КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Границя Ю.А.
Науковий керівник – к.ф.-м.н., проф. Колосова С.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, просп. Науки,14, каф. Прикладної математики, тел.(057)702-14-36)
e-mail: yuliagrani@gmail.com

The given work is devoted to boundary value problems for nonlinear elliptic equations with parameters. The paper presents a mathematical model of the problem in choosing of migration model in population genetics. As a method for solving the problem is applied the method of successive approximation. At the same time, the area in which the problem is considered is such that the Green function is unknown to it. Thus, the initial nonlinear problem is reduced to a sequence of linear boundary value problems. Each of the obtained problems can be solved by the Ritz method or the least squares method.

Розглянемо задачу вибору моделі міграції популяції у генетиці, математичною моделлю якої є наступна крайова задача [1]:

$$\begin{gathered} -\Delta u = \lambda(1+u)^q \quad \forall x \in \Omega \subset R^n, \\ u > 0, \; u\big|_{\partial\Omega} = 0, (\lambda > 0, q > 0). \end{gathered} \qquad (1)$$

У [2] доведено існування та єдиність додатного розв’язку цієї задачі та можливість побудови двобічних наближень, якщо виконуються наступні умови:

$$\begin{gathered} \max_{x\in\bar\Omega} \int_\Omega G(x,s)ds \le \frac{\beta}{\lambda(1+\beta)^q}, \\ 0 < q < 1. \end{gathered} \qquad (2)$$

Однак, скористатись схемами побудови двобічних наближень для задачі (1) практично можливо лише тоді, коли область, у якій розглядається задача, є такою, що для неї відома функція Гріна. Якщо функція Гріна невідома або має складний вигляд, пропонуємо будувати послідовні наближення до розв’язку за схемою, розглянутою у [3]. Цей підхід полягає в тому, що задачі (1) ставиться у відповідність послідовність лінійних крайових задач наступного вигляду:

$$\begin{gathered} -\Delta u_1 = 1, \; u_1\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ -\Delta u_2 = \lambda(1+u_1)^q, \; u_2\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ -\Delta u_3 = \lambda(1+u_2)^q, \; u_3\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ -\Delta u_n = \lambda(1+u_{n-1})^q, \; u_n\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Кожну з цих задач розв'язуємо методом Рітца (оператор $-\Delta u$ - додатно визначений) або методом найменших квадратів.

При виборі конкретних значень параметрів λ та q користуємося умовами (2), при цьому β, що є апріорною оцінкою верхньої межі розв'язку, визначається з першої умови (2) після вибору λ та q. Якщо область Ω така, що не знаємо для неї відповідну функцію Гріна, для вибору параметра q користуємося другою умовою з (2), λ може бути будь-яким.

Область Ω можна обрати у вигляді круга $1-x_1^2-x_2^2>0$, або напівкруга $x_2(1-x_1^2-x_2^2)>0$ або $x(1-x_1^2-x_2^2)>0$. Ще одним варіантом є область $x_1^8+x_2^8<1$. Таких варіантів вибору області можна навести безліч.

Координатні функції беремо у вигляді $\varphi_k(x_1,x_2)=w(x_1,x_2)\,F_k(x_1,x_2)$, де

$$w(x)>0\ \forall x\in\Omega,\ w(x)=0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Таку функцію $w(x)$ практично можна побудувати для області довільної геометрії, користуючись апаратом R-функцій [4]. У координатних функціях можна обрати $F_{ij}(x_1,x_2)=x_1^i x_2^j$, де $i\geq 0, j\geq 0, i+j=0,1,2,\ldots,n,$ або

$$F_{ij}(x_1,x_2)=P_i(x_1)P_j(x_2),\ i\geq 0,\ j\geq 0,\ i+j=0,1,2,\ldots,n,$$

$P_i(x)=\dfrac{1}{2^i i!}\dfrac{d^i(x^2-1)^i}{dx^i}$ – многочлени Лежандра. Такі поліноми є ортогональними на $[-1,1]$.

Розв'язування задачі (1) також розглядається у роботі Юхименко В. іншим методом, що використовує квазіфункцію Гріна для крайових задач для еліптичних рівнянь. Це дає змогу порівняти результати експерименту та переконатися у достовірності отриманого розв'язку.

Список використаних джерел:

1. G. A. Afrouzi, S. Khademloo, «Some numerical results on a convex nonlinear elliptic problem». Applied Mathematicies and Computation. 175(2006). P. 465–471.
2. Колосова С.В, Границя Ю., Юхименко В., Про побудову послідовних наближень для однієї задачі про вибір моделі міграції в популяційній генетиці. 7-ма Міжнародна науково-технічна конференція «ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ ТА ТЕХНОЛОГІЇ ІСТ-2018».
3. Свирский И.В. Методы типа Бубнова – Галеркина и последовательных приближений. – М.: Наука, 1968. – 199с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. Думка, 1982.- 552 с.