

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЗАПАСОВ ПОЛУФАБРИКАТОВ МЕЖДУ СТАНКАМИ НЕПРЕРЫВНО-ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

Ю. В. Шагаев, Ю. В. Переверзев

Х а р ь к о в

Наибольший съём продукции с непрерывно-поточной станочной линии заданных параметров обеспечивается при непрерывном ее функционировании. Но всегда имеют место сбои в работе линии, поскольку поломка одного из станков вызывает прерывание потока полуфабрикатов, которые поступают на последующие станки, и прекращение работы предыдущих станков (из-за отсутствия потребления изготовленных на них полуфабрикатов), т. е. остановку всей линии. Это приводит к снижению общего объема выпуска продукции. Увеличить выпуск в таком случае можно путем создания между станками бункеров, каждый из которых служит хранилищем промежуточных продуктов, создаваемых предыдущим по технологическому процессу станком, и источником снабжения последующего станка.

Для линии, состоящей из двух станков и бункера между ними, может быть применена описанная в работе [1] стохастическая модель управления запасами в двухфазовой системе (фазой в рассматриваемом случае является станок), учитывающая неодинаковые распределения длительности рабочего и нерабочего состояний фаз, при условии, что поток, поступающий в первую фазу, не прерывается, а на выходе второй фазы перегрузка невозможна.

При средней длительности рабочего времени первой фазы $l_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, средней длительности ее простоев $m_1 = \frac{1}{\mu_1}$, аналогичных для второй фазы $l_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ и $m_2 = \frac{1}{\mu_2}$ и равной производительности обеих фаз в их рабочем

состоянии ($h_1 = h_2 = h$), выражение для приращения выпуска продукции с линии, по сравнению с наблюдаемым, получаемого благодаря наличию N единиц промежуточных запасов в бункере, записывается в виде

$$G(N) = \frac{\Delta A(N)}{A} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \left[1 - \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} \exp \left[N \sigma \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) \right]} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right], \quad (1)$$

где

$$\sigma = \frac{(\lambda_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_1)}{h \left[(\mu_1 + \lambda_2) \frac{\lambda_1}{\mu_1} + (\lambda_1 + \mu_2) \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right]}, \quad (2)$$

а $\Delta A(N)/A$ — отношение дополнительной продукции, полученной за счет наличия запасов, к продукции, получаемой при их отсутствии.

Выражения (1) и (2) справедливы при $\frac{\lambda_1}{\mu_1} > \frac{\lambda_2}{\mu_2}$. При $\frac{\lambda_1}{\mu_1} < \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ увеличение выпуска продукции определяется по таким же формулам, где $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ взаимно меняются местами.

Очевидно, что при отсутствии запасов ($N = 0$) увеличения выпуска продукции не наблюдается, т. е. $G(N) = 0$, а при $N \rightarrow \infty$ $G(N) \rightarrow \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ или $G(N) \rightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1}$. Иными словами, всегда

$$\text{или} \quad G(N) < \frac{\lambda_2}{\mu_2} \leq \frac{\lambda_1}{\mu_1} \quad G(N) < \frac{\lambda_1}{\mu_1} \leq \frac{\lambda_2}{\mu_2}. \quad (3)$$

Такую стохастическую модель можно распространить на многофазовую производственную линию, которой является непрерывно поточная станочная линия.

Постановка задачи. Имеется многофазовая однопродуктовая непрерывно действующая производственная линия, состоящая из n фаз и прекращающая выпуск продукции всякий раз, когда одна из ее фаз останавливается для ремонта или наладки. Каждая i фаза такой линии (при $i = 1, 2, \dots, n$) характеризуется параметрами $l_i = \frac{1}{\lambda_i}$, $m_i = \frac{1}{\mu_i}$, h_i и τ_i , где τ_i — средняя длительность простоя i фазы при ее рабочем состоянии (рассматриваемого на интервалах l_i) из-за отсутствия поступления на нее продуктов с $(i-1)$ -фазы в интервалах m_{i-1} , т. е. τ_i является средней продолжительностью прерывания потока на фазу и находится в интервале $0 < \tau_i < l_i$. При условиях, что производительности всех фаз равны ($h_1 = h_2 = \dots = h_n = h = \text{const}$), между фазами созданы бункера $N_{1,2}$, $N_{2,3} = \dots = N_{n-1,n}$, увеличивающие продолжительность входящих потоков на последующие фазы и исключающие возможность перегрузки на выходах предыдущих фаз, и что при совпадении во времени интервалов l_i и l_{i-1} передача единицы продукта с предыдущей фазы на последующую происходит мгновенно, — необходимо определить верхнюю границу значений приращения G выпуска продукции с производственной линии, получаемого за счет создания бункеров между фазами, емкости этих бункеров ($N_{1,2}$, $N_{2,3} = \dots = N_{n-1,n}$), обеспечивающих заданное приращение G' , и оптимальное значение приращения G^* для получения максимальной дополнительной прибыли ΔF от увеличения выпуска продукции.

Исследование n -фазовой системы (рис. 1). Если разбить многофазовую систему на последовательный ряд двухфазовых систем, где фаза

является одновременно предыдущей для одной системы (кроме n -ой фазы) и последующей для другой системы (кроме первой фазы), а также обеспечить непрерывность потоков, поступающих на предыдущие фазы, то для каждой из этих двухфазовых систем справедлива модель, описанная ранее.

Прерывание потока, поступающего на $(i-1)$ -фазу ($i = 2, 3, \dots, n$), наблюдаемое при отсутствии бункера перед нею или при недостаточной его емкости, ограничивающей работу $(i-2)$ -фазы во время ремонта $(i-1)$ -фазы (на интервалах m_{i-1}), связано с неравенством l_{i-1} и l_{i-2} и с несовпадением во времени этих интервалов даже в случае их равенства. При прерывании потока на $(i-1)$ -фазу на время τ_{i-1} ($0 \leq \tau_{i-1} < \tau_{i-1}$) стохастическая модель может быть распространена на двухфазовую систему, состоящую из $(i-1)$ и i фаз с бункером $N_{i-1,i}$ между

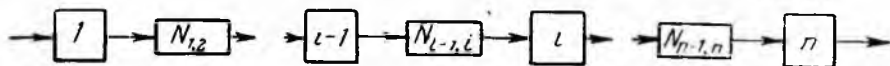


Рис. 1.

ними, систему $(i-1, i)$, если рассматривать среднюю длительность рабочего времени $(i-1)$ -фазы и среднюю длительность ее простоев, включающую как простои для ремонта и наладки, так и простои из-за отсутствия поступления продуктов на переработку, равным значениям

$$L_{i-1} = l_{i-1} - \tau_{i-1} = \frac{1}{\lambda_{i-1}}$$

и

$$M_{i-1} = m_{i-1} + \tau_{i-1} = \frac{1}{\mu_{i-1}},$$

откуда

$$\lambda_{i-1}^* = \frac{1}{l_{i-1} - \tau_{i-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{i-1}} - \tau_{i-1}};$$

$$\mu_{i-1}^* = \frac{1}{m_{i-1} + \tau_{i-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{i-1}} + \tau_{i-1}} \quad (4)$$

и

$$\frac{\lambda_{i-1}^*}{\mu_{i-1}^*} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} \cdot \frac{1 + \mu_{i-1} \tau_{i-1}}{1 - \lambda_{i-1} \tau_{i-1}}.$$

Поэтому для системы $(i-1, i)$ в предположении, что

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} < \frac{\lambda_{i-1}^*}{\mu_{i-1}^*};$$

$$G = \frac{\Delta A_i}{A_i} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \left[1 - \frac{\frac{\lambda_{i-1}^*}{\mu_{i-1}^*} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{\frac{\lambda_{i-1}^*}{\mu_{i-1}^*} \exp \left[N_{i-1,i} \sigma_{i-1,i} \left(\frac{\lambda_{i-1}^*}{\mu_{i-1}^*} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right] - \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \right], \quad (1a)$$

где

$$\sigma_{i-1,i} = \frac{(\lambda_i^* + \mu_i)(\lambda_i + \mu_{i-1}^*)}{h \left[(\mu_{i-1}^* + \lambda_i) \frac{\lambda_{i-1}^*}{\mu_{i-1}^*} + (\lambda_{i-1}^* + \mu_i) \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right]}, \quad (2a)$$

Очевидно, что в этих выражениях $\lambda_{i-1} = \lambda_{i-1}$ и $\mu_{i-1} = \mu_{i-1}$ при $\tau_{i-1} = 0$.

Поскольку выпуск дополнительной продукции системой может быть обеспечен только при дополнительном выпуске продукции каждой фазой (начиная со второй) в тех же размерах, то $\Delta A_i = \Delta A = \text{const}$ поэтому

$A_i = A = \text{const}$, а $G_i = G = \text{const}$ для всех фаз от второй до n ($G_1 = 0$).

Время дополнительной работы каждой из этих фаз для выпуска ΔA единиц продукции составляет

$$\tau = \frac{\Delta A}{h} = \frac{GA}{h} = \text{const}. \quad (5)$$

Следовательно, при обеспечении дополнительной работы $(i-1)$ -фазы в течение τ время прерывания на нее входного потока сокращается до

$$\tau_{i-1} = \tau_{i-1} - \tau. \quad (6)$$

Если $\tau_{i-1} = \tau$, то это свидетельствует о создании непрерывного потока на $(i-1)$ -фазу: $\tau_{i-1} = 0$; $\lambda_{i-1} = \lambda_{i-1}$; $\mu_{i-1} = \mu_{i-1}$. При $\tau_{i-1} > \tau$ поток на фазу прерывается на время $\tau_{i-1} > 0$ (например, для первой фазы $\tau_1 = \tau_1$, так как $\tau = 0$), и для использования в (1а) и (2а) должны быть определены значения λ_{i-1} и μ_{i-1} . В случае же $\tau_{i-1} < \tau$ $(i-1)$ -фазой, а следовательно, и всей многофазовой системой не может быть переработано дополнительно ΔA единиц продукции. Поэтому максимально возможный дополнительный выпуск продукции многофазовой системы определяется величиной дополнительного выпуска, который можно получить на фазе, имеющей минимальное время простоя из-за прерывания входного потока ($\tau_{\min}$), при условии обеспечения непрерывной ее работы на интервалах благодаря созданию бункеров перед этой фазой и после нее:

$$\Delta A_{\max} = \tau_{\min} h.$$

Следовательно,

$$G_{\max} = \frac{\tau_{\min} h}{A}. \quad (7)$$

Так как из (4) очевидно, что $\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} \geq \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}$ (при $\tau_{i-1} \geq 0$ соответственно), то по аналогии с (3) и с учетом (7) выбранное значение G' многофазовой системы с прерыванием потока на первую фазу должно удовлетворять условию

$$G' \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_1}{\mu_1} \\ \frac{\lambda_2}{\mu_2} \\ \dots \\ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \\ \dots \\ \frac{\lambda_n}{\mu_n} \end{array} \right. < \tau_{\min} \frac{h}{A} \quad (8)$$

Выражение для величины емкости бункера между фазами в системе $(i-1, i)$, обеспечивающей на ее выходе приращение выпуска продукции G , определяется из (1а) (приложение):

$$N_{i-1, i} = \frac{\ln \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} - G \right)}{\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - G \right)}}{\sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)} \quad (9)$$

Дополнительное замечание. Как указывалось выше, выражения (1а), (2а), а следовательно и (9), справедливы в случае $\frac{\lambda_i}{\mu_i} < \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}$ при $\tau_{i-1} \geq 0$.

Если же $\frac{\lambda_i}{\mu_i} > \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}$, то эти отношения в выражениях (1а), (2а) и (9) меняются местами. При $\frac{\lambda_i}{\mu_i} \equiv \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = U$ (1а) принимает в соответствии с [1] вид (приложение 2):

$$G = U \left[1 - \frac{h(1-U)(\mu_{i-1}' + \nu_i)}{h(1+U)(\mu_{i-1}' + \mu_i) + N_{i-1, i}(\mu_{i-1}' - U\mu_i)(\mu_i + U\mu_{i-1}')} \right] \quad (16)$$

откуда после преобразований следует

$$N_{i-1, i} = \frac{Gh(1-U)(\mu_{i-1}' + \nu_i)}{(U-G)(\mu_{i-1}' + U\mu_i)(\mu_i + U\mu_{i-1}')}. \quad (9a)$$

Алгоритм определения значений $N'_{1,2}, N'_{2,3}, \dots, N'_{n-1,n}$ по заданному G' .

1. Проверить соответствие выбранного значения G' условию (8). При несоответствии перейти к п. 2. При соответствии перейти к п. 3.
2. Уменьшить задание на приращение выпуска продукции. Перейти к п. 1.
3. Найти τ' подстановкой G' в (5). Перейти к п. 4.
4. Определить для всех $(i-1)$ -фаз $(i=2, 3, \dots, n)$ значения τ_{i-1} подстановкой τ' вместо τ в (6). Перейти к п. 5.

5. Найти по (4) λ_{i-1} , μ_{i-1} и $\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}$. Перейти к п. 6.

6. Определить по (9) или (9а) все значения $N'_{i-1, i}$. Перейти к п. 7.

7. Округлить все полученные нецелочисленные значения $N'_{i-1, i}$ в сторону увеличения. Прекратить вычисления.

Необходимо отметить, что при наличии ограничений на емкости бункеров путем подбора определяется такое значение G' , чтобы обеспечивающие его получения величины запасов промежуточных продуктов не превышали максимально возможных емкостей между фазами.

Практическое применение. Из самой постановки задачи следует, что приведенный выше алгоритм предназначен в первую очередь для определения необходимых емкостей бункеров между оборудованием в любых непрерывно-поточных линиях, отвечающих указанным условиям. Такая линия может быть выделена из любой непрерывно-поточной линии, состоящей из ряда последовательно связанных технологическим процессом станков, не обеспечиваемых непрерывными входными потоками деталей.

В случае параллельно-последовательной работы станков в линии также может применяться рассмотренная модель при условии, что

$$\sum_{j=1}^{\bar{k}} h_{ij} = h_i = \bar{h} \text{ и } l_i = \sum_{j=1}^{\bar{k}} l_{ij}; \quad m_i = \sum_{j=1}^{\bar{k}} m_{ij}; \quad \tau_i = \sum_{j=1}^{\bar{k}} \tau_{ij},$$

где i — номер фазы, содержащий параллельно работающие станки;

$\bar{k}$ — их количество в фазе.

Можно показать, что стохастическая модель распространяется и на многопродуктовую многофазовую систему, какой, например, является совокупность поточных станочных линий, питающих непрерывно работающий сборочный конвейер. Рассмотрим два случая.

1. Все станочные линии являются непрерывно-поточными, каждая производит один тип деталей. Сборочный конвейер служит n фазой каждой из k однопродуктовых систем. Поэтому несмотря на то, что все они характеризуются различными значениями параметров, величины промежуточных запасов между их фазами должны обеспечивать одинаковые значения приращения выпуска продукции на выходе каждой однопродуктовой системы, т. е.

$$G_{(1)} = G_{(2)} = \dots = G_{(k)} = \text{const.}$$

При этом заданное значение G' должно удовлетворять неравенству

$$G' < \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_{1(1)}}{\mu_{1(1)}} \\ \dots \\ \frac{\lambda_{1(k)}}{\mu_{1(k)}} \\ \frac{\lambda_{2(1)}}{\mu_{2(1)}} \\ \dots \\ \frac{\lambda_{2(k)}}{\mu_{2(k)}} \\ \dots \\ \frac{\lambda_{n(1)}}{\mu_{n(1)}} \\ \dots \\ \frac{\lambda_{n(k)}}{\mu_{n(k)}} \end{array} \right\} \leq \tau_{\min(j)} \frac{h(j)}{A(j)}$$

Здесь $\tau_{\min(j)}$ — время простоя из-за отсутствия деталей той фазы, прерывание потока на которую среди всех фаз многопродуктовой системы минимально, а $h(j)$ и $A(j)$ — параметры однопродуктовой линии с номером j ($j = 1, 2, \dots, k$), к которой относится упомянутая фаза.

Очевидно, что и в том случае, когда деталь, изготавливаемая какой-либо непрерывно-поточной станочной линией, устанавливается на собираемом изделии в количестве $z > 1$ штук, для этой однопродуктовой линии выполняется условие $h = \text{const}$ и $A = \text{const}$.

2. Одна или несколько станочных линий (в пределе — все станочные линии), питающие сборочный конвейер, не являются однопродуктовыми, а каждая из них изготавливает детали одного типа в течение периода T_1 , другого типа — в течение периода T_2 и т. д., возвращаясь к изготовлению деталей первого типа через время цикла T . Такая станочная линия

к концу периода T_1 создает запас деталей в B единиц, расходуемый при работе сборочного конвейера в течение $T - T_1$.

Приращение выпуска продукции конвейером возможно в том случае, когда его остановки происходят из-за нехватки каких-либо деталей. Такие остановки наблюдаются, например, тогда, когда в начале периода T_1 станочная линия останавливается из-за ремонта одного из станков (в течение периода для работы конвейера нехватает запаса деталей, созданного станочной линией за время с начала периода), при условии, что еще до окончания цикла T запас B исчерпан.

Для обеспечения бесперебойного снабжения конвейера деталями типа p запас B_p должен быть увеличен к концу T_p на $\Delta B_p = (T - T_p - \Sigma m_{\text{конв}}) h_{\text{конв}} - B_p$ единиц, где $\Sigma m_{\text{конв}}$ — суммарная длительность простоев конвейера из-за ремонта за время $T - T_p$. Но $\Delta B_p = \Delta A_p$ рассматриваемой станочной линии за период T_p . При выполнении условия (8) по приведенному выше алгоритму могут быть определены необходимые емкости между станками, обеспечивающие приращение выпуска продукции данного типа деталей (за n ю фазу системы принимается последний станок линии). Обеспечение дополнительного выпуска деталей другого типа (типа s) на той же станочной линии также требует создания между станками бункеров, причем, возможно $N_{(i-1, \eta p)} \neq N_{(i-1, \eta s)}$ при тех же значениях i . В этом случае в качестве окончательного результата должно быть принято наибольшее значение $N_{i-1, i}$.

Критерий управления запасами. Поскольку организация запасов между фазами связана с издержками, следует найти критерий, определяющий целесообразность создания промежуточных бункеров. В качестве такого критерия принимается максимальная дополнительная прибыль ΔF от увеличения выпуска продукции, получаемого благодаря созданию емкостей для хранения запасов

$$\Delta F = F_2 - F_1,$$

где F_1 — прибыль, получаемая до создания бункеров между фазами;

F_2 — возросшая величина прибыли за счет увеличения выпуска продукции.

Приняв обозначения

C_1 — цена единицы готовой продукции;

C_2 — себестоимость единицы готовой продукции;

C_3 — затраты, связанные с созданием промежуточных запасов,

можно записать

$$\Delta F = (C_1 - C_2) \Delta A - C_3.$$

Поскольку C_3 складывается из двух частей — издержек C_4 , пропорциональных емкостям создаваемых бункеров, и затрат C_5 , не зависящих от них,

$$\Delta F = (C_1 - C_2) \Delta A - \sum_{i=2}^n C_{4i-1, i} N_{i-1, i} - C_5.$$

При подстановке выражений для ΔA и $N_{i-1, i}$

$$\Delta F = (C_1 - C_2) GA - \sum_{i=2}^n C_{4i-1, i} \frac{\ln \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - G \right)}{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - G \right)}}{\sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)} - C_5, \quad (10)$$

где $\sigma_{i-1, i}$ определена выражением (2а), а λ'_{i-1} и μ'_{i-1} записываются на основании (4) — (6) как

$$\lambda'_{i-1} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{i-1}} - \tau_{i-1} + \frac{GA}{h}};$$

$$\mu'_{i-1} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{i-1}} + \tau_{i+1} - \frac{GA}{h}}; \text{ при } i = 3, 4, \dots)$$

$$U\lambda'_1 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - \tau}, \quad \mu'_1 = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \tau_1}. \quad (\text{при } i = 2).$$

Оптимальное значение G^* , при котором ΔF максимально, определяется для частного случая, когда система содержит 2 фазы и $\frac{\lambda'_1}{\mu'_1} \equiv \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ из $\frac{d\Delta F}{dG} = 0$ (см. приложение 3):

$$G = \lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - b}, \quad (11)$$

где

$$b = \frac{\lambda_2^2}{\mu_2} - \frac{C_4 a_1 \lambda_2}{A a_2 (C_1 - C_2)};$$

$$a_1 = h (\mu_2 + \lambda_2) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \tau_1 \right) \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} + \mu_2 \tau_1 \right);$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_1} + \lambda_2 \tau_1 \right) \left(\mu_2 + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - \tau_1} \right). \quad (12)$$

При подстановке в (10) обоих значений G , полученных с помощью (11) и (12), можно найти максимальное значение ΔF , и соответствующее ему приращение выпуска продукции, следовательно, будет являться оптимальным приращением G^* .

В общем случае для многофазовой системы найти G^* путем решения уравнения $\frac{d\Delta F}{dG} = 0$, трудно, потому что после несложных, но трудоемких вычислений $\frac{d\Delta F}{dG}$ принимает вид

$$\frac{d\Delta F}{dG} = (C_1 - C_2) A - \sum_{i=2}^n C_{4i-1, i} \left(\frac{a_0 G^4 + a_1 G^3 + a_2 G^2 + a_3 G + a_4}{a_5 G^7 + a_6 G^6 + a_7 G^5 + a_8 G^4 + a_9 G^3 + a_{10} G^2 + a_{11} G + a_{12}} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{13} G^8 + a_{14} G^7 + a_{15} G^6 + a_{16} G^5 + a_{17} G^4 + a_{18} G^3 + a_{19} G^2 + a_{22} G^{10} + a_{23} G^9 + a_{24} G^8 + a_{25} G^7 + a_{26} G^6 + a_{27} G^5 + a_{28} G^4 + a_{29} G^3 + a_{20} G + a_{21}}{a_{30} G^8 + a_{31} G + a_{32}} \times \ln \frac{a_{33} G^2 + a_{34} G + a_{35}}{a_{36} G^2 + a_{37} G + a_{38}} \right).$$

Это выражение является трансцендентной логарифмической функцией. Поэтому уравнение $\frac{d\Delta F}{dG} = 0$ может быть решено только одним из приближенных методов [2] при подстановке численных значений коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_{38}$, определяемых по заданным значениям λ_i, μ_i, τ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а также A и h .

Более простой метод определения G^* основан на том, что, как следует из (8), значение G всегда меньше меньшего из отношений $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ и, как указывалось уже при величине бункера $N \rightarrow \infty$ в соответствующей двухфазовой системе, содержащей i фазу, значение G асимптотически

приближается к величине $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ (рис. 2). Увеличение емкости бункера свыше значения N не приводит к сколько-нибудь существенному увеличению G , поэтому на практике можно считать $\bar{N}$ той величиной емкости бункера, наличие которой обеспечивает максимальное приращение выпуска продукции $\bar{G}$ на выходе рассматриваемой двухфазовой системы. Поэтому, в соответствии с (8), значение G^* следует искать в интервале

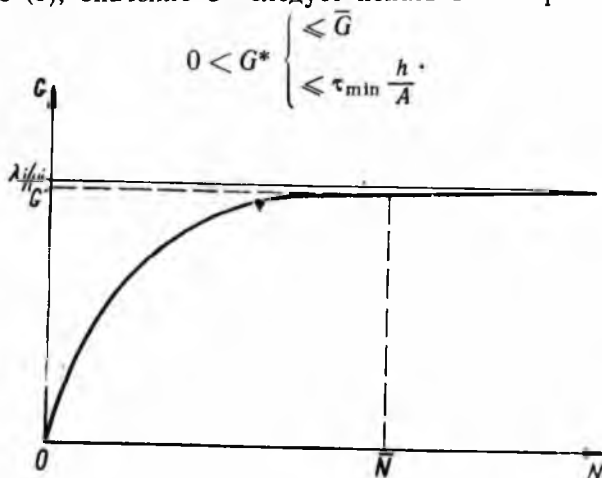


Рис. 2.

Задавая различные значения G в этом интервале и подставляя их в (10), можно найти наибольшую величину ΔF . Соответствующие приращению G^* емкости бункеров между фазами определяются по приведенному выше алгоритму

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Из (1а) следует

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)}{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \exp \left[N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right] - \frac{\lambda_i}{\mu_i}} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} - G; \\ & \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)}{\frac{\lambda_i}{\mu_i} - G} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \exp \left[N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right]; \\ & \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} - G \right)}{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - G \right)} = \exp \left[N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right]; \\ & N_{i-1, i} = \frac{\ln \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - G \right)}{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} - G \right)}}{\sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)}. \end{aligned}$$

В (1а) выражение

$$\frac{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \exp \left[N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right] - \frac{\lambda_i}{\mu_i}} = \frac{f \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)}{\varphi \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)}$$

при $\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \equiv \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ имеет неопределенность $\frac{0}{0}$. Но если $\varphi \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = f \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) = 0$ при $\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \rightarrow \frac{\lambda_i}{\mu_i}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \rightarrow \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \frac{f \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)}{\varphi \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)} &= \lim_{\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \rightarrow \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \frac{f' \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)}{\varphi' \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)} = \\ &= \frac{\exp \left[N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right] + \frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \exp \left[N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right]}{1 + \frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} N_{i-1, i} \sigma_{i-1, i}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} \frac{N_{i-1, i} (\lambda'_{i-1} + \mu_i) (\lambda_i + \mu'_{i-1})}{h \left[(\mu'_{i-1} + \lambda_i) \frac{\lambda'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} + (\lambda'_{i-1} + \mu_i) \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right]}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{N_{i-1, i} \left(\frac{\lambda'_{i-1} \mu'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} + \mu_i \right) \left(\frac{\lambda_i \mu_i}{\mu_i} + \mu'_{i-1} \right)}{h \left(\mu'_{i-1} + \lambda_i \frac{\mu_i}{\mu_i} + \lambda'_{i-1} \frac{\mu'_{i-1}}{\mu'_{i-1}} + \mu_i \right)}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{N_{i-1, i} (\mu'_{i-1} + U \mu_i) (\mu_i + U \mu'_{i-1})}{h [\mu'_{i-1} (1 + U) + \mu_i (1 + U)]}} = \\ &= \frac{1}{h (1 + U) (\mu'_{i-1} + \mu_i) + N_{i-1, i} (\mu'_{i-1} + U \mu_i) (\mu_i + U \mu'_{i-1})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G = U \left[1 - \frac{h (1 - U) (\mu'_{i-1} + \mu_i)}{h (1 + U) (\mu'_{i-1} + \mu_i) + N_{i-1, i} (\mu'_{i-1} + U \mu_i) (\mu_i + U \mu'_{i-1})} \right],$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{Uh (1 - U) (\mu'_{i-1} + \mu_i)}{h (1 - U) (\mu'_{i-1} + \mu_i) + N_{i-1, i} (\mu'_{i-1} + U \mu_i) (\mu_i + U \mu'_{i-1})} &= U - G; \\ \frac{Uh (1 + U) (\mu'_{i-1} + \mu_i) - (U - G) h (1 + U) (\mu'_{i-1} + \mu_i)}{U - G} &= \\ &= N_{i-1, i} (\mu'_{i-1} + U \mu_i) (\mu_i + U \mu'_{i-1}); \\ N_{i-1, i} &= \frac{Gh (1 - U) (\mu'_{i-1} + \mu_i)}{(U - G) (\mu'_{i-1} + U \mu_i) (\mu_i + U \mu'_{i-1})}. \end{aligned}$$

В случае двухфазовой системы и $\frac{\lambda_1}{\mu_1} \equiv \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ из (10) и (9а) следует, что

$$\begin{aligned} F &= (C_1 - C_2)GA - C_4N - C_5 = (C_1 - C_2)GA - \\ &\quad Gh \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) \left(\frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \tau_1} + \mu_2\right) - \\ &\quad - C_4 \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} - G\right) \left(\frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \tau_1} + \lambda_2\right) \left(\mu_2 + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - \tau_1}\right)}{\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} - G\right) \left(\frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \tau_1} + \lambda_2\right) \left(\mu_2 + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - \tau_1}\right)} - C_5, \\ &= (C_1 - C_2)GA - C_4 \frac{Ga_1}{(\lambda_2 - \mu_2 G) a_2} - C_5, \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 определены выражениями (12).

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dG} &= (C_1 - C_2)A - C_4 \frac{a_1 a_2 (\lambda_2 - \mu_2 G) + a_1 a_2 \mu_2 G}{a_2^2 (\lambda_2 - \mu_2 G)^2} = 0 \\ (C_1 - C_2)A - C_4 \frac{a_1 \lambda_2}{a_2 (\lambda_2 - \mu_2 G)^2} &= \mu_2 G^2 - 2\mu_2 \lambda_2 G + \lambda_2^2 - \frac{C_4 a_1 \lambda_2}{a_2 (C_1 - C_2)A} = \\ &= G^2 - 2\lambda_2 G + \left[\frac{\lambda_2^2}{\mu_2} - \frac{C_4 a_1 \lambda_2}{a_2 A (C_1 - C_2)} \right] = 0. \end{aligned}$$

При обозначении выражения в квадратных скобках через b , как указывалось в (12),

$$\begin{aligned} G^2 - 2\lambda_2 G + b &= 0; \\ G &= \lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - b}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ж. Букан, Э. Кенисберг. Научное управление запасами. Изд-во «Наука», 1967.
2. А. Кратцер, В. Франц. Трансцендентные функции. Изд-во иностр. лит., 1963.

МЕТОД ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОЛЬЦЕВЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРИ ЗАДАННОМ НАЧАЛЬНОМ НАПОРЕ

Э. Н. Рыбников

Харьков

При проектировании кольцевых гидравлических систем с одной или несколькими точками питания, напоры в которых известны (например, самотечные водопроводы), возникает необходимость в решении задачи технико-экономического расчета сети. Рассмотрим метод ее решения.

Представим схему водопроводной сети в виде ливейного графа [1] и выберем на нем дерево таким образом, чтобы для каждого источника питания хотя бы один водовод, соединяющий его с сетью, стал ветвью дерева. Фиктивные участки, по которым происходит водопотребление из узлов сети, сделаем связями. Тогда реальные участки частично станут ветвями дерева, частично — связями. Связям реальных участков присвоим номера от 1 до l , фиктивных — от $l+1$ до l_1 , связям с источниками питания (водоводам) — от l_1+1 до s ; ветвям дерева с источниками питания — от $s+1$ до $s+l$. Остальные ветви дерева занумеруем от $s+l+1$ до m .