

УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ВРЕМЕНИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В ТРОПОСФЕРЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ВЫСОКОТОЧНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

Введение

Для высокоточной синхронизации, когда речь идет о погрешности измерения сдвига шкал в единицы наносекунд, необходимо учитывать и компенсировать погрешность, вызванную тропосферным распространением радиоволн (РРВ), которая вносит существенный вклад в результирующую погрешность синхронизации. Абсолютная величина и вариации тропосферной составляющей погрешности синхронизации приведены в [1 – 2].

Существует актуальная задача усовершенствования модели тропосферного РРВ для задач синхронизации шкал времени и частоты путем учета геометрии конкретной трассы распространения. Данная задача может быть решена путем разработки усовершенствованной математической модели, которая учитывает геометрию трассы распространения радиоволн, что ведет к уменьшению результирующей тропосферной составляющей погрешности синхронизации.

Основные соотношения и приближения математической модели

В соответствии с задачей о распространении электромагнитных волн в неоднородной среде [3], время распространения можно выразить как криволинейный интеграл от скорости распространения вдоль трассы от передающей к приемной антенне. В этом случае, время распространения вычисляется как

$$t = \int \frac{dS(x, y)}{V(x, y)}, \quad (1)$$

где $dS(x, y)$ – путь распространения, $V(x, y)$ – скорость распространения, причем обе эти функции могут изменяться в пространстве, т.е. зависеть от координат.

Для вычисления $dS(x, y)$ следует решить задачу нахождения длины дуги S кривой $y = f(x)$ от точки A ($x = a$) до точки B ($x = b$). Согласно [4] имеем

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}. \quad (2)$$

Переходим в (2) к пределу $\Delta x \rightarrow 0$. В этом случае $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превращается в производную $y' = f'(x)$, где $y = f(x)$ – уравнение заданной линии, а величина Δs переходит в дифференциал дуги, тогда получаем $\Delta s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, где $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ – производная функции $y = f(x)$. Тогда перепишем выражение для t :

$$t = \int_l \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{V(x, y)} dx, \quad (3)$$

где l – пределы интегрирования; $V(x, y)$ – скорость распространения, зависящая от координат в пространстве; $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ – выражение, задающее геометрическую форму трассы.

Ниже перечислены гипотезы и приближения, которые положены в основу усовершенствованной математической модели для расчета времени распространения радиоволн в тропосферном канале: целью моделирования является не уровень сигнала, а его задержка; в основу базовой физической модели положена модель распространения радиоволн в слоистой сферической тропосфере, где индекс рефракции изменяется по линейному закону; модель должна учитывать геометрию трассы в явном виде; модель определяется для случая прямой видимости в приземном слое атмосферы; модель должна учитывать изменяющиеся параметры тропосферы. Вместе с тем, в модели допускаются следующие упрощения: не учитывается рельеф местности; предполагается, что параметры тропосферы между пунктами, для которых они заданы, изменяются по линейному закону; не учитываются параметры подстилающей поверхности и рассеяние от нее; не учитывается рассеяние на неоднородностях тропосферы.

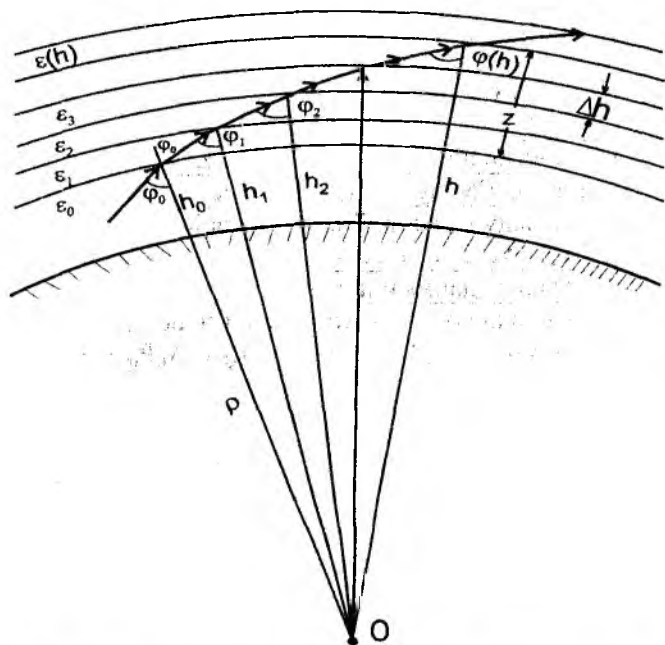


Рис. 1. Модель сферической слоистой тропосферы

Рис. 1 иллюстрирует основные положения модели сферической слоистой тропосферы, принятой в качестве базовой. Ее суть заключается в том, что влияние неоднородностей тропосферы на распространение радиоволн связано с явлением атмосферной рефракции, которая вызывает отклонение волны от прямолинейного пути распространения и искривляет ее траекторию. Это происходит из-за изменения индекса преломления с высотой. Более подробно модель сферической слоистой тропосферы описана в [7 – 9].

Отметим, что одним из основных следствий, которые вытекают из базовой модели, является то, что в случае, когда профиль индекса рефракции задается линейной зависимостью от высоты, то траекторией волны будет являться дуга окружности, радиус ρ которой определяется вертикальным градиентом индекса рефракции, и описывается следующей формулой:

$$\rho = \frac{10^6}{-\frac{\partial N}{\partial h}} \quad (4)$$

Обозначим $g = \frac{\partial N}{\partial h}$ и перепишем (4) в виде

$$\rho = \frac{10^6}{-g} \quad (5)$$

Описание геометрических объектов модели и выбор систем координат

Для раскрытия сути математической модели введем обозначения для ее геометрических объектов. На рис. 2 изображены основные геометрические объекты, используемые при построении усовершенствованной математической модели. Обозначения, принятые для них, сведены в таблицу.

Поскольку (1) содержит две функции, зависящие от координат, то необходимо обоснованное введение системы координат (СК). В качестве исходной, предлагается выбрать систему координат связанную с центром Земли, передающей и приемной антеннами. Именно к этой системе координат привязана базовая модель слоистой сферической тропосферы с

линейно меняющимся индексом рефракции с высотой. Модель предполагает учет параметров тропосферы, которые влияют на скорость распространения и геометрическую форму трассы. В качестве таких параметров принимаются: давление p , температура T и влажность e .

Обозначения геометрических объектов модели

Геометрический эл-т	Символ	Расшифровка
Координаты	x', y'	координаты в соответствующей СК
Индекс	tr	указывает на <i>передающую</i> антенну (transmitter)
	rc	указывает на <i>приемную</i> антенну (receiver)
Отрезок	R_e	радиус Земли
	ρ	радиус кривизны трассы ЭМ луча в тропосфере
	$h = \vec{A} - \vec{P} $	высота поднятия антенны над поверхностью Земли*
	h_{tr}, h_{rc}	высоты передающей и приемной антенн*
	$d = \vec{A}_{rc} - \vec{A}_{tr} $	расстояние между фазовыми центрами антенн по прямой линии
Дуга	l	между основаниями антенн с учетом кривизны Земли
	s	траектория трассы ЭМ луча в тропосфере
Углы	α	угол наклона между прямой d , проходящей через точки A_{tr} и A_{rc} и осью абсцисс СК ₂
	φ	половинный угол, заданный дугой S
	ψ	угол между вертикалями, проходящими через отрезки, определяющие приемную $A_{rc}P_{rc}$ и передающую $A_{tr}P_{tr}$ антенны

*Все высоты даются относительно поверхности сферы с радиусом R_e (радиус Земли).

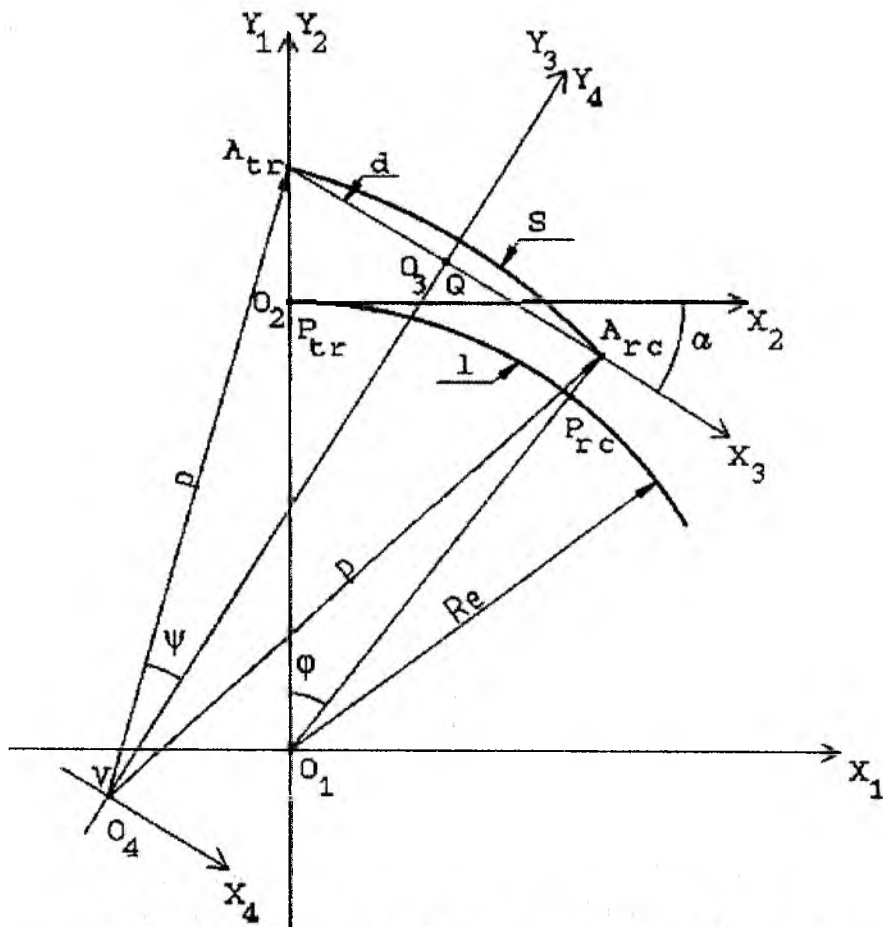


Рис. 2. Геометрические объекты, используемые в модели

Первая система координат (СК₁): начало координат СК₁ находится в гипотетическом центре Земли и на рис. 2 обозначено точкой O_1 . Ось ординат проходит через начало координат O_1 и фазовый центр передающей антенны A_{tr} и на рис. 2 обозначается – Y_1 . Ось абсцисс проходит через начало координат O_1 и перпендикулярна оси Y_1 , на рис.2 – X_1 .

Вторая система координат (СК₂): СК₂ образована путем параллельного переноса СК₁ вдоль оси Y_1 , таким образом, чтобы начало отсчета СК₂ совпадало с точкой нулевой высоты над уровнем моря фазового центра передающей антенны (P_{tr}) в СК₁.

Под уровнем моря подразумевается поверхность сферы с центром, совпадающим с гипотетическим центром Земли и радиусом равным $R_e = 6370$ км (радиус Земли).

Тогда, направление оси ординат СК₂ совпадает с направлением оси ординат СК₁, а начало координат СК₂ совпадает с P_{ir} – точкой нулевой высоты над уровнем моря для передающей антенны. Ось абсцисс СК₂ параллельна оси X_1 .

Третья система координат (СК₃): введение третьей СК₃ вызвано необходимостью вычисления координат центра окружности, дуга которой опирается на координаты фазовых центров передающей A_{ir} и приемной A_{rc} антенн и представляет собой трассу траектории распространения радиоволны S с учетом рефракции, вызванной линейным изменением индекса преломления с высотой, согласно [6 – 8]. Радиус этой дуги ρ определяется формулами (4), (5). Центр окружности с радиусом ρ находящийся в точке V и определяет дугу S , которая задает траекторию распространения волны. Таким образом, хорда на которую опирается S , представляет собой отрезок d , соединяющий фазовые центры приемной и передающей антенн. Отметим что СК₃ задана таким образом, что ее начало координат O_3 совпадает с серединой отрезка d , соединяющего фазовые центры антенн. За ось ординат принимается прямая, проходящая через середину отрезка d , которая ему перпендикулярна.

Таким образом, в СК₃ фазовые центры приемной и передающей антенн лежат на оси абсцисс на одинаковом удалении от начала координат. Тогда, в соответствии с решением геометрической задачи о проведении окружности радиусом ρ через две заданные точки (фазовые центры антенн – A_{ir} и A_{rc}), центр этой окружности будет лежать на оси ординат СК₃.

Четвертая система координат (СК₄): введение четвертой СК₄ связано с необходимостью выполнения операции численного интегрирования вдоль трассы РРВ. Эта система координат вводится из соображений дальнейшего упрощения результирующего подынтегрального выражения. СК₄ образована переносом оси абсцисс СК₃ в точку V или O_4 , которая будет ее началом координат, на величину y_ρ .

Для перехода между СК при математических выкладках и вычислениях, будем использовать аппарат матричного представления двумерных преобразований в однородных координатах [3].

Усовершенствованная математическая модель для расчета время РРВ в тропосфере

Исходные данные, определяющие геометрические параметры трассы РРВ: радиус Земли R_e задается в метрах; высота подъема передающей антенны h_{ir} задается в метрах; высота подъема приемной антенны h_{rc} задается в метрах; протяженность трассы вдоль поверхности Земли l задается в метрах;

Заметим, что под поверхностью Земли понимается поверхность сферы с радиусом R_e .

До этого момента во всех введенных соотношениях участвовали параметры, соответствующие только геометрии трассы. Зададим соотношения, необходимые для учета влияния состояния тропосферы. Согласно модели слоистой сферической тропосферы с постоянным градиентом индекса рефракции, трасса распространения радиоволны в этом случае будет представлять собой дугу окружности радиуса ρ , который определяется по формулам (4), (5) для «нормальной» тропосферы.

Для проверки корректности математического описания части модели, которая связана с геометрией трассы и градиентом тропосферы, рассчитаем траекторию трассы РРВ с учетом градиента и без него. Данные аналитические зависимости для наглядного графического отображения построим в СК₂.

Аналитические выражения для нижеприведенных зависимостей будут иметь вид:

– для поверхности Земли – $E(x) = \sqrt{R_e^2 - x^2} - R_e$ (кривая 1 $E(x)$ на рис. 3);

– для траектории трассы РРВ без учета градиента – $L(x) = (x - x_{ir}^*) \cdot \text{tg}(\alpha) + y_{ir}^*$ (кривая 2 $L(x)$ на рис. 3), где x_{ir}^* , y_{ir}^* – координаты передающей антенны во второй СК₂.

Для задания уравнения, описывающего траекторию трассы РРВ, получим координаты точки V в СК₂ и запишем уравнение траектории трассы РРВ с учетом градиента, которое примет вид: $y(x) = \sqrt{\rho^2 - (x - x_v)^2} + y_v$ (кривая 3 $y(x)$ на рис. 3).

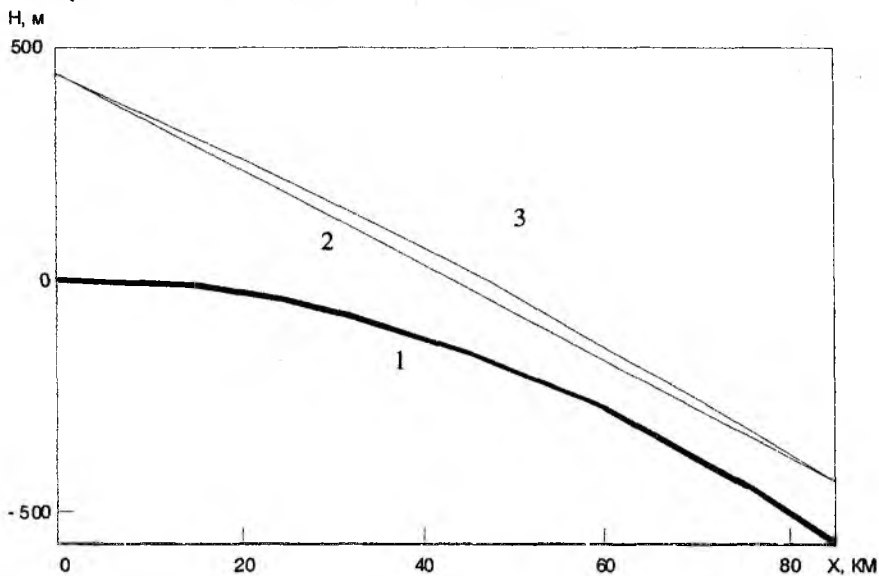


Рис. 3. Траектория трассы РРВ с учетом градиента и без него

Задание уравнения трассы РРВ является необходимым, но недостаточным условием для определения времени РРВ. Необходимо также иметь значение скорости в каждой точке трассы. При таких условиях время РРВ согласно [3, 9] может быть выражено как криволинейный интеграл от скорости распространения электромагнитной волны вдоль трассы распространения (1).

Для полного определения подынтегрального выражения требуется задание выражения для скорости РРВ $V(x, y)$ в каждой точке трассы в аналитическом виде. Для этого следует воспользоваться соотношением, которое связывает скорость РРВ и коэффициент рефракции:

$$V(x, y(x)) = \frac{c}{n(h)}, \quad (6)$$

где c – скорость света в вакууме, $n(h)$ – коэффициент рефракции, зависящий от высоты над поверхностью Земли. Учтем также, что, $g = 10^6/(-\rho)$.

Коэффициент рефракции n связан с ранее заданной зависимостью для индекса рефракции $N(h)$. Высота h для каждой точки траектории трассы является функцией, зависящей от координаты (x, y) соответствующей точки трассы. Тогда, для получения окончательного выражения для $V(x, y)$ следует найти аналитическое выражение для $h(x)$ – высоты каждой точки трассы над поверхностью Земли. В окончательном виде, после подстановок $V(x, y)$ приобретает вид

$$V(x) = \frac{c}{1 + \frac{N_0}{10^6} + \frac{R_e}{\rho} - \sqrt{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_v}{\rho} \right)^2} + \frac{y_v + R_e}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{x}{\rho} \right)^2}}. \quad (7)$$

После соответствующих преобразований получаем выражение для t :

$$t = \frac{1}{c} \int_0^x \frac{1 + \frac{N_0}{10^6} + \frac{R_e}{\rho} - \sqrt{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_v}{\rho} \right)^2} + \frac{y_v + R_e}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{x}{\rho} \right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_v}{\rho} \right)^2}} dx. \quad (8)$$

Более простое подынтегральное выражение может быть получено в полярной системе координат, связанной с точкой V . Причем введем особые обозначения для декартовых координат (x_q, y_q) , задающие точку Q в СК₂ – $Q = \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ 1 \end{bmatrix}$. Опуская подробные математические

выкладки, приведем окончательный вид интеграла для вычисления времени РРВ в СК₄:

$$t = \frac{\rho}{c} \int_{-\phi}^{\phi} \left[1 + \frac{N_0}{10^6} + C - \sqrt{\left(\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - A \right)^2 + \left(\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - B \right)^2} \right] d\beta, \quad (9)$$

где A, B, C – это выражения, задающие координаты x и y для точки O :

$$A = \frac{-R_e \cdot \sin(\alpha) - x_q \cdot \cos(\alpha) - y_q \cdot \sin(\alpha)}{\rho}, B = \frac{y_\rho - R_e \cdot \cos(\alpha) + x_q \cdot \sin(\alpha) - y_q \cdot \cos(\alpha)}{\rho}, C = \frac{R_e}{\rho}.$$

Пределы интегрирования определяются как $-\phi \dots \phi$, где $\phi = \arcsin\left(\frac{d}{2 \cdot \rho}\right)$.

Подставим в (9) выражение для индекса преломления N_0 и перепишем формулу:

$$t = \frac{\rho}{c} \int_{-\phi}^{\phi} \left[1 + \frac{77.64 \frac{p}{T} - 12.96 \frac{e}{T} + 3.718 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2}}{10^6} + C - \sqrt{\left(\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - A \right)^2 + \left(\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - B \right)^2} \right] d\beta \quad (10)$$

где p, T, e – это атмосферное давление, температура воздуха и влажность соответственно.

Формула (10) является усовершенствованной математической моделью для расчета времени распространения радиоволн в приземном слое тропосферы, которая учитывает изменяющиеся параметры тропосферы, а так же рефракцию для конкретной трассы распространения.

Выводы

Предложена усовершенствованная модель для расчета времени распространения радиоволн в тропосферном канале, которая, помимо изменения параметров тропосферы, также учитывает геометрию трассы распространения и изменение состояния тропосферы с высотой.

Список литературы: 1. Антипов, И. Е., Бондарь, Е. Ю., Костыря, А. А., Иванова, Е. А. Анализ времени распространения метровых волн в приземном слое для задач высокоточной синхронизации времени и частоты // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – №. 2/3 (38). – С. 22 – 25. 2. Антипов, И. Е., Бондарь, Е. Ю. Исследование влияния многолучевости на оценку времени распространения метровых и дециметровых радиоволн для задач высокоточной синхронизации времени и частоты // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – №. 4/7 (40). – С. 60 – 64. 3. Голоскоков, Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple : учебник для вузов. – СПб. : Питер, 2004. – 539 с. 4. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей матема-

тике. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 870 с. 5. *Долуханов, М.П.* Распространение радиоволн. – М., 1960. – 363 с. 6. *Калинин, А.И.* Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. – М. : Связь, 1979. – 293 с. 7. *Родос, Л.Я.* Электродинамика и распространение радиоволн: учеб.-метод. Комплекс : учеб. пособие / Л.Я. Родос. – СПб. : Изд-во СЗТУ, 2007. – 90 с. 8. Альперт, Я.Л., Гинзбург, В.Л., Фейнберг, Е.Л. Распространение радиоволн. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1953. – 596 с. 9. *Глобальна система визначення місцеположення (GPS). Теорія і практика / Б. Гофман-Велленгоф, Г. Ліхтенеггер, Д. Коллінз ; пер. з англ. третього вид. за ред. Я.С. Яцківа.* – Київ : Наук. думка, 1995. – 380 с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 11.05.2012