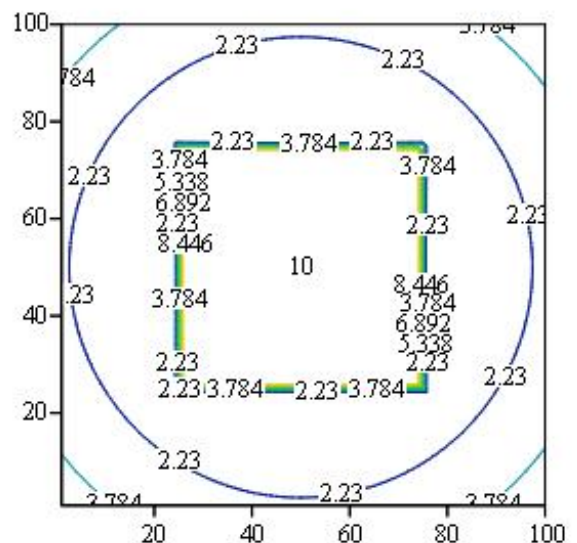
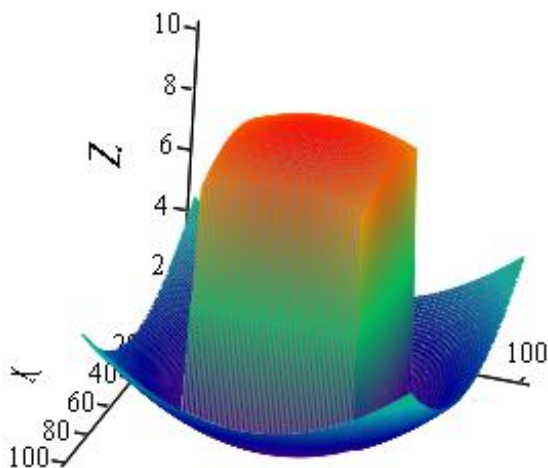


Рисунок 4.8 – Вихідна функція $f(x, y)$ та її лінії рівня

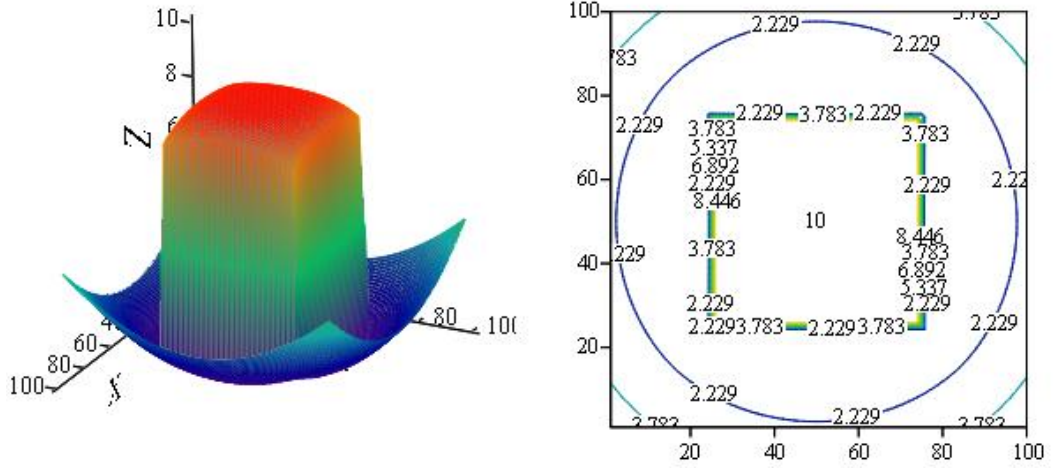


Рисунок 4.9 – Сплайн $Sp(x, y)$ та його лінії рівня

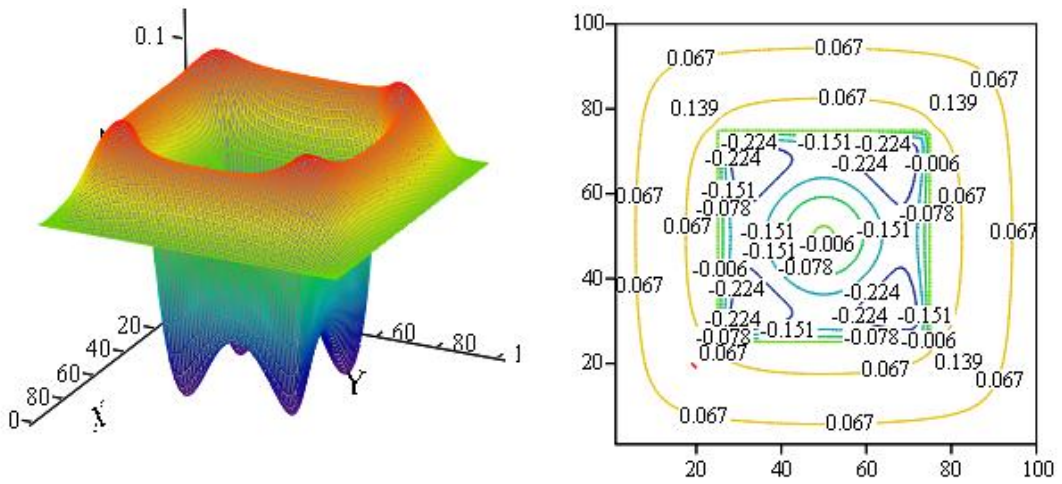


Рисунок 4.10 – Функція $\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$

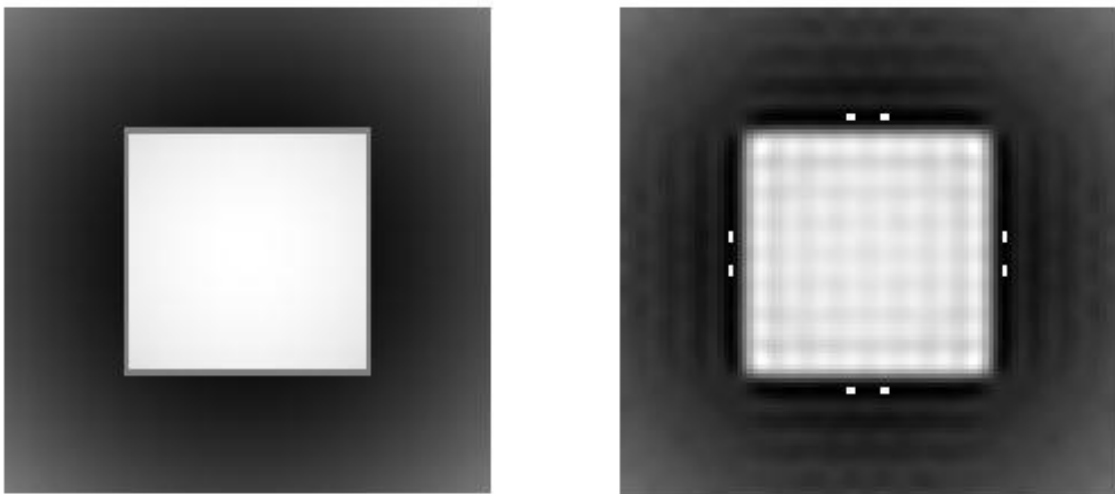


Рисунок 4.11 – Вихідне та відновлене зображення з впливом явища Гіббса

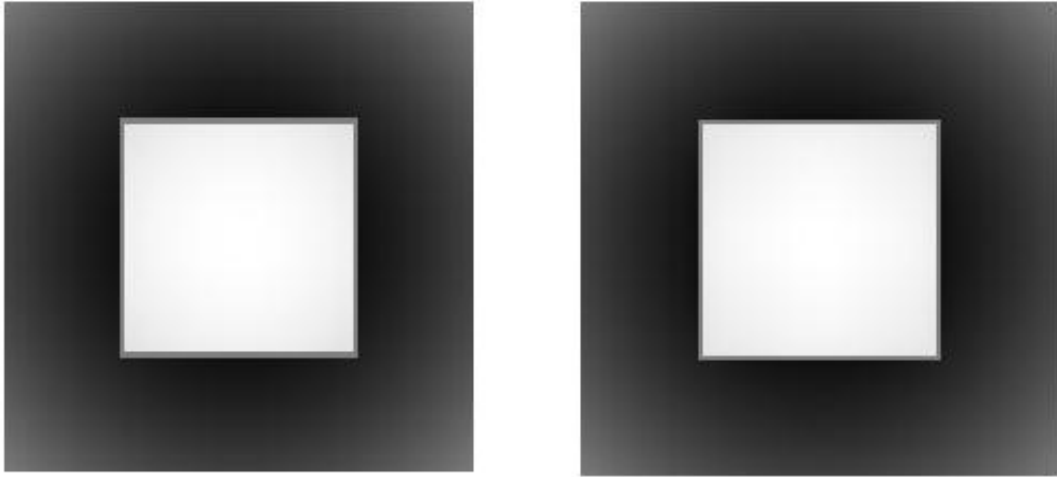


Рисунок 4.12 – Вихідне та відновлене зображення без явища Гіббса

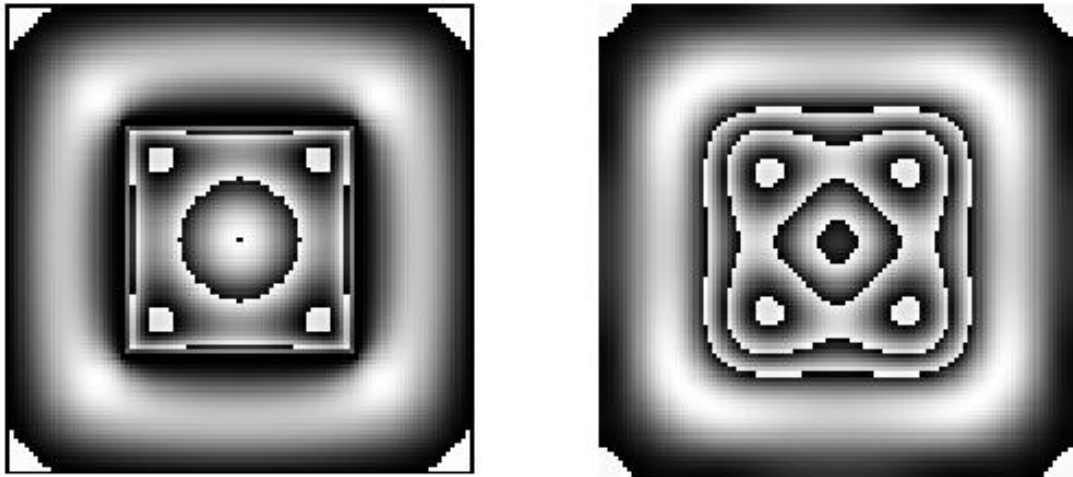


Рисунок 4.13 – Вихідна та відновлена функція $\varphi(x, y)$

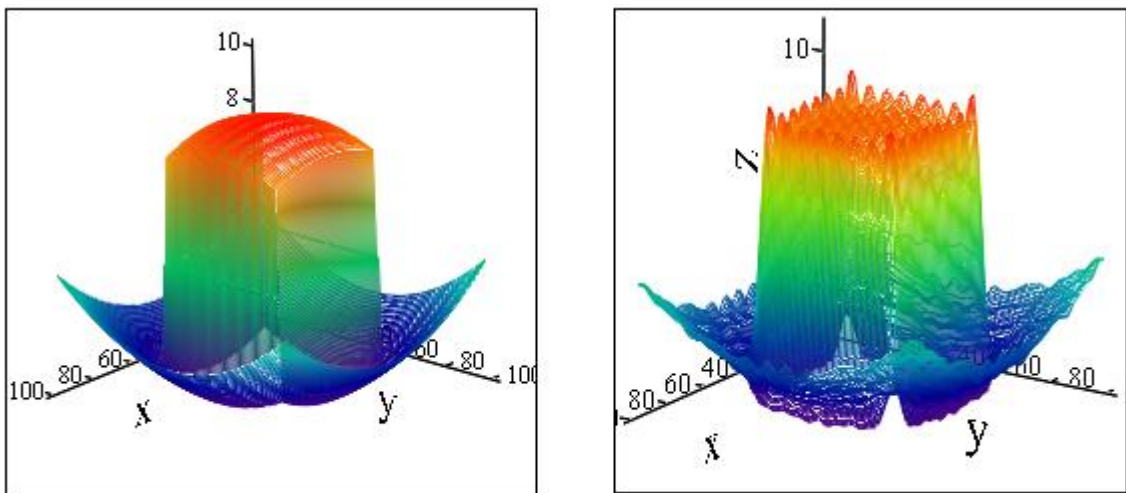


Рисунок 4.14 – Відновлена фігура без явища Гіббса та з явищем

У таблиці 4.2 Наведено порівняння похибок результатів відновлення функцій з впливом явища Гіббса та без.

Таблиця 4.2 – Порівняння результатів

	N	Максимальна відносна	Середня квадратична	Середня абсолютна
Без впливу явища Гіббса	16	0,0094	0,00034	0,00096
З впливом явища Гіббса	16	0,32265	0,40932	0,19232

4.3 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має одну лінію розриву, що є еліпсом

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 1$;
- $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x, y)$;
- довжина півосі a та b та центр $(0,5;0,5)$;
- проєкційні дані для функції $f(x, y)$.

Розв'язання задачі. Побудуємо функцію $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y), & w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = 1 - \sqrt{\sigma(x, y)},$$

$$\sigma(x, y) = \frac{(x - 0,5)^2}{a} + \frac{(y - 0,5)^2}{b}.$$

Побудуємо сплайн аналогічно як у попередніх задачах $Sp(x, y)$:

$$Sp(x, y) = \begin{cases} \frac{w_1(x, y)}{R_1} f_1(0.5, 0.5) + \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1}\right) f_{1,N}(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ \frac{w(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} f_{2,N}(x, y) + \frac{-w_1(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} Of_2(x, y), & w_1(x, y) < 0. \end{cases}$$

Побудова неперервної функції $\varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Застосування методу О.М. Литвина [1] для знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проєкцій для функції $\varphi(x, y)$. Вважаються відомими відповідні проєкційні дані. Отримаємо функцію $\tilde{\varphi}(x, y)$.

Наближене відновлення функції $f(x, y)$:

$$\tilde{f}(x, y) = Sp(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y).$$

У чисельному експерименті для прикладу 1 задавались функції:

$$f_1(x, y) = k_1 \sin((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2), \quad f_2(x, y) = k_2 e^{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2},$$

де $k_1 = 10$, $k_2 = 10$ – задані числа;

$a = 0.25$, $b = 0.16$ – довжина півосей;

$(0.5; 0.5)$ – центр еліпса.

На рисунку 4.15 наведено вихідну функцію $f(x, y)$, на рисунку 4.16 зображено отриманий сплайн $Sp(x, y)$, а на рисунку 4.17 зображено отриману функцію $\varphi(x, y)$.

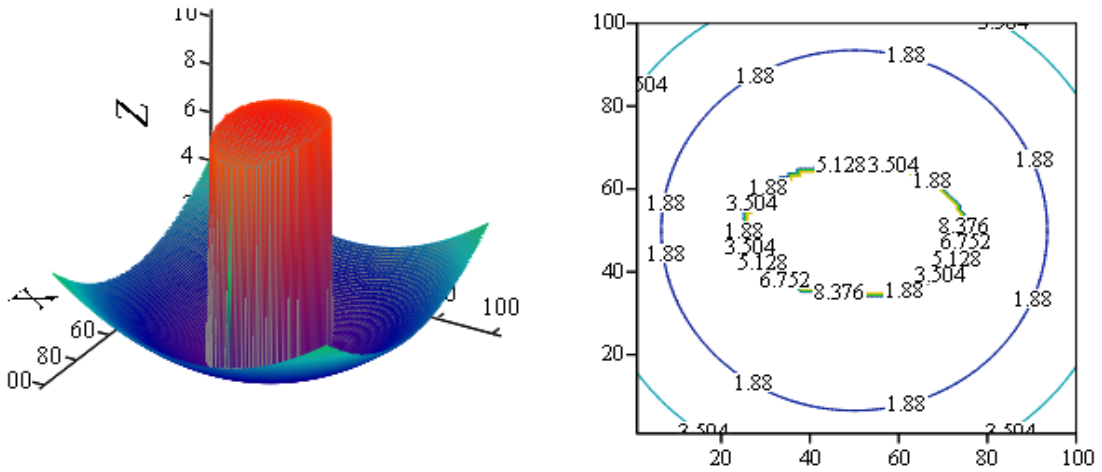


Рисунок 4.15 – Вихідна функція $f(x, y)$ та її лінії рівня

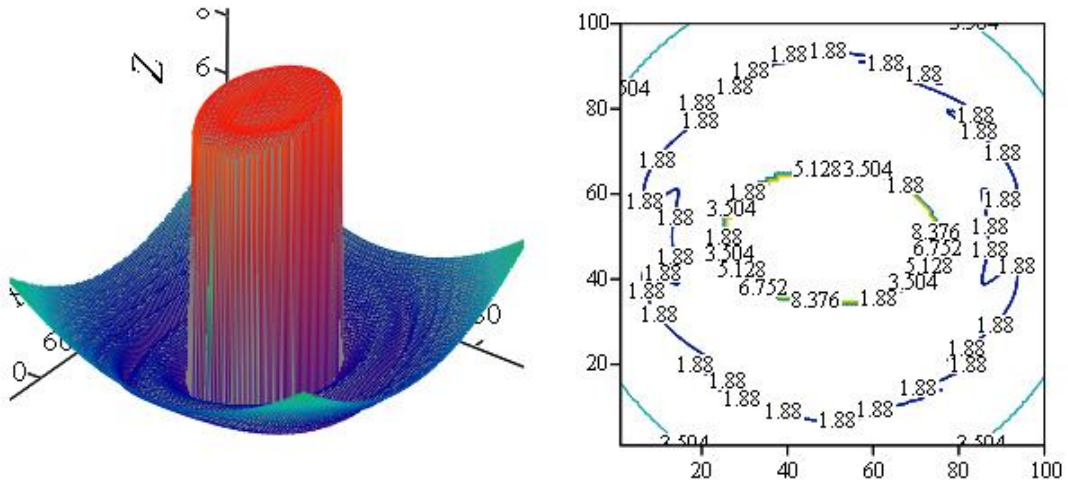


Рисунок 4.16 – Сплайн $Sp(x, y)$ та його лінії рівня

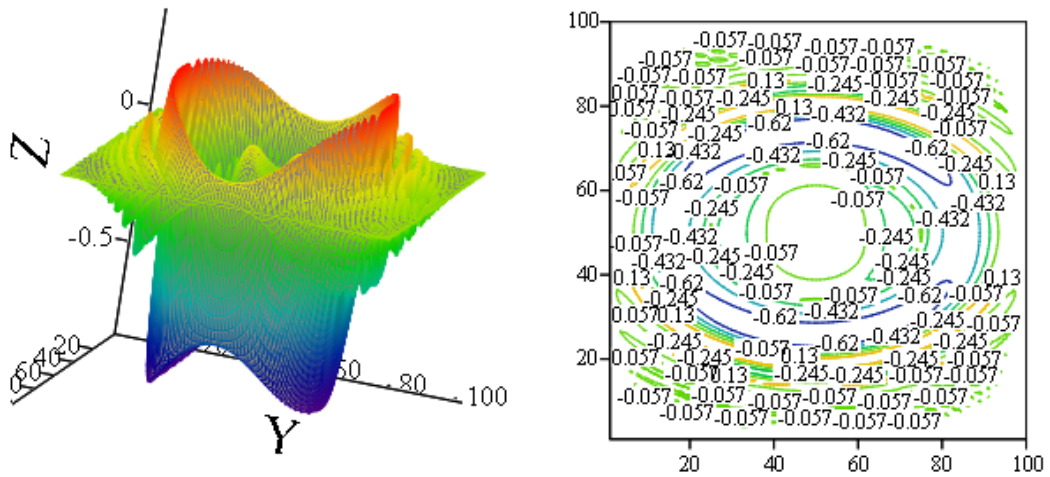


Рисунок 4.17 – Функція $\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$

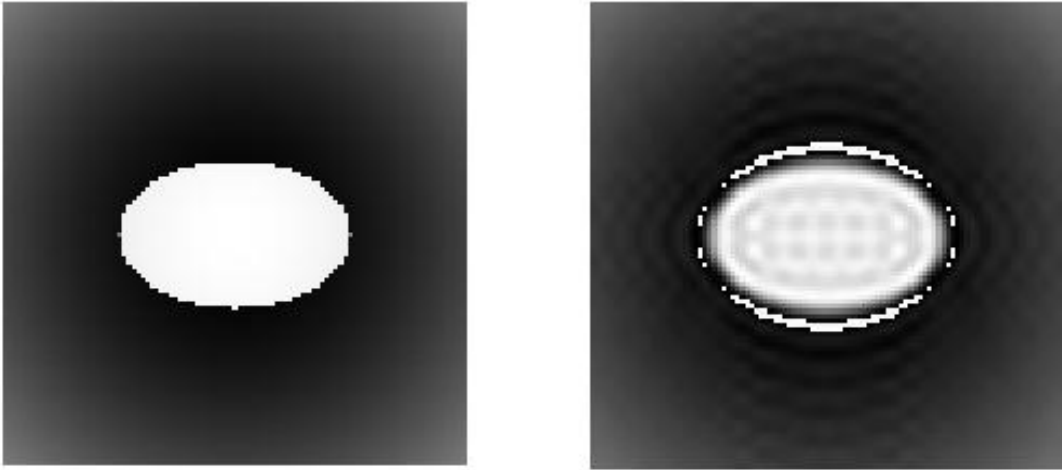


Рисунок 4.18 – Вихідне та відновлене зображення з впливом явища Гіббса

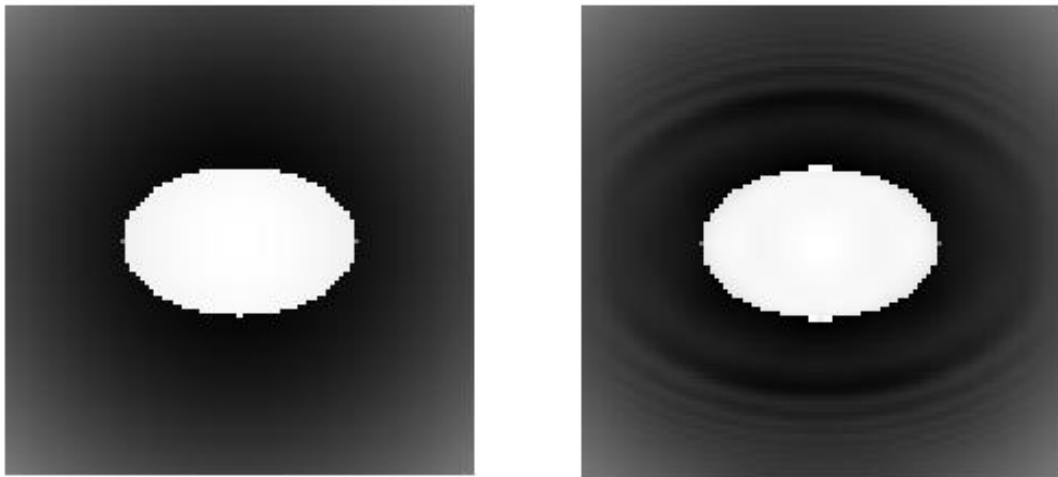


Рисунок 4.19 – Вихідне та відновлене зображення без явища Гіббса

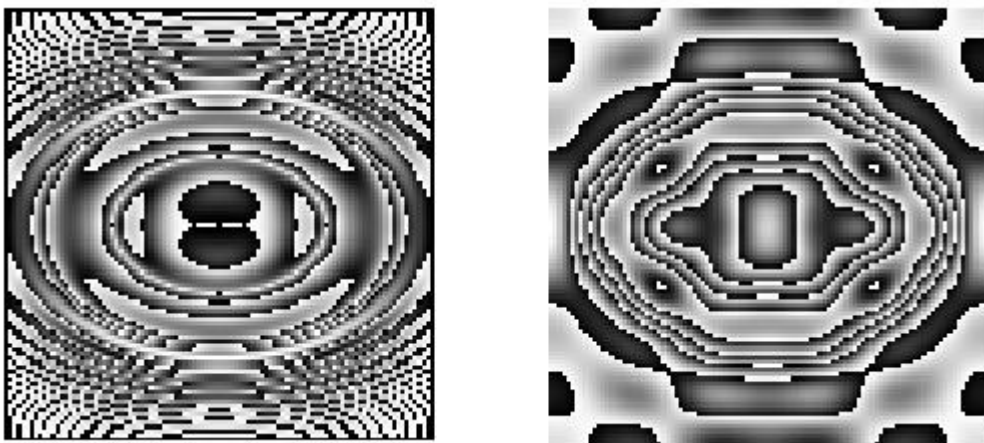


Рисунок 4.20 – Вихідна та відновлена функція $\varphi(x, y)$

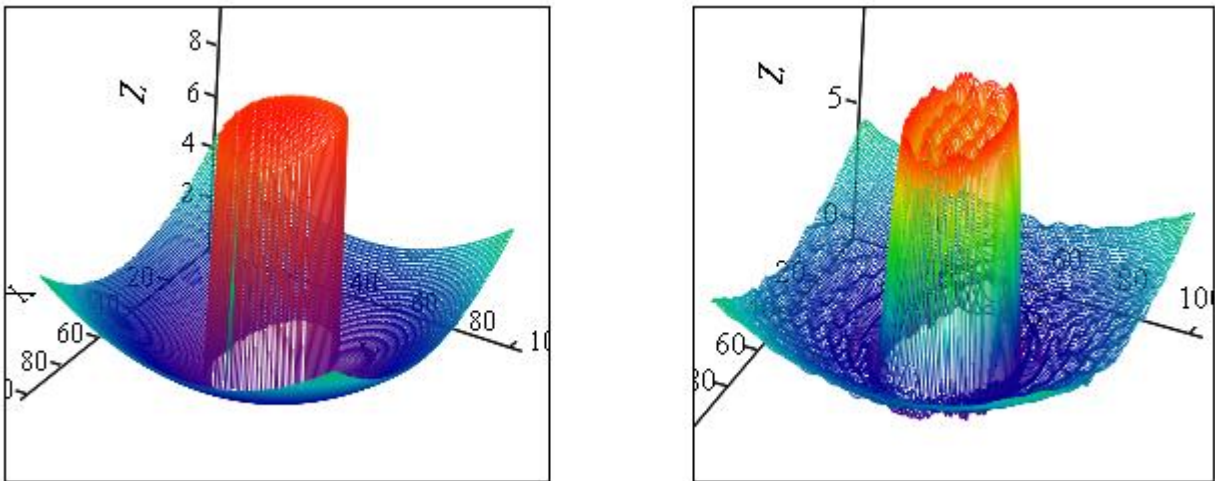


Рисунок 4.21 – Відновлена фігура без явища Гіббса та з явищем

У таблиці 4.3 Наведено порівняння похибок результатів відновлення функцій з впливом явища Гіббса та без.

Таблиця 4.3 – Порівняння результатів

	N	Максимальна відносна	Середня квадратична	Середня абсолютна
Без впливу явища Гіббса	16	0,00023	0,00008	0,00017
З впливом явища Гіббса	16	0,12233	0,23231	0,14324

4.4 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має дві лінії розриву, що є концентричними колами

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 2$;
- $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ - задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x, y)$;
- радіуси кіл R_1, R_2 , їх центр $(0,5;0,5)$;
- проєкційні дані для функції $f(x, y)$.

Побудова функції $f(x, y)$, задаємо функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & 0 \leq w(x, y) < R_1, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w(x, y) = R_1, \\ f_2(x, y), & R_1 < w(x, y) < R_2, \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & w(x, y) = R_2, \\ f_3(x, y), & (w(x, y) > R_2) \wedge (x(1-x)y(1-y) \geq 0), \end{cases}$$

$$w(x, y) = \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2}.$$

Побудова сплайну $Sp(x, y)$:

– якщо $0 < w(x, y) < R_1$:

$$Sp(x, y) = \frac{R_1 - w(x, y)}{R_1} f_1(0.5, 0.5) + \frac{w(x, y)}{R_1} f_1 \left(x - (w(x, y) - R_1) \frac{\partial w}{\partial x}, y - (w(x, y) - R_1) \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

– якщо $w(x, y) = R_1$:

$$Sp(x, y) = \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2};$$

– якщо $R_1 < w(x, y) < R_2$:

$$Sp(x, y) = \frac{w(x, y) - R_2}{R_1 - R_2} f_2 \left(x - (w(x, y) - R_1) \frac{\partial w}{\partial x}, y - (w(x, y) - R_1) \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{w(x, y) - R_1}{R_2 - R_1} f_2 \left(x - (w(x, y) - R_2) \frac{\partial w}{\partial x}, y - (w(x, y) - R_2) \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

– якщо $w_2(x, y) = R_2$:

$$Sp(x, y) = \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2};$$

– якщо $(w(x, y) > R_2) \wedge (x(x-1)y(y-1) \geq 0)$:

$$Sp(x, y) = \frac{\Omega(x, y) f_3(x - (w(x, y) - R_2) \frac{\partial w}{\partial x}, y - (w(x, y) - R_2) \frac{\partial w}{\partial y})}{\Omega(x, y) + (w(x, y) - R_2)} +$$

$$+ \frac{Of_3(x, y)(w - R_2)}{\Omega(x, y) + (w(x, y) - R_2)}.$$

Границя області:

$$\Omega(x, y) = x(1-x)y(1-y).$$

У чисельному експерименті для прикладу 2 задавались функції:

$$f_1(x, y) = k_1 \sin((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2),$$

$$f_2(x, y) = k_2 e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

$$f_3(x, y) = b_0 + b_1(w - R_2) + b_2(w - R_2)^2 + b_3(w - R_2)^3,$$

де $k_1, k_2, b_0, b_1, b_2, b_3$ – задані числа. Радіуси кіл;

$R_1 = 0,25, R_2 = 0,35$ – радіуси кіл;

$(0,5; 0,5)$ – центр кіл.

На рисунку 4.22 наведено вихідну функцію $f(x, y)$, на рисунку 4.23 зображено отриманий сплайн $Sp(x, y)$, а на рисунку 4.24 зображено отриману функцію $\varphi(x, y)$.

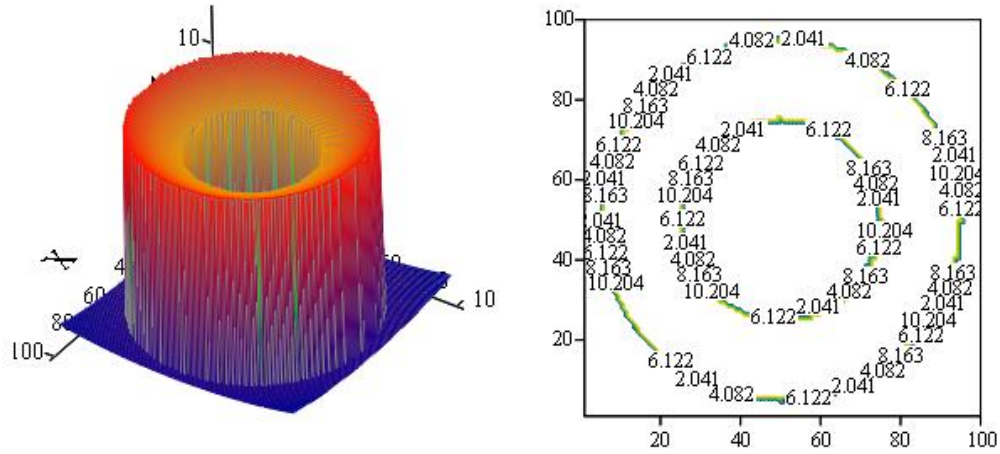


Рисунок 4.22 – Вихідна функція $f(x, y)$ та її лінії рівня

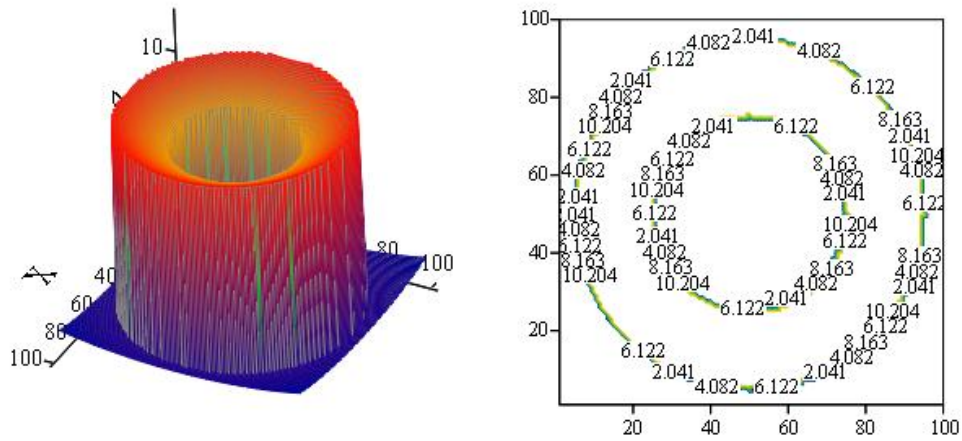


Рисунок 4.23 – Сплайн $Sp(x, y)$ та його лінії рівня

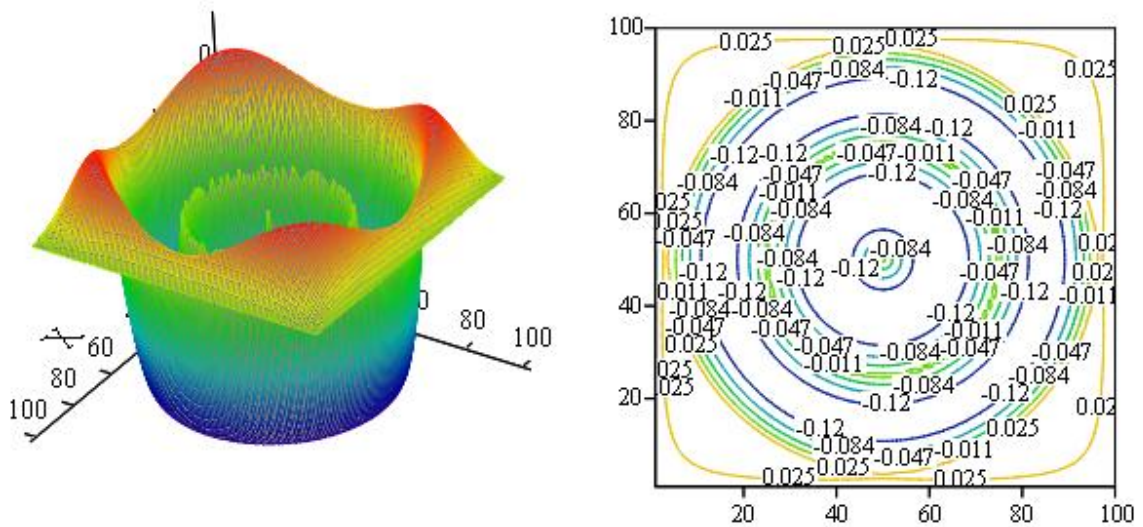


Рисунок 4.24 – Функція $\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$

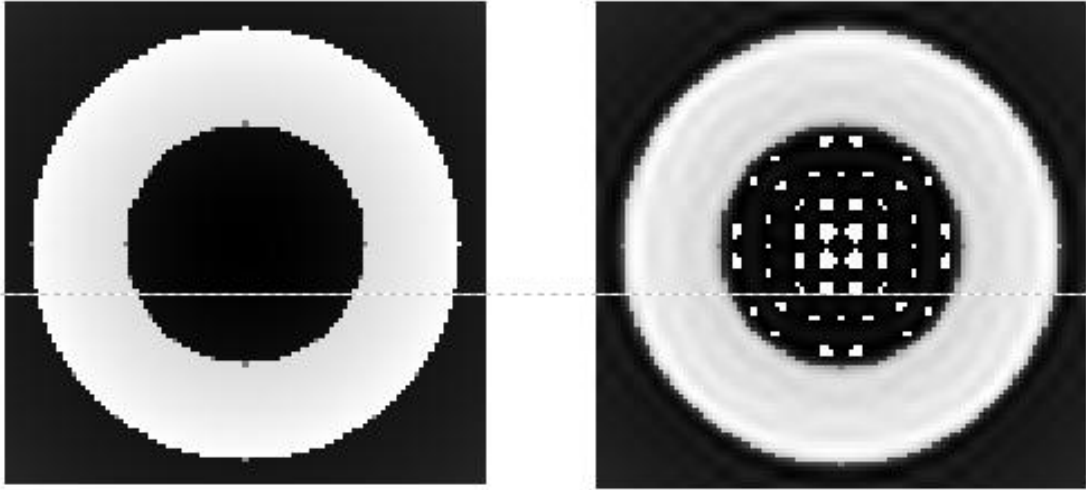


Рисунок 4.25 – Вихідне та відновлене зображення з впливом явища Гіббса

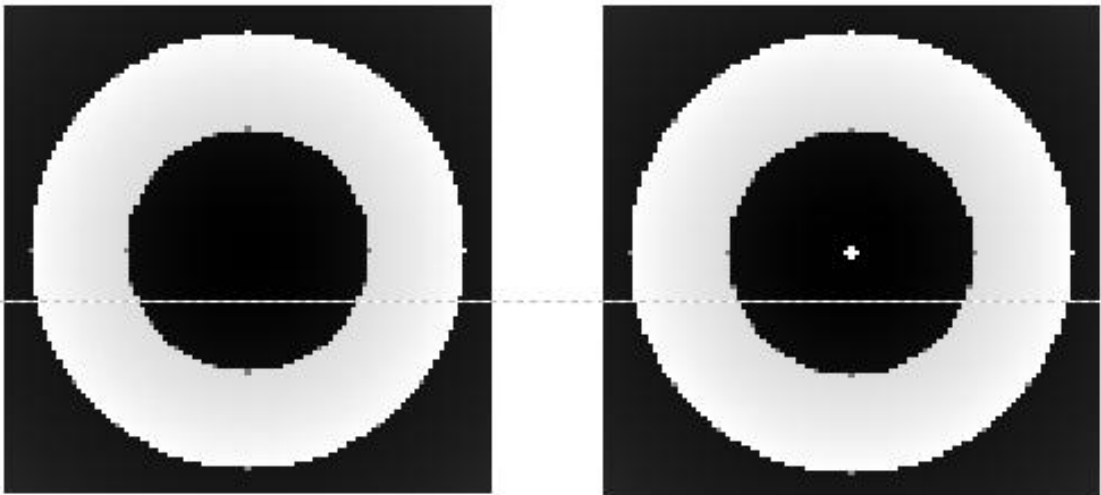


Рисунок 4.26 – Вихідне та відновлене зображення без явища Гіббса

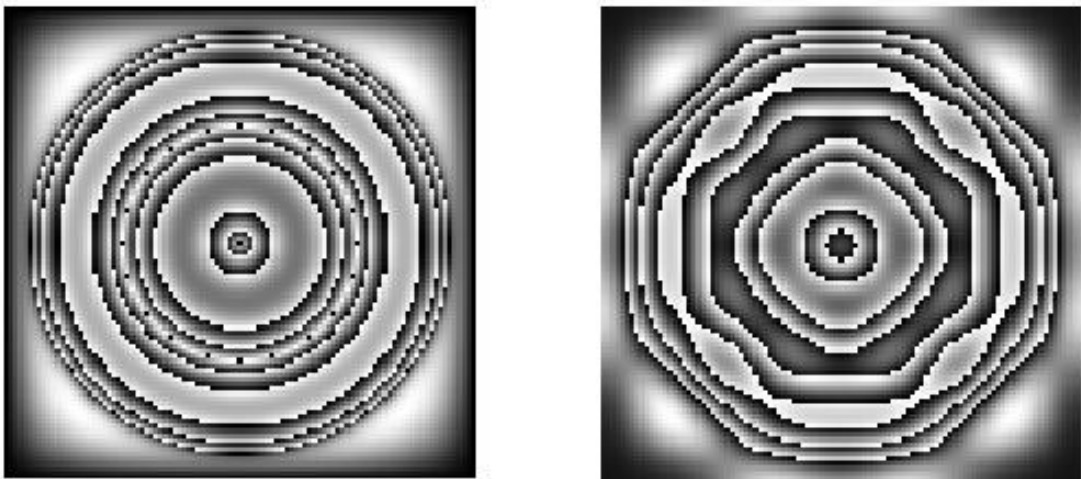


Рисунок 4.27 – Вихідна та відновлена функція $f(x, y)$

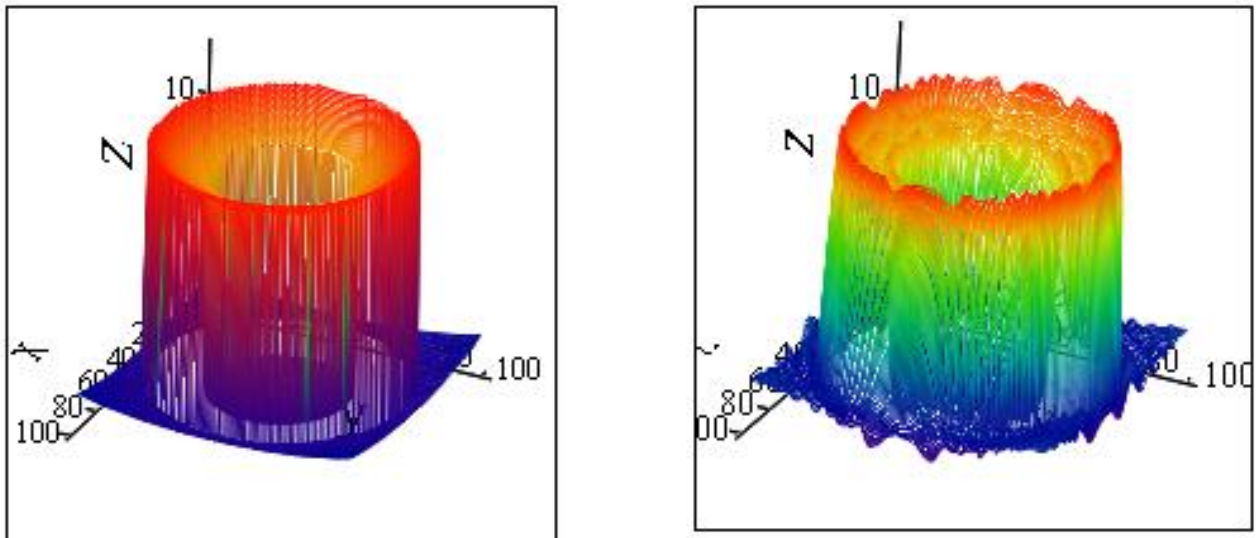


Рисунок 4.28 – Відновлена фігура без явища Гіббса та з явищем

У таблиці 4.4 Наведено порівняння похибок результатів відновлення функцій з впливом явища Гіббса та без.

Таблиця 4.4 – Порівняння результатів

	N	Максимальна відносна	Середня квадратична	Середня абсолютна
Без впливу явища Гіббса	16	0,00098	0,00032	0,00045
З впливом явища Гіббса	16	0,32523	0,43286	0,38723

4.5 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має дві лінії розриву, що є вкладеними квадратами

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 2$;
- $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ - задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x, y)$;
- півсторони квадратів R_1, R_2 , їх центр $(0,5;0,5)$;

– проєкційні дані для функції $f(x, y)$.

Побудова функції $f(x, y)$, задаємо функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y), & w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) > 0, \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & w_2(x, y) = 0, \\ f_3(x, y), & w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_{1,2}(x, y) = \sigma_{1,2}(x, y) \wedge \sigma_{1,2}(x, y),$$

$$\sigma_{1,2}(x, y) = R_{1,2}^2 - (x - 0,5)^2,$$

$$\sigma_{1,2}(x, y) = R_{1,2}^2 - (y - 0,5)^2.$$

У чисельному експерименті для прикладу 2 задавались функції:

$$f_1(x, y) = k_1 \sin((x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2),$$

$$f_2(x, y) = k_2 e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

$$f_3(x, y) = b_0 + b_1(w - R_2) + b_2(w - R_2)^2 + b_3(w - R_2)^3.$$

де $k_1, k_2, b_0, b_1, b_2, b_3$ – задані числа, довжини півсторін;

$R_1 = 0,25, R_2 = 0,35$ – довжини півсторін;

$(0,5; 0,5)$ центр кіл.

На рисунку 4.29 наведено вихідну функцію $f(x, y)$, на рисунку 4.30 зображено отриманий сплайн $Sp(x, y)$, а на рисунку 4.31 зображено отриману функцію $\varphi(x, y)$.

У таблиці 4.5 Наведено порівняння похибок результатів відновлення функцій з впливом явища Гіббса та без.

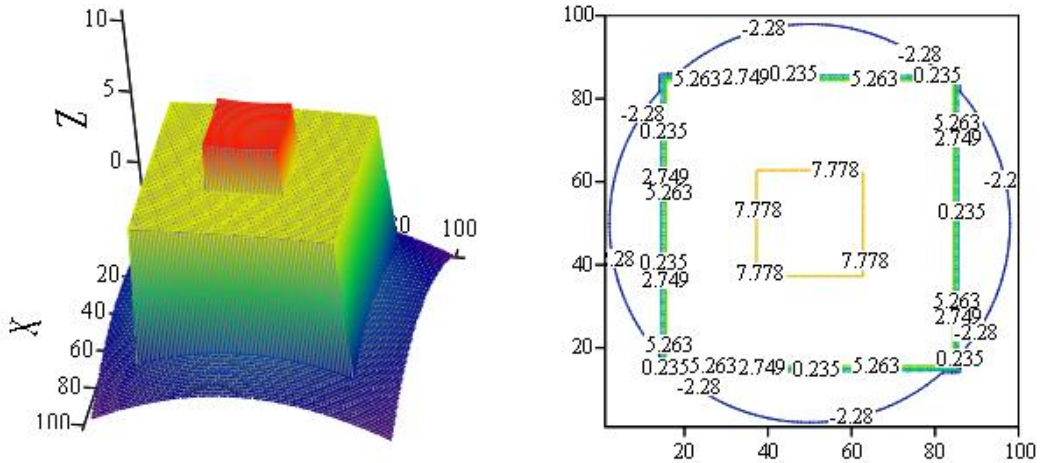


Рисунок 4.29 – Вихідна функція $f(x, y)$ та її лінії рівня

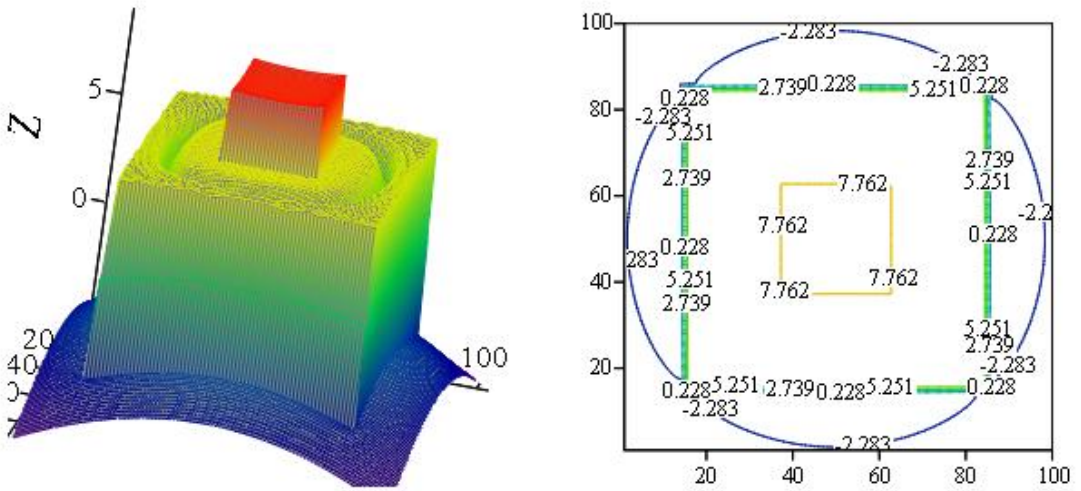


Рисунок 4.30 – Сплайн $S_p(x, y)$ та його лінії рівня

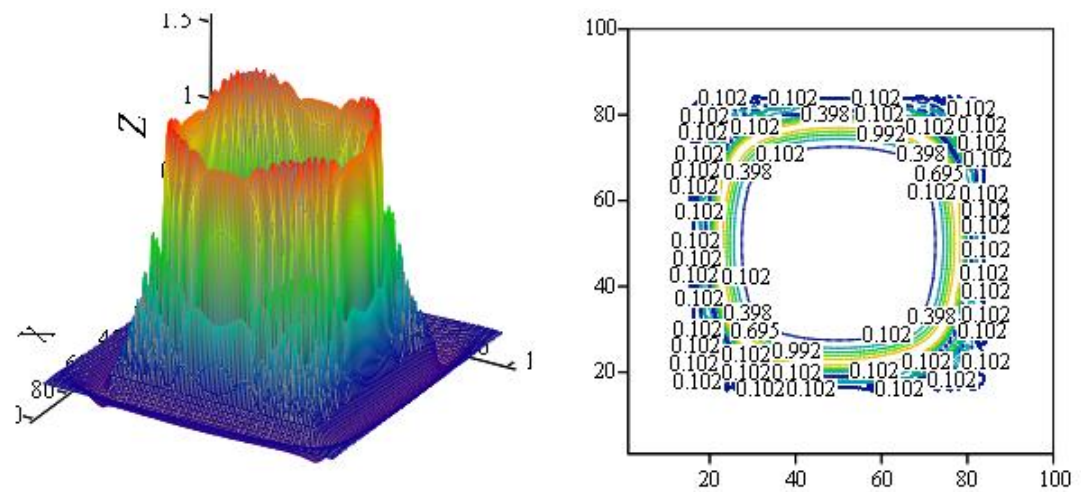


Рисунок 4.31 – Функція $\varphi(x, y) = f(x, y) - S_p(x, y)$

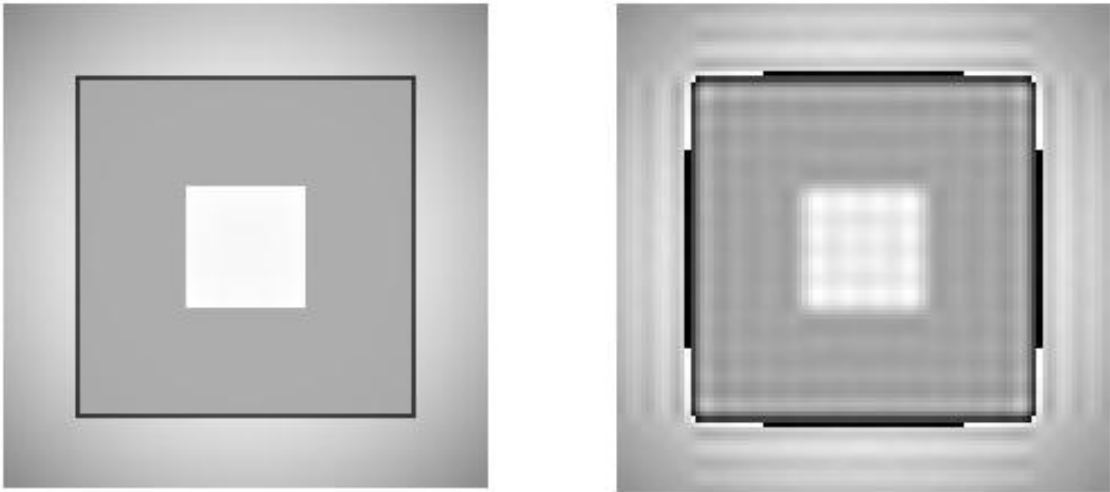


Рисунок 4.32 – Вихідне та відновлене зображення з впливом явища Гіббса

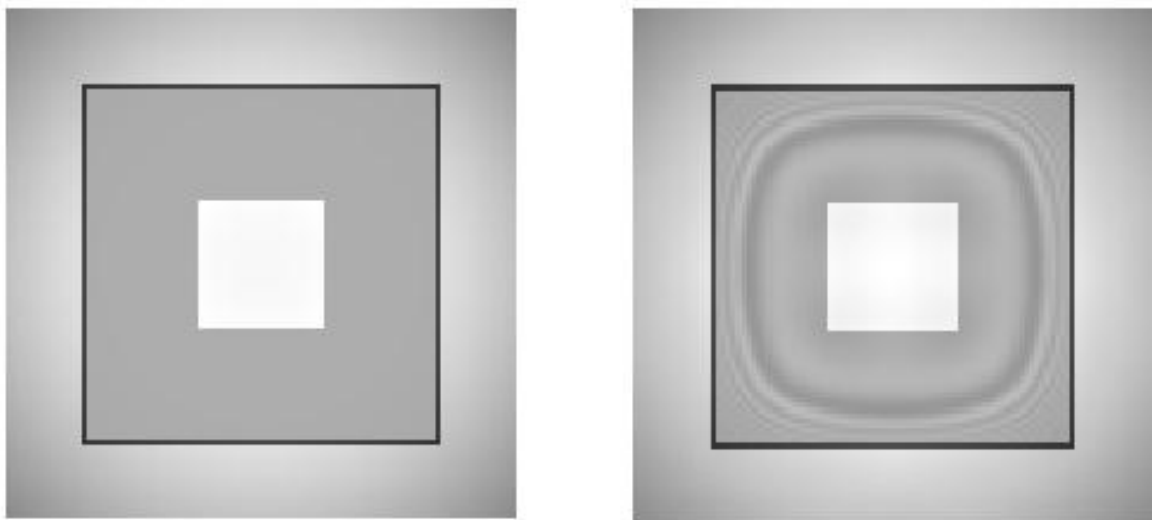


Рисунок 4.33 – Вихідне та відновлене зображення без явища Гіббса

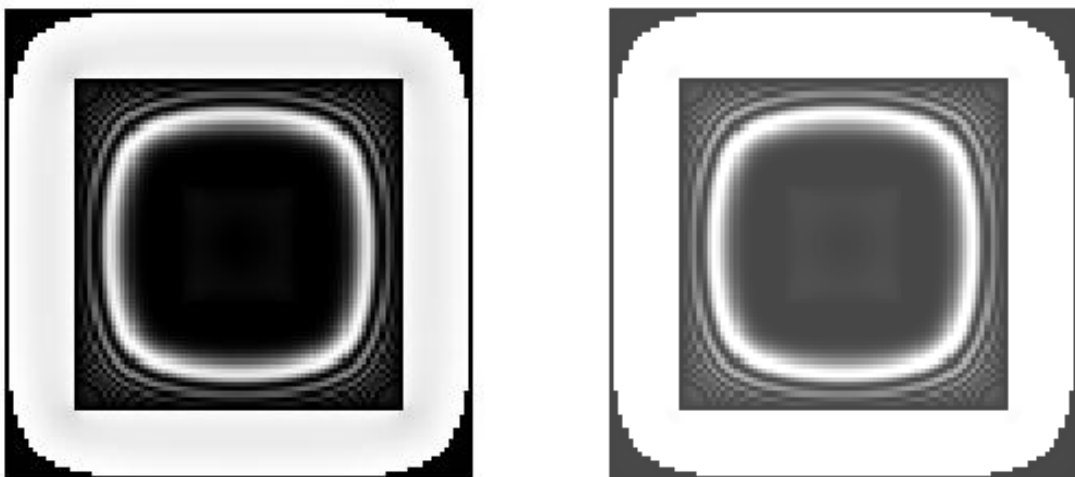


Рисунок 4.34 – Вихідна та відновлена функція $\varphi(x, y)$

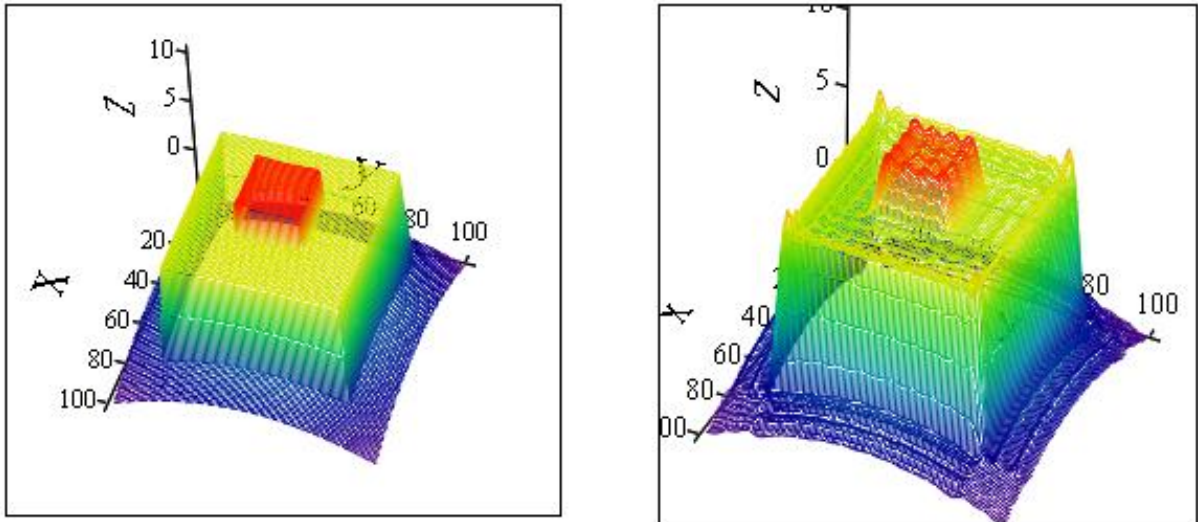


Рисунок 4.35 – Відновлена фігура без явища Гіббса та з явищем

Таблиця 4.5 – Порівняння результатів

	N	Максимальна відносна	Середня квадратична	Середня абсолютна
Без впливу явища Гіббса	16	0,00128	0,00031	0,00093
З впливом явища Гіббса	16	0,32124	0,54328	0,23449

4.6 Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$, яка має дві лінії розриву, що є вкладеними еліпсами

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 2$;
- $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ – задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x, y)$;
- півосі еліпсів a_1, a_2, b_1, b_2 , їх центр $(0,5; 0,5)$;
- проєкційні дані для функції $f(x, y)$.

Побудова функції $f(x, y)$, задаємо функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & w_1(x, y) > 0, \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y), & w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) > 0, \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & w_2(x, y) = 0, \\ f_3(x, y), & w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_{1,2}(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{x^2}{a_{1,2}^2} + \frac{y^2}{b_{1,2}^2}}.$$

У чисельному експерименті для прикладу 2 задавались функції:

$$f_1(x, y) = k_1 \sin((x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2),$$

$$f_2(x, y) = k_2 e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

$$f_3(x, y) = b_0 + b_1(w - R_2) + b_2(w - R_2)^2 + b_3(w - R_2)^3.$$

де $k_1, k_2, b_0, b_1, b_2, b_3$ – задані числа;

$(0,5; 0,5)$ – центр еліпсів.

На рисунку 4.36 наведено вихідну функцію $f(x, y)$, на рисунку 4.37 зображено отриманий сплайн $Sp(x, y)$, а на рисунку 4.38 зображено отриману функцію $\varphi(x, y)$.

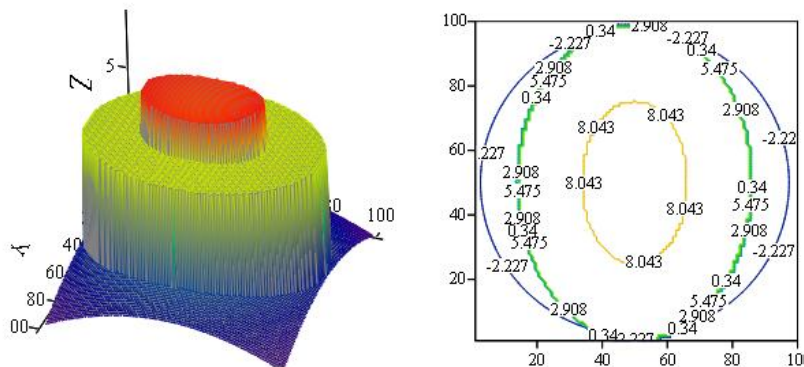


Рисунок 4.36 – Вихідна функція $f(x, y)$ та її лінії рівня

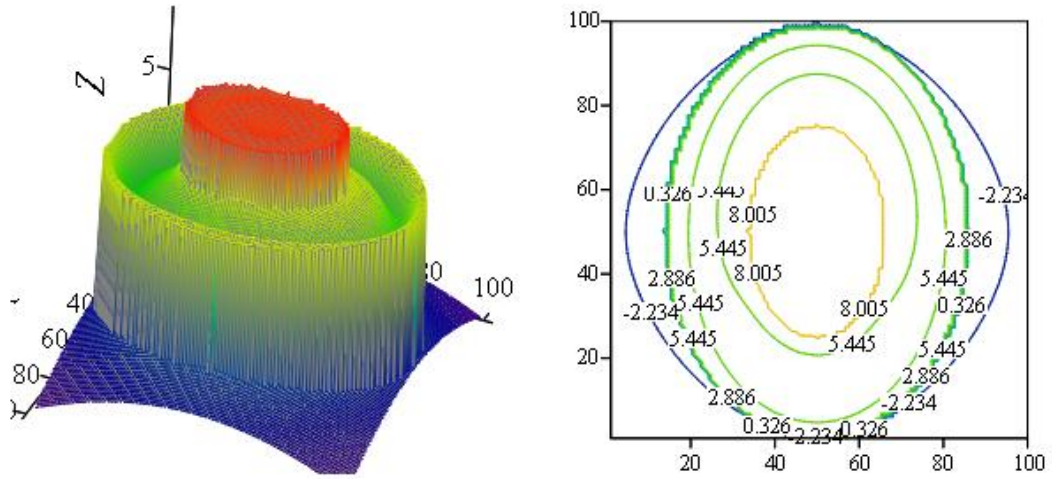


Рисунок 4.37 – Сплайн $Sp(x, y)$ та його лінії рівня

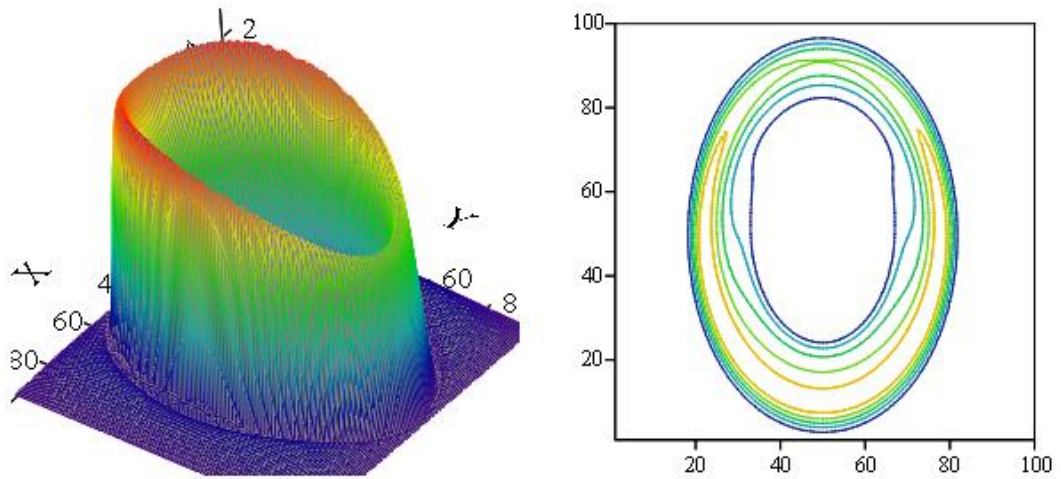


Рисунок 4.38 – Функція $\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$

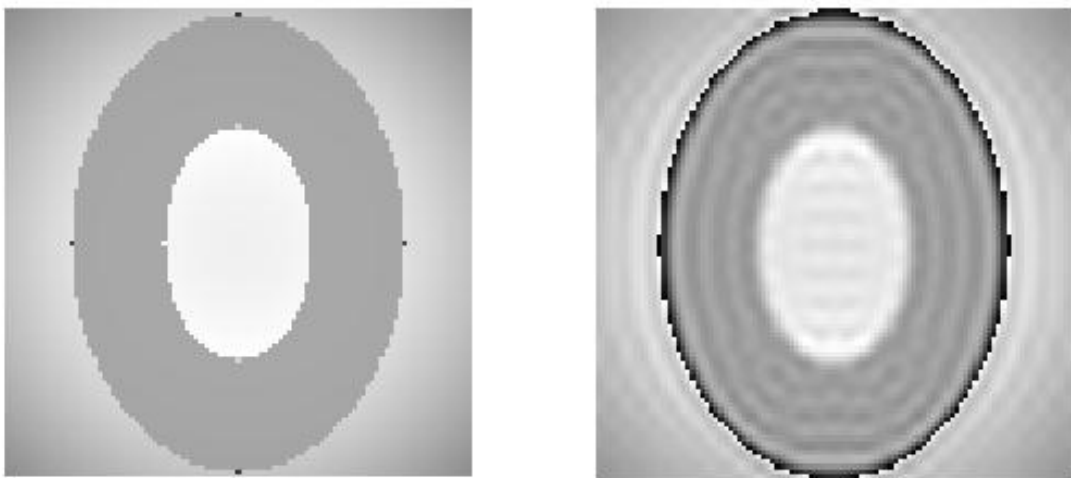


Рисунок 4.39 – Вихідне та відновлене зображення без явища Гіббса

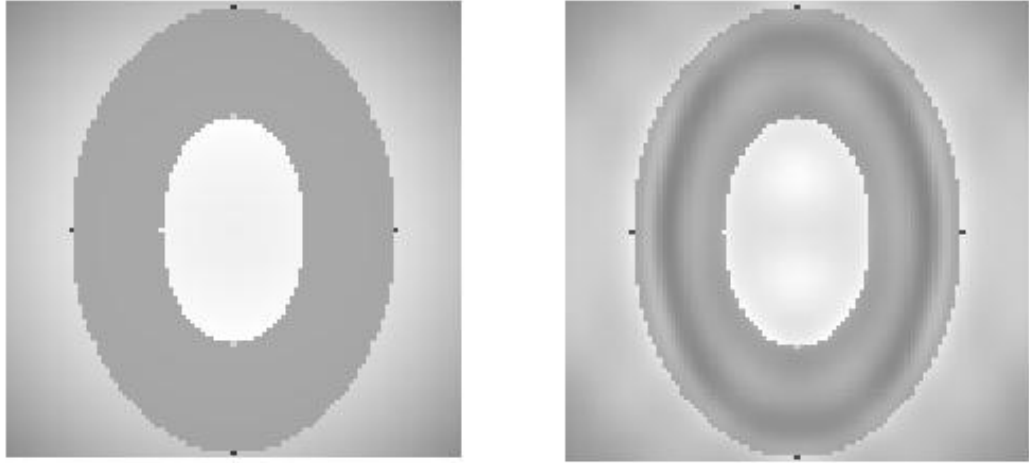


Рисунок 4.40 – Вихідна та відновлена функція $\varphi(x, y)$

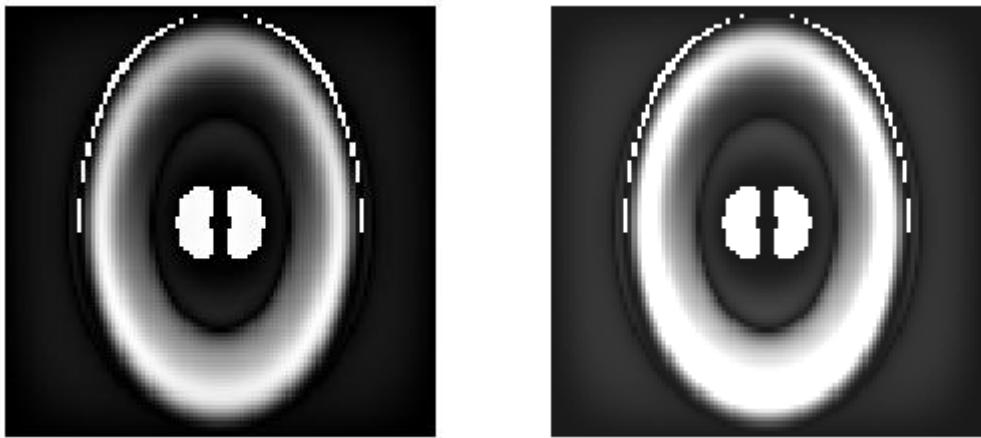


Рисунок 4.41 – Вихідна та відновлена функція $\varphi(x, y)$

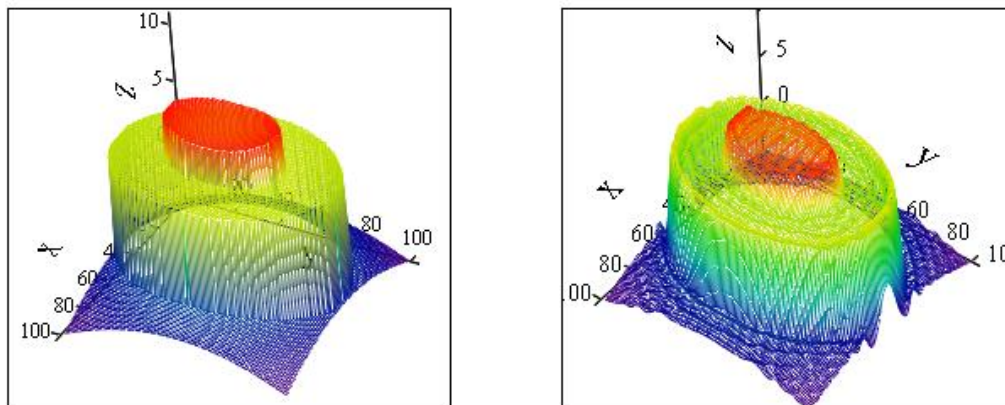


Рисунок 4.42 – Відновлена фігура без явища Гіббса та з явищем

У таблиці 4.6 Наведено порівняння похибок результатів відновлення функцій з впливом явища Гіббса та без.

Таблиця 4.6 – Порівняння результатів

	N	Максимальна відносна	Середня квадратична	Середня абсолютна
Без впливу явища Гіббса	16	0,00150	0,00023	0,0082
З впливом явища Гіббса	16	0,23432	0,42245	0,32423

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Даний метод наближення розривних функцій сплайнами та відновлення за допомогою метода Фур'є можна застосовувати на практиці у галузі медицини, а саме при дослідженні внутрішньої структури тіла та органів людини рентгенівським випромінюванням.

Розглянутий підхід підміни вихідної функцію на її наближення за допомогою сплайнів дозволяє уникнути багатьох похибок при відновленні зображень, що збільшує точність, а значить і якість томографічних знімків. Це дає можливість застосувати розглянуту математичну модель на практиці.

Також в даній роботі наведено підхід, який дозволяє розривну функцію звести до подібної, яка буде неперервна. В математичних моделях та теоріях дуже часто є необхідною умова неперервності досліджуваної функції. Тому викладки представлені в роботі можна застосувати для інших моделей, алгоритмів, які не мають відношення до обчислювальної томографії.

В цілому, розрахункові формули для перетворення проекцій зображення у вихідний вигляд можуть бути застосовані в інших інженерних галузях.

ВИСНОВКИ

Під час роботи ми при протестували методи Фур'є для реконструкції деяких фігур з одною та двома лініями розриву за їх проєкційними даними, навели розрахункові формули та запропонували програмну реалізацію методів у середовищі MathCad. У роботі розглянули явище Гіббса, яке дає додаткову похибку та запропонували застосовувати розривні спайни для наближення вихідної функції та усунення даного ефекту.

В розглянутих прикладах різниця між наближуваною функцією $f(x, y)$ і розривним сплайном $Sp(x, y)$ є неперервною функцією, що дозволяє наближувати її з використанням методу скінченних сум Фур'є з проєкційними даними.

Збільшення порядку скінченних сум Фур'є приводить до зменшення похибки наближення функції $f(x, y)$. При цьому для обчислення коефіцієнтів Фур'є використовуються проєкції. Явище Гіббса в наближуваній функції відсутнє.

Запропонований метод є одним з ефективних підходів уникнення явища Гіббса, який виникає при наближенні сумами Фур'є розривних функцій двох змінних. Для випадку, коли теоретичний вигляд структури досліджуваного зображення відомий, наприклад (структура організму людини у заданих площинах складається з кісток, м'язів тощо), пропонується для побудови $Sp(x, y)$ використовувати сплайн-інтерлінацію та сплайн-інтерфлетацію функцій на основі розривних сплайнів.

Отже, запропонований метод є одним з ефективних підходів уникнення явища Гіббса, який виникає при наближенні сумами Фур'є розривних функцій двох змінних.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірник наукових праць. Вип. 125. 2000. С. 27–35.
2. Литвин О.М., Кулик С.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // Проблеми машинобудування. 2008. Т. 11, № 2. С. 56-65.
3. Gottlieb D., Gustafsson B., Forssen P. On the Direct Fourier Method for Computer Tomography // IEEE Transactions On Medical Imaging, V. 19, N. 3, March 2000, P. 223 – 232.
4. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Москва : Мир, 1990. 288 с.
5. Андрухів А.І. Алгебраїчний метод відновлення зображення // Вісник національного університету «Львівська Політехніка». Комп'ютерні системи та мережі. 2007. № 603. С. 12 – 14.
6. Jiang M. and Wang Ge. Development of iterative algorithms for image reconstruction, 2005. P. 77–86.
7. Trummer M.R. Reconstructing pictures from projections: on the convergence of the ART algorithm with relaxation // Computing. 1981. V.3. P. 189–195.
8. Булыгин В. С. Явление Гиббса // Московский физико-технический государственный университет, 23 октября 2012 г. URL : https://mipt.ru/education/chair/physics/S_III/Method_3/G_t_an/BulyginGibbs.pdf (дата звернення: 01.06.2019).
9. J. Willard Gibbs. Fourier's Series // Nature. 1898. V. 59, N. 1522. P. 200.
10. J. Willard Gibbs. Fourier's Series // Nature. 1899. V. 59, N. 1539. P. 606.
11. Willbraham H. On a certain periodic function // Cambridge and Dublin Mathematical Journal. 1848. V. 3. P. 198 – 201.
12. Александров В. А. Основы функционального анализа и теории функ-

ций. URL : <http://old.nsu.ru/education/funcan/> (дата звернення: 01.06.2019).

13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Москва : Наука, 1969. 656 С.

14. Lytvyn O.M., Lytvyn O.G., Lytvyn O.O., Mezhuyev V. I. The Method of Reconstructing Discontinuous Functions Using Projections Data and Finite Fourier Sums // The IX International Scientific and Practical Conference «Information Control Systems & Technologies (ICST-2020)», 24 - 26 of September 2020. Odessa. С. 661-673.

15. Білобородов А.А., Бобков М.І., Стародубець А.О. Тестування методу скінченних сум Фур'є та Фейєра з використанням фантома Шеппа-Логана // 23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2019. С. 102–103.

16. Бобков М.І., Климченко В. П., Ткаченко А.Г. Реконструкція зображень з використанням регуляризації // 22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 17-19 квітня 2018 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2018. С. 66–67.