# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Полковниченко Е.Ю., Шульгина С.С.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: eoxa77@gmail.com

The problem of mathematical modeling and numerical analysis of viscous incompressible fluid flows often occurs when analyzing real flows in science and technology. Thus, there is a necessity to study the flows in which a nonstationarity manifests not only in depending on time of the flow characteristics but also in dependence on time of area, in which the flow is considered. An example of such flow may serve the interfusion of the mixture in a mixer with moving blades.

При анализе реальных течений в науке и технике часто возникает проблема математического моделирования и численного анализа течений вязкой несжимаемой жидкости. При этом обычна ситуация, когда с течением времени изменяются не только характеристики потока, но и сама область, в которой рассматривается течение.

Рассмотрим плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области $\Omega(t)$, форма которой меняется с течением времени $t$. Пусть область $\Omega(t)$ является двусвязной и ее граница $\partial\Omega(t)$ состоит из внешнего контура $\partial\Omega_0$, который будем считать неизменным во времени, и внутреннего контура $\partial\Omega_1(t)$, форма которого с течением времени может меняться. Кроме того, считаем, что границы области являются непроницаемыми твердыми стенками, внешняя граница неподвижна, а течение в $\Omega(t)$ развивается из состоянии покоя и вызвано вращением «пропеллера» с постоянной угловой скоростью $w$. Требуется определить поле скоростей $(v_x, v_y)$ течения в области $\Omega(t)$.

Для функции тока $\psi(x, y, t)$ течения можно поставлена начально-краевую задачу:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_1(t)} = c(t), \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)} = g(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{Re}$ – числе Рейнольдса, $c(t)$ – некоторая неизвестная функция от $t$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе области $\Omega(t)$, $\Delta^2$ – бигармонический оператор. Функция $g(t)$ задается, исходя из заданной на $\partial\Omega_1(t)$ скорости жидкости, а $c(t)$ находится из условия однозначности давления в двусвязной области

$$\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \mathbf{n}} ds = 0, \qquad (3)$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа.

Обозначим $\partial\Omega(t) = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1(t)$. Для решения задачи (1) – (3) воспользуемся принципом суперпозиции и методом R-функций.

Структура решения задачи (1) – (3) была построена в виде

$$\psi(x,y,t) = -\frac{\omega \cdot g \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_0 + c(t)\left[\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}\right) + \omega^2 \Phi_1\right].$$

Здесь $\Phi_0$, $\Phi_1$ – неопределенные компоненты, $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$, а функции $\omega = \omega(x,y,t)$, $\omega_0 = \omega_0(x,y)$, $\omega_1 = \omega_1(x,y,t)$ строятся с помощью метода $R$-функций и должны удовлетворять условиям

$$\forall t \ge 0 \quad \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega(t); \quad \omega > 0 \text{ в } \Omega(t); \quad \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega(t),$$

$$\omega_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_0; \quad \omega_0 > 0 \text{ в } \Omega(t) \cup \partial\Omega_1(t); \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_0,$$

$$\forall t \ge 0 \quad \omega_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1(t); \quad \omega_1 > 0 \text{ в } \Omega(t) \cup \partial\Omega_0; \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_1(t).$$

Для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах воспользовались методом Галёркина для нестационарных задач.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 1.

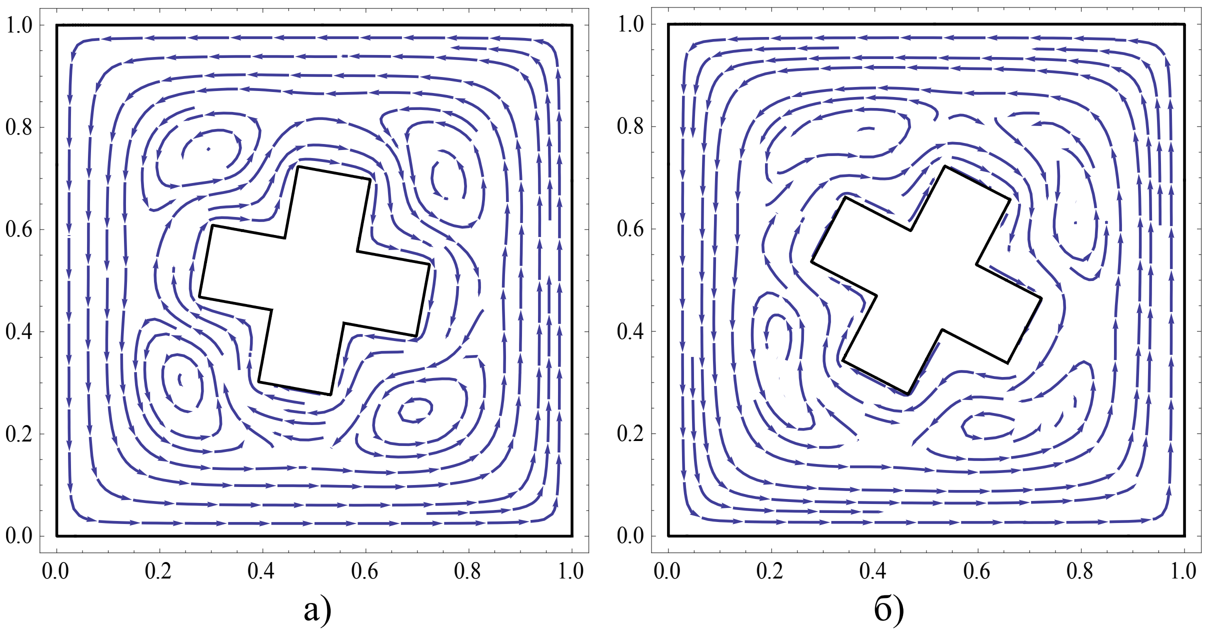


Рисунок 1 – Поле скоростей при $t = 0{,}05$ (а) и $t = 0{,}15$ (б)