ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2000, том 375, № 5, с. 611–614

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9:535.4

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НЕЗАМКНУТЫМ КРУГОВЫМ КОНУСОМ

© 2000 г. **В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко**

Представлено академиком Ю.В. Гуляевым 27.12.99 г.

Поступило 29.12.99 г.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что одной из важных проблем современных технологий в антенно-волноводной технике является создание сверхширокополосного излучения. Конические структуры в этом случае обладают ненаправленными свойствами и сверхширокополосностью как по диаграмме направленности, так и по согласованности. Они нашли широкое применение в радиолокации, связи и телеметрии. В данной работе проведено исследование задачи возбуждения электрическим радиальным диполем конуса с периодическими продольными щелями. Частные случаи такой структуры представляют самостоятельный интерес как для теории, так и для практических приложений: конус с продольной щелью, плоский угловой, конус с двумя симметричными щелями (модель V-образной антенны). Метод решения основан на использовании интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и метода задачи Римана–Гильберта [1–4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан полубесконечный идеально проводящий бесконечно тонкий круговой конус (рис. 1) с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями, ось которого совпадает с осью $0z$, а вершина с началом координат. Период структуры $l = \frac{2\pi}{N}$ и ширина щелей d – величины двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конуса и ребра конических лент. Во введенной сферической системе координат r, ϑ, φ конус определяется множеством точек

$$\Sigma = (r, \vartheta, \varphi) \in R^3 : r \in [0, +\infty), \vartheta = \gamma, \varphi \in L,$$

где

$$L = \bigcup_{s=1}^{N} L_s, \quad L_s = \left((s-1)l + \frac{d}{2}, sl - \frac{d}{2}\right).$$

Пусть конус облучается полем единичного радиального источника $u^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, меняющимся во времени по закону $\exp(i\omega t)$ (источник расположен в точке $B(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$); через $u^s(\mathbf{r})$ обозначим рассеянное поле. Полное поле $u = u^0 + u^s$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничному условию Дирихле на обеих сторонах конической поверхности

$$u|_\Sigma = 0,$$

условию излучения и ограниченности энергии. Задача в такой постановке имеет единственное решение. Для решения задачи используем интегральное преобразование Конторовича–Лебедева [1]

$$F(\tau) = \int_0^{-\infty} f(r) \frac{H_{i\tau}^2(kr)}{\sqrt{r}} dr, \qquad (1)$$

$$f(r) = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh}\pi\tau e^{\pi\tau} F(r) \frac{H_{i\tau}^2(kr)}{\sqrt{r}} d\tau, \qquad (2)$$

где $H_{i\tau}^2(kr)$ – функция Ханкеля, k – волновое число ($\operatorname{Im} k \le 0$). Представим u^s в виде интеграла Конторовича–Лебедева [2]

$$u^s = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh}\pi\tau e^{\pi\tau} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{m\tau} U_{m\tau}^{(s)}(\vartheta, \varphi) \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (3)$$

$$U_{m\tau}^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm\cos\vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm\cos\gamma)} e^{i(m+nN)\varphi}; \qquad (4)$$

$P_\zeta^m(\cos\vartheta)$ – функции Лежандра, $b_{m\tau}$ – известные, а $x_{m,n}$ – искомые коэффициенты. Верхние знаки в (4) соответствуют области $0 < \vartheta < \gamma$, а нижние $\gamma < \vartheta < \pi$.

Институт радиотехники и электроники Российской Академии наук, Москва
Харьковский технический университет радиоэлектроники

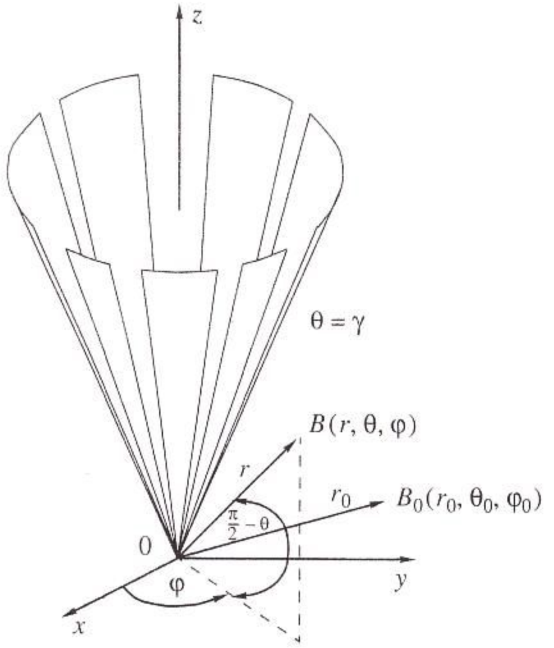

Рис. 1. Геометрия конуса.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

В результате использования граничного условия и условия сопряжения поля в щелях получаем систему парных функциональных уравнений первого рода для $x_{m,n}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \varphi \in L; \tag{5}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu)\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_{m,n})x_{m,n}e^{inN\varphi} = 0, \quad \varphi \in CL, \tag{6}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $\zeta = -\frac{1}{2} + i\tau$; $\nu = \frac{m}{N} - m_0$, $-\frac{1}{2} \le \nu < \frac{1}{2}$, m_0 – ближайшее к $\frac{m}{N}$ целое число. Для $\varepsilon_{m,n}$ при $N(n+\nu) \gg 1$ имеет место оценка

$$\varepsilon_{m,n} = O\left(\frac{1}{N^2(n+\nu)^2}\right).$$

Требование выполнимости условия конечности энергии накладывает ограничение на $x_{m,n}$ их принадлежности гильбертову пространству l^2 с нормой

$$\|\xi\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1+|n|)|\xi_n|^2.$$

Преобразуем систему (5), (6) к виду, удобному для регуляризации. Введем коэффициенты

$$y_{m,n} = (-1)^{n-m_0}\frac{n+\nu}{m_0+\nu}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_{m,n})x_{m,n}$$

и, дифференцируя (5) по φ, приходим к системе вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{|n|}{n}(1-\eta_{m,n})y_{m,n}e^{in\psi} = e^{im_0\psi}, \quad |\psi| < \delta, \tag{7}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{m,n}e^{in\psi} = 0, \quad \delta < |\psi| \le \pi, \tag{8}$$

с дополнительным условием

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n+\nu}\frac{|n|}{n}(1-\eta_{m,n})y_{m,n} = \frac{1}{m_0+\nu}, \quad \psi = \pi,$$

где

$$1-\eta_{m,n} = \frac{1}{1-\varepsilon_{m,n}}, \quad \psi = N\varphi - \frac{|\varphi|}{\varphi}\pi, \quad \delta = \frac{\pi(l-d)}{l}.$$

Разбивая оператор, соответствующий левой части системы, на главную и вполне непрерывную, обратим главную часть с помощью задачи Римана–Гильберта [3, 4]. В результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) второго рода фредгольмовского типа относительно $y_{m,n}$:

$$\begin{gathered} M_\nu(v)y_{m,0} = V^{m_0}(v) + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\frac{|s|}{s}\eta_{m,s}V^s(v)y_{m,s}, \\ M_\nu(v) = \frac{1}{\nu}\frac{P_\nu(-v)-P_\nu(-v)}{P_{\nu-1}(-v)+P_\nu(-v)}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} y_{m,q} = V^{m_0}_{q-1}(v) + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\frac{|s|}{s}\eta_{m,s}y_{m,s}V^{s-1}_{q-1}(v) + y_{q,0}P_q(v), \\ q \ne 0; \end{gathered} \tag{10}$$

здесь $v = \cos\delta$, а функции $V^s(v)$ и $V^{m-1}_{n-1}(v)$ определены и вычислены в [4]. Система (9), (10) эквивалентна функциональным уравнениям (7), (8) и является результатом их регуляризации. Коэффициенты $y_{m,n}$ не зависят от волнового числа, что удобно для выяснения поведения поля как вблизи вершины конуса ($kr \ll 1$), так и вдали от нее ($kr \gg 1$), а также для построения решения нестационарной задачи. Решение БСЛАУ существует и единственно и для произвольных параметров задачи может быть найдено методом редукции. В случае полупрозрачного конуса, когда число щелей велико и их ширина сравнима с периодом структуры ($N \gg 1$, $\delta \ll 1$), конуса с узкими щелями ($d/l \ll 1$), узких конических секторов ($\delta \ll 1$) норма матричного оператора меньше единицы, что позволяет применить метод итераций для нахождения решения БСЛАУ.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Используя метод итераций и ограничиваясь первым приближением в случае полупрозрачного конуса, который определяется существованием предела

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \\ \delta \to 0}} \left[-\frac{1}{N}\ln\cos\frac{2}{\delta}\right] = W > 0,$$

получаем выражение для u^s ($\gamma < \vartheta_0$):

$$u^s = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau e^{\pi\tau}b_{m\tau}}{1+2m(1-\varepsilon_{m,0})W}\times$$

$$\times\frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{kr}}\frac{P_{-1/2+i\tau}^{m}(-\cos\vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m}(-\cos\gamma)}d\tau,$$

$$\gamma < \vartheta < \pi.$$

Это выражение справедливо для источника и точек наблюдения, связанных условием $\vartheta + \vartheta_0 > \pi + 2\gamma$, что обусловлено сходимостью интеграла и соответствует области рассеянного вершиной поля. Аналогичное представление для u^s и при $0 < \vartheta < \gamma$. На поверхности полупрозрачного конуса u^s удовлетворяет усредненным граничным условиям вида

$$u|_{\vartheta=\gamma+0} = u|_{\vartheta=\gamma-0},$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}u\Big|_{\vartheta=\gamma+0} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}u\Big|_{\vartheta=\gamma-0} = 2W^{-1}\sin\gamma\, u|_{\vartheta=\gamma}.$$

В случае осесимметричного возбуждения конуса ($\vartheta_0 = \pi$, $\varphi_0 = 0$) выражение для u^s записывается в виде

$$u^s = \frac{\pi^2}{2r_0\sqrt{rr_0}}\int_{-i\infty}^{+\infty}\frac{\mu\Phi_\mu(r, r_0)}{D_\mu\cos\pi\mu}\times$$

$$\times[P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma)]^2 P_{-1/2+\mu}(-\cos\vartheta)d\mu,$$

$$\gamma < \vartheta < \pi,$$

где

$$D_\mu = \pi P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma)P_{-1/2+\mu}(-\cos\gamma) + 2W\cos\pi\mu,$$

$$\Phi_\mu(r, r_0) = \begin{cases} I_\mu(kr)H_\mu^{(2)}(kr_0), & r < r_0, \\ H_\mu^{(2)}(kr)I_\mu(kr_0), & r > r_0. \end{cases}$$

Применяя теорему Коши о вычетах, можно представить u в виде ряда вычетов относительно полюсов подынтегральной функции. Спектр граничной задачи для полупрозрачного конуса состоит из корней уравнения $D_\mu = 0$. Приведем выражения для этих корней в частных случаях полупрозрачного конуса:

а) $W \ll 1$,

$$\mu_s^\pm = \alpha_s^\pm -$$

$$-\frac{2W\cos\pi\alpha_s^\pm}{\pi\frac{d}{d\mu}[P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma)P_{-1/2+\mu}(-\cos\gamma)]\Big|_{\mu=\alpha_s^{\pm+}}} + O(W^2),$$

$$P_{-1/2+\alpha_s^+}(\cos\gamma) = 0, \quad P_{-1/2+\alpha_s^-}(-\cos\gamma) = 0,$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots;$$

б) $W \gg 1$,

$$\mu_s = \frac{1}{2} + s + \frac{1}{2Q}[P_s(\cos\gamma)]^2 + O(Q^{-2}).$$

Для конуса с узкими щелями ($\vartheta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$) асимптотическое разложение u по параметру $(1 + v) \ll 1$ вдали от щелей имеет вид

$$u = \frac{1}{N}(1+v)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\cos nN\varphi\times$$

$$\times\left\{\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\mu G_\mu(\zeta_s^+, r, r_0)}{\frac{d}{d\mu}P_{-1/2+\mu}}\frac{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\vartheta)}{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\gamma)}\Bigg|_{\mu=\alpha_s^+} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{\mu G_\mu(\zeta_q^{nN-}, r, r_0)}{P_{-1/2+\mu}(-\cos\gamma)}\frac{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\vartheta)}{\frac{d}{d\mu}P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\gamma)}\Bigg|_{\mu=\alpha_q^{nN-}}\right\} +$$

$$+ O((1+v)^2\ln(1+v)),$$

$$\gamma < \vartheta < \pi,$$

$$G_\mu(\alpha, r, r_0) = \begin{cases} \left(\frac{kr}{2}\right)^{\mu-\alpha} I_\alpha(kr)H_\alpha^{(2)}(kr_0), & r < r_0, \\ \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\mu-\alpha} H_\alpha^{(2)}(kr)I_\alpha(kr_0), & r > r_0; \end{cases}$$

$$c_n = \frac{\pi i}{r_0\sqrt{r_0 r}}\chi_n, \quad \chi_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n \ne 0; \end{cases}$$

$$P_{-1/2+\alpha_s^{nN\pm}}^{-nN}(\pm\cos\gamma) = 0,$$

$$\zeta_s^{nN\pm} = \alpha_s^{nN\pm} - \frac{(1+v)}{2N}C_\mu^{nN}\Big|_{\mu=\alpha_s^{nN\pm}} + O((1+v)^2),$$

$$C_\mu^{nN} =$$

$$= \frac{(-1)^{nN}\cos\pi\mu}{\pi\frac{\Gamma(1/2+\mu+nN)}{\Gamma(1/2+\mu-nN)}\frac{d}{d\mu}[P^{-nN}_{-1/2+\mu}(\cos\gamma)P^{-nN}_{-1/2+\mu}(-\cos\gamma)]},$$

$$\alpha_s^{nN\pm}\Big|_{n=0} = \alpha_s^{\pm},$$

где α_q^{nN+} соответствует верхнему знаку у аргумента функции Лежандра, а α_q^{nN-} нижнему.

Спектр собственных значений граничной задачи для конуса с узкими щелями совпадает с множеством $\{\zeta_s^{nN\pm}\}$ и представляет собой возмущенный спектр $\{\alpha_s^{nN\pm}\}$ граничной задачи Дирихле для сплошного конуса [5]. Следует отметить, что спектральными параметрами граничной задачи являются угловые размеры конической структуры, а наименьшее из собственных значений определяет поведение поля вблизи вершины конуса.

В случае узких конических секторов ($(1-v) \ll 1$) приведем асимптотическое разложение u^s ($\vartheta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$):

$$u^s = \frac{1}{2\ln(0.5(1-v))}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{inN\varphi}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau e^{\pi\tau}\frac{b_{0\tau}}{\widehat{F}_{i\tau}}\frac{\frac{1}{|n|}(1-\eta_{0n})}{\widehat{D}_{i\tau}-\sum\limits_{s\neq 0}\frac{1}{|s|}\eta_{0s}}\frac{P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\pm\cos\vartheta)}{P^{nN}_{-1/2+i\tau}(\pm\cos\gamma)}d\tau +$$

$$+O\left(\frac{1-v}{\ln(0.5(1-v))}\right),$$

$$\widehat{F}_{i\tau} = \frac{1}{\widehat{D}_{i\tau}-\frac{1}{N}\sum\limits_{s\neq 0}\frac{1}{|s|}\eta_{0s}} - \frac{1}{\frac{1}{N}\ln(0.5(1-v))},$$

$$\widehat{D}_{i\tau} = \frac{1}{N|n|}(1-\eta_{0n})\Big|_{n=0}.$$

Спектр собственных значений определяется корнями уравнения

$$\frac{\cos\pi\mu}{\pi P_{-1/2+\mu}(\cos\gamma)P_{-1/2+\mu}-\cos\pi\mu\sum\limits_{s\neq 0}\frac{1}{|s|}\eta_{0s}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}\ln(0.5(1-v))},$$

которые располагаются вблизи нулей $\cos\pi\mu$. Спектр граничной задачи для одного узкого конического сектора ($N = 1$) представляет собой множество $\{\mu_s\}_0^{+\infty}$:

$$\mu_s = 0.5 + s -$$

$$-\frac{1}{\ln(0.5(1-v))}[P_s(\cos\gamma)]^2 + O(\ln^{-2}(1-v)).$$

В работе предложен и строго обоснован численно-аналитический метод решения граничных задач для конических структур с радиальными щелями. Преимущество этого метода заключается в том, что сложную трехмерную граничную задачу удается свести к БСЛАУ с матричными коэффициентами, не зависящими от волнового параметра, и представляется возможным построить аналитическое решение, как это сделано в [6, 7].

Предложенный метод может быть использован для решения нестационарных краевых задач с более сложной геометрией рассеивающей поверхности.

Результаты работы частично были доложены на 2-й Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной физики" (24–29 июля 2000 г.), Дубна, Россия [8].

Авторы выражают благодарность акад. Ю.В. Гуляеву, чл.-корр. РАН Л.Д. Бахраху и чл.-корр. РАН В.И. Пустовойту, а также проф. Е.Г. Зелкину и проф. Я.С. Шифрину за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Конторович М.И., Лебедев Н.Н.* // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 10/11. С. 1193.
2. *Дорошенко В.А., Сологуб В.* // РЭ. 1990. Т. 35. № 12. С. 2624.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1971.
5. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 2.
6. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* // РЭ. 2000. Т. 45. № 7. С. 792.
7. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 3.
8. *Doroshenko V.A.* 2nd Intern. Modern Trends in Computational Physics. July 24–29 2000. Dubna, Russia. Book of Abstracts. P. 61.