

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРЕ С СИСТЕМОЙ ФУНКЦИЙ « $\cdot$ », « $\vee$ », « $\Rightarrow$ »

В. Л. Белявский, Ю. А. Василенко, Н. Я. Какурин

Харьков

В статье излагается метод построения одного класса нормальных форм представления булевых функций с системой операций « $\Rightarrow$ », « $\cdot$ », « $\vee$ », который используется для синтеза формальных нейронов согласно некоторому критерию оптимальности.

Формальный нейрон [1] является структурой, определяемой волокнами, которые делятся на возбуждающие, тормозящие, запрещающие, и порогом возбуждения. Эта система функционирует в соответствии с законом

$$\sum_{i=1}^k w_i Y_i > T, \text{ то } f(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k w_i Y_i \leq T, \text{ то } f(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Здесь Y_i — i -обобщенная переменная (ветвь [2]);

W_i — вес i -й обобщенной переменной;

T — порог возбуждения формального нейрона;

k — число обобщенных переменных ($k = 1, \dots, n$);

n — число булевых переменных ($x_1, x_2, \dots, x_n$).

Реализация формальным нейроном некоторой булевой функции записывается следующим образом:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \sim [w_1, \dots, w_k | T]. \quad (2)$$

Пример.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_5) &= \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_5 = \\ &= \underbrace{(\bar{x}_1 x_3 \vee x_3 x_5)}_{y_3} \vee \underbrace{x_3 (x_1 \bar{x}_2 x_4)}_{y_1} \vee \underbrace{(\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4)}_{y_4}, \\ f(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &\sim [1122 | 1]. \end{aligned}$$

Задача синтеза формального нейрона в зависимости от исходных данных может решаться двумя путями:

1. По заданной пороговой диаграмме формального нейрона определить его структуру, т. е. типы волокон и их веса с учетом некоторого критерия оптимальности. Пороговая диаграмма задает в неявном виде систему логических функций, реализуемую формальным нейроном при изменении его порога в некотором интервале. Такая задача решена в работе [2].

2. По заданной булевой функции определить структуру формального нейрона, т. е. типы и веса волокон, порог формального нейрона с учетом некоторого критерия оптимальности.

Критерии оптимальности формальных нейронов с учетом [1] следующие:

- минимальная сумма волокон формального нейрона N ;
- минимальное количество обобщенных переменных (ветвей), R ;
- глубина запрета H не превосходит заданную;
- сложность обобщенной переменной (число волокон ветви), L ;
- надежность формального нейрона.

Поясним, что понимается под последним критерием оптимальности.

Определение. Вероятностной диаграммой формального нейрона, реализующего функцию n переменных, назовем символ Венна n переменных, в каждой ячейке которого поставлены 0, P , 1 [2]. Буква P , стоящая в j -й ячейке, означает, что если на вход формального нейрона подан некоторый набор булевых переменных, то существует такое значение порога формального нейрона из указанного интервала изменения порога, что нейрон возбуждается, и такое значение порога, что нейрон не возбуждается.

Определение. Сеть вероятностных диаграмм называется надежной, если результирующие диаграммы сети не содержат букв P и не вполне надежной, если среди ее результирующих диаграмм есть по крайней мере одна, содержащая букву P [2]. В частности, вероятностная диаграмма является не вполне надежной, когда на ней имеются буквы P . Говорят, что формальный нейрон Ω_1 более надежен, чем Ω_2 , реализующий ту же функцию, если число P -ячеек формального нейрона Ω_1 меньше числа P -ячеек формального нейрона Ω_2 . Поэтому под критерием надежности формального нейрона будем понимать минимальное число P -ячеек вероятностной диаграммы нейрона при заданном интервале изменения порога нейрона.

В данной работе делается попытка решить вторую задачу синтеза с учетом первых двух критериев оптимальности формального нейрона.

Определение 1. Нейронной нормальной формой (н. н. ф.) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется представление функции в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = F[Y_1, \dots, Y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}],$$

где x_i — i -я булева переменная ($1 \leq i \leq n$);

Y_j — j -я обобщенная переменная ($1 \leq j \leq k$);

k — число обобщенных переменных ($1 \leq k \leq n$);

F — пороговая функция.

Функция называется пороговой при условии, что если закон ее функционирования

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i > T, \text{ то } f(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

(4)

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq T, \text{ то } f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Здесь x_i — i -я булева переменная ($1 \leq i \leq n$);

w_i — вес i -й булевой переменной;

T — порог порогового элемента (ПЭ).

Нетрудно видеть, что пороговая функция $\psi(x_1, \dots, x_n)$, представленная в д. н. ф., является нейронной нормальной формой функции $\phi(x_1, \dots, x_n)$ с глубиной запрета, равной нулю ($H = 0$).

прямая MN , параллельная оси абсцисс, — константе единицы, т. е.

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1. \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые соответствия между кривыми пространства (f, T) и булевыми функциями, реализуемыми формальными нейронами. Точка A_1 отвечает функции $f_{A_1}(x_1, \dots, x_n)$, реализуемой формальным нейроном с порогом T_{A_1} . Отрезок $A_1 - B_1$ соответствует двум различным функциям, реализуемым одним формальным нейроном с порогом T_{A_1} и T_{B_1} , отрезок $A_2 - B_2$ — двум различным функциям, реализуемым двумя формальными нейронами с одинаковым значением порога T_{A_2} , отрезок $A_3 - B_3$ — одной функции, реализуемой двумя формальными нейронами с двумя различными значениями порогов. Кривая PQ отвечает реализации одним формальным нейроном системы булевых функций при изменении порога от T_i до T_j . При $T_i = T_j$ получаем прямую, параллельную оси ординат. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна единице на наборе $\alpha = x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n w_{i, 1} x_i > T_i, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n w_{i, 2} x_i > T_j.$$

Здесь $w_{i, k}$ — вес i -й обобщенной переменной k -го формального нейрона, реализующего одну и ту же функцию.

Если $T_i < T_j$, то

$$\sum_{i=1}^n |w_{i, 1}| < \sum_{i=1}^n |w_{i, 2}|. \quad (9)$$

Следовательно, при T , стремящемся к нулю, $\sum_{i=1}^n |w_i|$ стремится к $\min \left(\sum_{i=1}^n |w_i| \right)$. Так как произвольная булева функция представима в с. н. н. ф., то всегда возможна ее реализация формальным нейроном с порогом нуль (при отсутствии ограничений на глубину запрета).

Пример.

$$f(x_1, \dots, x_5) \sim [11234/5] \Sigma w_i = 11,$$

$$f(x_1, \dots, x_5) \sim [11357/8] \Sigma w_i = 17.$$

Достаточность. Пусть задана некоторая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, две ее простые импликанты u_i и u_j содержат общую булеву переменную x_i , т. е.

$$u_i \cap u_j = x_i.$$

Тогда, представляя каждую простую импликанту в импликативной форме (5), находим

$$x_i u_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee x_i u_2(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ = x_i \rightarrow \overline{u_1} \vee x_i \rightarrow \overline{u_2}, \quad (10)$$

$$x_i u_1 \vee x_i u_2 = x_i (u_1 \vee u_2) = x_i u_1 u_2 = x_i \rightarrow \overline{u_1} \rightarrow \overline{u_2}.$$

Повторяя эту процедуру над всеми импликантами функции, получаем выражение с минимальным количеством букв для функции, представленной в скобочной форме. Общей частью простых импликант может быть

также простая импликанта, что даст еще большую экономию волокон нейрона. Так как решение бывает неоднозначным, то необходимо определить скобочную форму записи функции, которую можно преобразовать в произвольную н. н. ф. функции.

Теорема 2. Скобочная форма записи функции $f(x_1, \dots, x_n)$

$$f(x_1, \dots, x_n) = A(B \vee C), \quad (11)$$

и только она преобразуется в произвольную н. н. ф.

Здесь A — конъюнкция булевых переменных;

B — булева переменная;

C — формула алгебры высказываний, которая, в свою очередь, может быть приведена к виду (11).

Доказательство. Выражение (11) можно преобразовать так:

$$A(B \vee C) = A(\overline{BC}) = \overline{A \rightarrow BC} = \overline{A \rightarrow B \rightarrow C}. \quad (12)$$

Если A представляется как $A = \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$, то равенство (12) запишется:

$$\overline{A \rightarrow B \rightarrow C} = \overline{\tilde{x}_{i_1} \rightarrow \tilde{x}_{i_2} \dots \tilde{x}_{i_k} \rightarrow B \rightarrow C} \quad (13)$$

(частный случай A — булева переменная).

Из теории пороговых функций [2] известно, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim [w_1, \dots, w_n | T].$$

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \sim \left[-w_1, \dots, -w_n \mid T - \sum_{i=1}^n w_i \right], \quad (14)$$

$$f^*(x_1, \dots, x_n) \sim \left[w_1, \dots, w_n \mid \sum_{i=1}^n w_i - T - 1 \right].$$

Символ $\sim$ соответствует тому, что элемент реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad (15)$$

то

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = f^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \quad (16)$$

Поэтому выражение вида $A \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$ не реализуется формальным нейроном, так как вес запрещающего волокна не может быть равным -1 .

По индукции выражение (12) имеет вид

$$A(B \vee C(D \vee E(\dots(K(M \vee N)\dots))). \quad (17)$$

Заметим, что входными переменными формального нейрона могут быть как переменные x_i , так и их инверсии $\bar{x}_i$. Алгоритм синтеза формального нейрона с учетом суммарного количества волокон нейрона сводится к следующему:

1. Определяется число вхождений r_i переменной x_i в с. д. н. ф. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и число M_i сокращенных букв функции, получаемых в результате вынесения этой переменной за скобки.

2. Находится число r_{ij} вхождений простой ампликанты $\tilde{x}_i \tilde{x}_j$ в с. д. н. ф. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и число M_{ij} сокращенных букв функции (правила определения сокращенных букв одни и те же).

3. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет проверена про-

стая импликанта максимальной длины (максимальное число букв импликанты).

4. За скобку выносится та простая импликанта, которая дает максимальное число сокращенных переменных функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

5. Процесс получения скобочной записи функции $f(x_1, \dots, x_n)$ повторяется над простыми импликантами, не вошедшими в предыдущую скобку и т. д., пока вынесение общих переменных станет невозможным (вынесение общих членов за скобку производится согласно теореме 2).

6. Скобочная форма записи преобразуется в импликативную.

7. Определяется суммарное количество волокон формального нейрона.

Пример.

$$f(x_1, \dots, x_6) = x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_5 x_6;$$

$r_1 = 3$	$r_{12} = 2$	$M_{12} = 3$ (1-й вариант)
$r_2 = 2$	$r_{13} = 2$	$M_{13} = 3$ (2-й вариант)
$r_3 = 2$	$r_{14} = r_{15} = 1$	

$$\begin{aligned} 1. f(x_1, \dots, x_6) &= x_1 x_2 (x_3 \vee x_4) \vee x_5 (x_6 \vee x_1 x_3) = \\ &= \overline{x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4} \vee \overline{x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3}, \\ \Sigma w_i &= 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x_1, \dots, x_6) &= x_1 x_3 (x_2 \vee x_5) \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_5 x_6 = \\ &= \overline{x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5} \vee \overline{x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4} \vee \overline{x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6}. \\ \Sigma w_i &= 9. \end{aligned}$$

Теорема 3. Чтобы синтезировать формальный нейрон с минимальным количеством обобщенных переменных (ветвей) R , необходимо и достаточно представить исходную булеву функцию в н. н. ф., количество переменных которой минимально.

Доказательство с очевидностью вытекает из теоремы 1.

Пример.

$$f(x_1, \dots, x_6) = x_1 x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_5 x_6 \vee x_1 x_6.$$

1-й вариант

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_6) &= x_1 (x_6 \vee x_2 x_3) \vee x_3 x_4 \vee x_5 x_6 = \\ &= \overline{x_1 \rightarrow x_6 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3} \vee \overline{x_4 \rightarrow x_3} \vee \overline{x_6 \rightarrow x_5}; \quad R = 3; \quad \Sigma w_i = 8; \end{aligned}$$

2-й вариант

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_6) &= x_3 (x_4 \vee x_1 x_2) \vee x_6 (x_1 \vee x_5) = \\ &= \overline{x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2} \vee \overline{x_6 \rightarrow x_5 \rightarrow x_1}; \quad R = 2; \quad \Sigma w_i = 7. \end{aligned}$$

Предложенный алгоритм синтеза формальных нейронов с учетом суммы волокон и количества обобщенных переменных (ветвей) не требует решения систем линейных уравнений, что отличает его от ранее известных [2], и позволяет синтезировать формальный нейрон с указанными ограничениями для $n > 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Василенко, Н. Я. Какурин, В. Л. Белявский. Об одном методе записи выражения для запрещающих волокон формального нейрона. Сб. «Проблемы бионики», вып. 1, Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
2. И. Б. Гутчин, А. С. Кузичев. Бионика и надежность. Изд-во «Наука», 1967.
3. S. Muroga, I. Toda, S. Takasu. Theory of majority decision elements. Journal of the Franklin institute, v. 271, N 5, 1961.