УДК 510.62

Н. Г. САРНАВСКИЙ, канд. техн. наук, *Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО*, д-р техн. наук, *В. В. ШЛЯХОВ*

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПРЕДИКАТА ДИФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ

Предикат дифункциональности имеет интересные приложения при математическом моделировании работы органов чувств. Он также играет важную роль в теории идентификации динамических систем методом сравнения. В статье изучаются некоторые свойства предиката дифункциональности.

Пусть $T(x, y)$ — предикат, заданный на декартовом квадрате множества A.

Определение 1. *$T(x, y)$ — дифункционален (квазитранзитивен) тогда и только тогда, когда он обладает свойством: из равенств $T(x, y)=1$, $T(z, y)=1$, $T(z, t)=1$ следует, что $T(x, t)=1$.*

Теорема 1. *$T(x, y)$ — дифункционален тогда и только тогда, когда существуют множество B и два отображения $f_1: A \to B$, $f_2: A \to B$ такие, что*

$$T(x, y) = D_B(f_1(x), f_2(y)),$$

где *D_B — предикат равенства на $B \times B$.*

Доказательство. I. Достаточность очевидна. II. *Необходимость.* Пусть

$$E_0 = \{x \in A / T(x, y) = 0, \quad \forall y \in A\}, \quad A_1 = A \setminus E_0;$$

$$E_0' = \{y \in A / T(x, y) = 0, \quad \forall x \in A\}, \quad A_2 = A \setminus E_0';$$

$$A_x = \{y \in A / T(x, y) = 1\}, \quad A_y = \{x \in A / T(x, y) = 1\};$$

$E = \{E_0, A_y\}$ — множество различных классов A_y плюс E_0 и соответственно $E' = \{E_0', A_x\}$.

Отметим некоторые свойства введенных множеств.

1. Если $E_0 = A$, то $E_0' = A$, и наоборот. В этом случае утверждение теоремы вытекает сразу, поскольку $B = \{0, 1\}$, $f_1: A \to 0$, $f_2: A \to 1$, и тогда $T(x, y) = D_B(f_1(x), f_2(y))$.

Следовательно, в дальнейшем будем считать, что $E_0 \neq A$ и $E_0' \neq A$.

2. Если $x_1 \neq x_2$, то либо $A_{x_1} = A_{x_2}$, либо $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \Phi$.
3. E и E' — равномощны.

Первое свойство очевидно, второе вытекает из дифункциональности предиката $T(x, y)$, поскольку если $A_{x_1} \cap A_{x_2} \neq \Phi$, то существует $y_1 \in A_{x_1} \cap A_{x_2}$, и для любого $y \in A_{x_1}$ выполняется следующее: $T(x_2, y_1) = 1$, $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_1, y) = 1$. Значит, $T(x_2, y) = 1$ и $y \in A_{x_2}$; а $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. Точно так же можно доказать, что $A_{x_2} \subset A_{x_1}$. В итоге $A_{x_1} = A_{x_2}$. Это утверждение верно и для классов A_y.

Третье свойство вытекает из того, что существует взаимно-однозначное отображение между E и E'. Строится оно следующим образом: $\varphi : E \to E'$, $\varphi(E_0) = E_0'$, $\varphi(A_y) = A_x$, если $T(x, y) = 1$. Нетрудно убедиться в корректности этого определения и в том, что отображение взаимно-однозначно.

Из этих свойств следует, что E и E' — два равномощных разбиения сомножества A, поэтому в качестве B можно взять одно из них, например E' плюс E_0, т. е. $B = \{A_x, E_0, E_0'\}$. Теперь $f_2 : A \to B$ строим так:

$$f_2(y) = \begin{cases} E_0', & \text{если } y \in E_0'; \\ A_x, & \text{если } y \in A_x \subset A_2, \end{cases}$$

а $f_1 : A \to B$ — так:

$$f_1(x) = \begin{cases} E_0, & \text{если } x \in E_0; \\ \varphi(A_y), & \text{если } x \in A_y \subset A_1. \end{cases}$$

Тогда $T(x, y) = D_B(f_1(x), f_2(y))$.

Проверим последнее равенство. Пусть $T(x, y) = 1$, то $x \in A_1$, $y \in A_2$ и существуют A_x и A_y такие, что $y \in A_x$, $x \in A_y$. Значит,

$f_1(x) = \varphi(A_y) = A_x = f_2(y)$, т. е. $T(x, y) = D_B(f_1(x), f_2(y))$.

Если

$$T(x, y) = 0, \text{ то } x \notin A_y,\ y \notin A_x \text{ и } \varphi(A_y) \neq A_x,$$

следовательно,

$$f_1(x) \neq f_2(y) \text{ и } D_B(f_1(x), f_2(y)) = 0.$$

Утверждение теоремы доказано.

Определение 2. *Назовем предикат $T(x, y)$, заданный на декартовом квадрате произвольного множества A, перестановочно-дифункциональным, если существуют множества B и C и отображения $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$, $\varphi : B \to C$ такие, что*

$$T(x, y) = D_l(\varphi f(x), f(y)),$$

где f — *отображение «на»*, φ — *взаимно-однозначно*, а D_L — *предикат равенства на множестве $L \times L$, $L = B \cup C$*

Рассмотрим $T(x, y)$, заданный на $A \times A$.

Определение 3. *H назовем левым разбиением множества A, если его элементами являются следующие классы эквивалентности: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда когда $T(x_1, y) \equiv T(x_2, y)$**.

---

* $T(x_1, y) \equiv T(x_2, y)$ означает равенство при любом значении «y».

Определение 4. *$H_п$ назовем правым разбиением множества A, если его элементами являются следующие классы эквивалентности: $y_1 \sim y_2$ тогда и только тогда, когда $T(x, y_1) \equiv T(x, y_2)$.*

Свойства $T(x, y)$: 1) если $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 1$, тогда $T(z, x_1) \equiv T(z, x_2)$; 2) если $T(x, y_1) = T(x, y_2) = 1$, тогда $T(y_1, t) \equiv T(y_2, t)$; 3) если $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 1$, тогда $T(z, x_1) \equiv \equiv T(z, x_2)$ и $T(x_1, z) \equiv T(x_2, z)$; 4) если $T(x, y_1) = T(x, y_2) = 1$, тогда $T(y_1, t) \equiv T(y_2, t)$ и $T(t, y_1) \equiv T(t, y_2)$.

Лемма 1. Если $T(x, y)$ дифункционален, то $H_л$ и $H_п$ — равномощны.

Доказательство. Пусть $A_л = \{x \in A / T(x, y) \equiv 0\}$. Заметим, что если $x_1, x_2 \in A_л$, то $x_1 \sim x_2$, поэтому $A_л \in H_л$. Аналогично $A_п = \{y \in A / T(x, y) \equiv 0$ и $A_п \in H_п$.

Построим теперь отображение θ: $H_л \to H_п$ следующим образом:

$$\theta(X) = \begin{cases} A_п, & \text{если } X = A_л; \\ Y, & \text{если } X \neq A_л \text{ и для любых } x \in X,\ y \in Y; \\ & T(x, y) = 1. \end{cases}$$

Ясно, что определение корректно.

Пусть $X_1 \neq X_2$, однако $\theta(X_1) = \theta(X_2) = Y$, тогда для любых $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ и $y \in Y$ $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 1$. Поскольку $X_1 \neq X_2$, то существует z такое, что $T(x_1, z) \neq T(x_2, z)$. Одно из них должно равняться 1, например $T(x_1, z) = 1$, но тогда из дифункциональности следует, что $T(x_2, z) = 1$ — противоречие. Значит, $X_1 = X_2$.

Очевидно также, для любого X существует $Y = \theta(X)$, и наоборот. Из корректности определения и из доказанных нами свойств следует взаимно-однозначность θ. Таким образом, утверждение леммы доказано.

Лемма 2. Пусть $X \neq A_л$, $Y \neq A_л$ и $X \cap Y = \Phi$, тогда, если $T(x, y)$ обладает свойствами 1, 2, $X = Y$.

Доказательство. Возьмем $x^* \in X \cap Y$ и любой $x \in X$. Тогда, поскольку $X \neq A_л$, то существует y такой, что $T(x, y) = T(x^*, y) = 1$ и из свойства 1 следует, что $T(z, x) = T(z, x^*)$, т. е. x и x^* лежат в одном правом классе Y. Получаем $X \subset Y$. Обратное включение доказывается аналогично при помощи свойства 2. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $X \neq A_л (Y \neq A_п)$ и $X \cap A_п \neq \Phi (Y \cap A_л \neq \Phi)$. Тогда, если предикат $T(x, y)$ обладает свойствами 1, 2, $X \subset A_п \times \times (Y \subset A_л)$.

Доказательство. Возьмем $\forall x \in X$ и $x^* \in X \cap A_п$. Тогда существует y такое, что $T(x^*, y) = T(x, y) = 1$ (поскольку $X \neq A_л$). Из свойства 1 следует, что x^* и x лежат в одном правом классе, но $x^* \in A_п$, значит, $x \in A_п$, следовательно, $X \subset A_п$. Для правых классов доказательство аналогично. Лемма доказана.

Разбиение на левые классы обозначим через $H_л$, т. е. $H_л = \{A_л, X_1, X_2, \ldots\}$. Соответственно через $H_п = \{A_п, Y_1, Y_2, \ldots\}$ разбиение на правые классы.

Замечание. Будем считать, что классов счетное число, поскольку в континуальном случае ничего не меняется.

Из леммы 3 следует, что существует подпоследовательность $X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots$ таких, что $A_n \setminus A_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_r$. Аналогично $A_\lambda \setminus A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_{r_i}$. А из леммы 2 вытекает, что на множестве $A \setminus (A_\lambda \cup A_n)$ разбиения H_λ и H_n совпадают, обозначим эти общие классы через $z_1, z_2, \ldots$. Теперь построим новое разбиение множества A следующим образом:

$$H = \{A_\lambda \cap A_n, X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, Y_{r_1}, Y_{r_2}, \ldots, z_1, z_2, \ldots\}.$$

Совершенно очевидно, что это — разбиение.

Теорема 2. $T(x, y)$ — *дифункционален и обладает свойствами 1, 2 тогда и только тогда, когда он перестановочно-дифункционален.*

Доказательство. 1. Достаточность очевидна. 2. *Необходимость.*

В качестве B возьмем H, т. е. $B = H$. Каждому элементу A поставим в соответствие его класс. Это будет отображение $f: A \to B$. Теперь отобразим классы $(A_\lambda \cap A_n)$, $Y_{r_1}, Y_{r_2}, \ldots$ в какое-то множество M взаимно-однозначным отображением λ. Оставшиеся классы $X_1, X_2, \ldots$ отобразим в классы $Y_1, Y_2, \ldots$ отображением $\theta(X)$, построенным в лемме 1. Из этой же леммы вытекает, что оно будет взаимно-однозначным. Теперь в качестве $C = M \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i\right)$.

Тогда

$$\varphi((A_\lambda \cap A_n)) = \lambda((A_\lambda \cap A_n)); \; \varphi(Y_{r_i}) = \lambda(Y_{r_i}); \; \varphi(X_i) = \theta(X_i).$$

Ясно, что это взаимно-однозначное отображение из B в C. Возьмем $L = B \cup C$, тогда

$$T(x, y) = D_L(\varphi f(x), f(y)).$$

Докажем эту формулу. Пусть $T(x, y) = 1$ и $f(x) = X_i$, $f(y) = Y_j$. Тогда $\varphi(X_i) = Y_j$, это следует из построения φ. Пусть $T(x, y) = 0$ и $f(x) = X_i$, $f(y) = Y_j$. Предположим, что $\varphi(X_i) = Y_j$. Но в этом случае $T(x, y) = 1$ по построению φ — противоречие, значит, $\varphi(X_i) \neq Y_j$. Утверждение теоремы доказано.

Теорема 3. $T(x, y)$ *обладает свойствами 3, 4 тогда и только тогда, когда он перестановочно-дифункционален.*

Теорема эта доказывается аналогично с незначительными изменениями.

Рассмотрим теперь вопрос о перестановочно-дифункциональности предиката $T(x, y)$. Когда классы эквивалентности заданы, то $f: A \xrightarrow{\text{на}} B$ фиксировано. В этом случае условие дифункциональности уже не играет решающей роли.

Сформулируем необходимые и достаточные условия перестановочно-дифункциональности предиката $T(x, y)$ при заданных классах эквивалентности. Эти условия обладают еще и тем свойством, что из них вытекает просто дифункциональность предиката $T(x, y)$; но если хотя бы одно из них заменить дифункциональностью, они уже не будут достаточными. В этом смысле они оптимальны.

Итак, пусть $E(x_1, x_2) = D_B(f(x_1), f(x_2))$ ($f: A \xrightarrow{\text{на}} B$ — фиксировано).

Теорема 4. $T(x, y)$ — *перестановочно-дифункционален (с заданными классами) тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами:* 1) *если* $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 1$, *то* $E(x_1, x_2) = 1$; 2) *если* $T(x, y_1) = T(x, y_2) = 1$, *то* $E(y_1, y_2) = 1$; 3) *если* $T(x_1, y) = E(x_1, x_2) = 1$, *то* $T(x_2, y) = 1$; 4) *если* $T(x, y_1) = E(y_1, y_2) = 1$, *то* $T(x, y_2) = 1$.

Доказательство. I. Необходимость очевидна. II. *Достаточность.*

Рассмотрим классы $A_b = \{a \in A / f(a) = b\}$. Так как $f: A \xrightarrow{\text{на}} B$, то множество $P = \{A_b\}$ является разбиением множества A. Пусть $x^* \in A_{b_1}$, $y^* \in A_{b_2}$ и любые $x \in A_{b_1}$, $y \in A_{b_2}$.

Лемма. $T(x^*, y^*) = T(x, y)$.

Пусть $T(x^*, y^*) = 1$. *Тогда, поскольку* $x \in A_{b_1}$, *то* $E(x^*, x) = 1$ *и из свойства 3 вытекает, что* $T(x, y^*) = 1$. *С другой стороны,* $y^*, y \in A_{b_2}$, *значит,* $E(y^*, y) = 1$ *и из свойства 4 вытекает, что* $T(x, y) = 1$. Лемма доказана.

Это говорит о том, что значения предиката $T(x, y)$ постоянны на классах A_b и определяются любым представителем класса.

Теперь рассмотрим два множества:

$$E_1 = \{x \in A / T(x, y) = 0 \quad \text{для} \quad \forall y \in A\};$$

$$E_2 = \{y \in A / T(x, y) = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in A\}.$$

Если $E_1 \cap A_b \neq \Phi$, то $A_b \subset E_1$ для любого $b \in A_1$. Аналогично, если $E_2 \cap A_b \neq 0$, то $A_b \subset E_2$. Это вытекает из леммы. Таким образом, существует набор классов (обозначим его через M_1) A_b, объединение которых равно $A \setminus E_1$. Набор классов, объединение которых равно E_1, обозначим через M_1'. Для $E_2: M_2, M_2'$.

Построим теперь отображение $\psi: P \to C$ по следующему правилу: $\psi(A_b) = A_{b'}$, если $A_b \in M_1$ и $A_{b'} \in M_2$, причем такие, что существуют $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, для которых $T(x, y) = 1$. Если $A_b \in M_1'$, то переведем его в какой элемент a множества K равномощного M_1', так как K равномощно M_1', то этот перевод можно сделать взаимно-однозначно. Докажем, что ψ, ограниченное на M_1, взаимно-однозначно переводит M_1 в M_2. Этим самым мы докажем и корректность определения ψ.

Рассмотрим два любых $A_{b_1}, A_{b_2} \in M_1$. Пусть $\psi(A_{b_1}) = \psi(A_{b_2}) = A_{b'}$, тогда $\exists x_1 \in A_{b_1}$, $x_2 \in A_{b_2}$, $y \in A_{b'}$ такие, что $T(x_1, y) = T(x_2,$

$y) = 1$. Но по свойству 1 следует, что $E(x_1, x_2) = 1$. Значит, $A_{b_1} = A_{b_2}$.

Рассмотрим два любых $A_{b'_1}, A_{b'_2} \in M_2$. Пусть $\psi(A_b) = A_{b'_1}$ и $\psi(A_b) = A_{b'_2}$. Тогда $\exists x \in A_b$, $y_1 \in A_{b'_2}$ и $y_2 \in A_{b'_2}$ такие, что

$$T(x, y_1) = T(x, y_2) = 1, \quad E(y_1, y_2) = 1$$

(по свойству 2), и аналогично предыдущему $A_{b'_1} = A_{b'_2}$. Значит, отображение $\psi : P \to C = M_2 \cup K$ взаимно-однозначное. Между P и B существует взаимно-однозначное отображение $\theta : B \to P$, $\theta(b) = A_b$. Теперь определим $\varphi : B \to C$. Таким образом, $\varphi = \psi\theta$, тогда очевидно, что $T(x, y) = D_L(\varphi f(x), f(y))$, где $L = B \cup C$. Проверяется это точно так же, как в теореме 2.

Покажем теперь, что найденные условия оптимальны. Для этого приведем примеры предикатов, которые дифункциональны, обладают какими-то тремя свойствами, но не обладают четвертым и поэтому не перестановочно-дифункциональны с заданными классами эквивалентности.

Пусть $A = \{1 \div 12\}$, $B = \{B_1, B_2\}$, $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$. Таким образом, $f_1(1) = \ldots = f(7) = B_1$, $f(8) = \ldots = f(12) = B_2$. I. Предикат $T(x, y)$ задан на классах $K = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{5, 6, 7\}$ и $M = \{8, 9, 10, 11, 12\}$ так:

T	K	L	M
K	0	0	0
L	0	0	0
M	0	1	0

Тогда $T(x, y)$ обладает свойствами 1, 2, 3 и дифункционален, но не обладает свойством 4, поскольку $T(8, 6) = 1$, $E(6, 1) = 1$, но $T(8, 1) = 0$. Значит, $T(x, y)$ не перестановочно-дифункционален с заданными классами эквивалентности.

Если изменить

T	K	L	M
K	0	0	0
L	0	0	1
M	0	0	0

то у $T(x, y)$ остаются дифункциональность и свойства 1, 2, 4, кроме 3, так как $T(5, 10) = 1$, $E(5, 2) = 1$, но $T(2, 10) = 0$. $T(x, y)$ не будет перестановочно-дифункциональным.

II. Если в качестве $B = \{B_1, B_2, B_3\}$ и $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$ такое, что

$$f(1) = \ldots = f(5) = B_1, \; f(6) = \ldots = f(9) = B_2 \text{ и}$$
$$f(10) = f(11) = f(12) = B_3,$$

то $T(x, y)$ можно задать на таких классах: $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $L = \{6, 7, \ldots, 12\}$, причем так, что

$$T(K, L) = 1, \; T(L, K) = T(K, K) = T(L, L) = 0.$$

Тогда $T(x, y)$ — дифункционален, обладает свойствами 1, 3, 4, но не 2, так как $T(1, 6) = T(1, 12) = 1$, но $E(6, 12) = 0$. Значит, $T(x, y)$ не перестановочно-дифункционален с заданными классами.

Если теперь $T(K, L) = T(K, K) = T(L, L) = 0$, а $T(L, K) = 1$, то останутся у $T(x, y)$ дифункциональность, свойства 2, 3, 4, но не 1, поскольку $T(7, 1) = T(11, 1) = 1$, а $E(7, 11) = 0$. Следовательно, $T(x, y)$ не перестановочно-дифункционален с заданными классами.

Построенные четыре предиката свидетельствуют об оптимальности найденных нами условий. Отметим, что первые два предиката разбивают A на более мелкие классы, чем отображение f, поэтому не выполняется одно из вторых двух условий; вторые два предиката разбивают A на более крупные классы, чем f, поэтому не выполняется одно из первых двух условий.

Список литературы: 1. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.—240 с. 2. *Курош А. Г.* Теория групп. Изд. 3-е, дополненное. — М.: Наука, 1967. — 300 с. 3. *Мальцев А. И.* Некоторые вопросы теории классов моделей.— Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда.— Л., 1963, с. 169—198.

Поступила в редколлегию 17.03.81.