



СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ДЕКАРТОВОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

ЧУРЮМОВ Г.И., СТАРЧЕВСКИЙ Ю.Л.,
ЛЕБЕДЕВ О.Г., НОВИКОВ Н.И.

Рассматривается трёхмерное численное решение уравнения Пуассона конечно-разностным неявным итерационным методом в декартовой и цилиндрической системах координат. Показывается, что погрешность аппроксимации уравнения Пуассона в декартовой системе координат зависит только от величины пространственной дискретизации, а в цилиндрической системе координат эта погрешность зависит от величины пространственной дискретизации и радиуса. Для оценки влияния этих факторов на эффективность численного решения уравнения Пуассона проводится вычислительный эксперимент, который позволяет дать количественную сравнительную оценку точности и времени решения.

1. Введение

При проведении электродинамических расчётов численными методами важным этапом является выбор и проверка согласованности, точности, устойчивости и эффективности разностных схем аппроксимации уравнений в частных производных [1]. В практике разработки численных математических моделей используются различные схемы разностной аппроксимации. Это требует проведения подробного анализа данных моделей с точки зрения удовлетворения указанным выше критериям.

Целью данной работы является анализ точности и эффективности численного решения уравнения Пуассона в декартовой и цилиндрической системах координат.

2. Постановка задачи

Известно, что аналитические решения уравнения Пуассона существуют только для простейших случаев задания граничных условий. В действительности часто приходится сталкиваться со сложной геометрией электродов и неравномерным распределением плотности объёмного заряда ρ . Поэтому приходится применять численные методы решения. В этом случае выбор системы координат для решения уравнения Пуассона зависит от конфигурации электродов и исследуемого пространства (рис. 1, а и б). К тому же, конечно-разностные выражения, записанные в декартовой системе координат, обычно более простые и легче для вычис-

лений. Однако применение декартовой системы координат для решения задач, обладающих азимутальной симметрией, вызывает трудности, связанные с корректным заданием граничных условий. Для оценки точности вычислений рассмотрим и сравним численное решение азимутально-симметричной задачи в двух системах координат, выделяя положительные и отрицательные моменты такого решения.

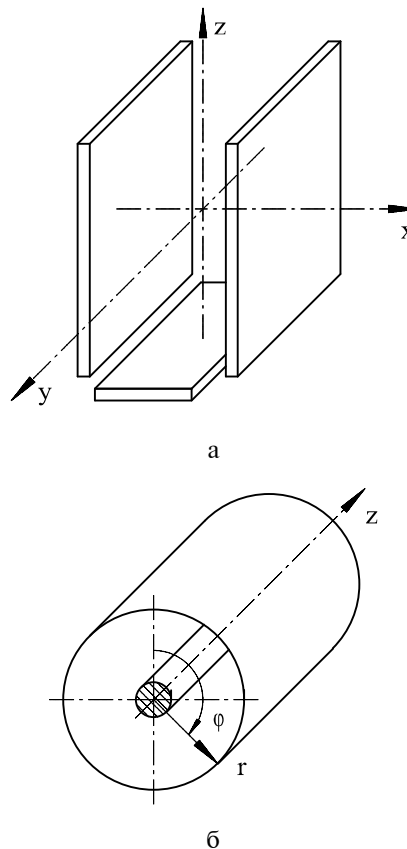


Рис. 1. Выбор системы координат

В декартовой системе координат уравнение Пуассона запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Решение (1) ищется при помощи разностной схемы, которая показана на рис. 2 и описана в работе [2]. Используя трёхточечную разностную аппроксимацию, уравнение (1) запишем в виде:

$$\frac{U_{i+1,j,k} - 2 \cdot U_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1,k} - 2 \cdot U_{i,j,k} + U_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \frac{U_{i,j,k+1} - 2 \cdot U_{i,j,k} + U_{i,j,k-1}}{h_z^2} \approx -\frac{\rho_{i,j,k}}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

Переменные i, j, k в (2) обозначают номер узла по осям x, y, z . Количество узлов по каждой оси и размеры расчётной области выбираются пользователем, и, исходя из этих данных, вычисляются соответствующие шаги сетки h_x, h_y, h_z .

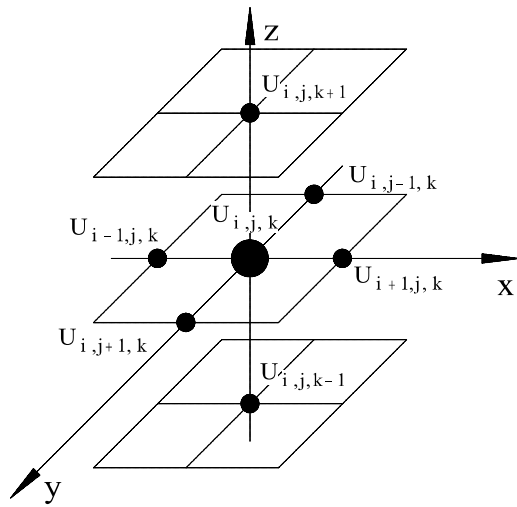


Рис. 2. Сеточная схема в декартовой системе координат

Во всех точках сетки задаются начальные значения потенциала и плотности заряда. Окончательно потенциал для (i, j, k) узла может быть представлен в виде:

$$U_{i,j,k} = \frac{\rho_{i,j,k} + \frac{U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k}}{h_x^2}}{\varepsilon_0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right)} + \frac{\frac{U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}}{h_z^2}}{2 \cdot \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right)} + \varepsilon_1(h), \quad (3)$$

где $\varepsilon_1(h)$ – ошибка разностной аппроксимации уравнения Пуассона в декартовой системе координат.

Выражение (3) используется для определения потенциалов узлов в рассматриваемой области с помощью итерационного метода, который подробно описан в [2].

В цилиндрической системе координат уравнение Пуассона запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 U(r, \varphi, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U(r, \varphi, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial U(r, \varphi, z)}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial^2 U(r, \varphi, z)}{r^2 \cdot \partial \varphi^2} = -\frac{\rho(r, \varphi, z)}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Решение (4) ищется при помощи разностной схемы, которая показана на рис. 3 и описана в работе [2].

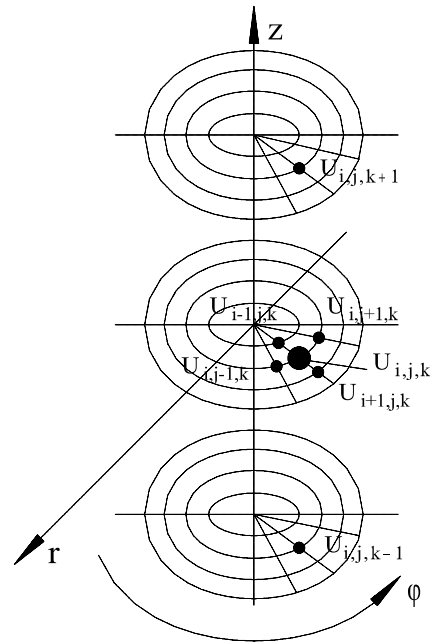


Рис. 3. Сеточная схема в цилиндрической системе координат

В этом случае (4) приближённо записывается в виде:

$$\frac{U_{i,j,k+1} - 2 \cdot U_{i,j,k} + U_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \frac{U_{i+1,j,k} - 2 \cdot U_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}}{h_r^2} + \frac{U_{i+1,j,k} - U_{i-1,j,k}}{2 \cdot r \cdot h_r} + \frac{U_{i,j+1,k} - 2 \cdot U_{i,j,k} + U_{i,j-1,k}}{r^2 \cdot h_\varphi^2} \approx -\frac{\rho_{i,j,k}}{\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Переменные i, j, k в (5) обозначают номер узла по осям r, φ, z . По аналогии с декартовой системой координат окончательно получаем потенциал для (i, j, k) узла:

$$U_{i,j,k} = \frac{\frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \frac{U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k}}{h_r^2}}{\varepsilon_0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{r^2 \cdot h_\varphi^2} \right)} + \frac{\frac{U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k}}{2 \cdot r \cdot h_r^2} + \frac{U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}}{r^2 \cdot h_\varphi^2} + \frac{\rho_{i,j,k}}{\varepsilon_0}}{2 \cdot \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{r^2 \cdot h_\varphi^2} \right)} + \varepsilon_2(h), \quad (6)$$

где $\varepsilon_2(h)$ – ошибка разностной аппроксимации уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат.

Выражения (3) и (6) являются базовыми для решения уравнения Пуассона в декартовой и цилиндрической системах координат. Для более точного представления границ расчётной области в декартовой системе координат использовался метод, предложенный в [3]. Он заключался в применении опорных точек в местах пересечения границ с линиями сетки для составления разностных уравнений. Для определения координат опорных точек необходимо решать систему уравнений, описывающих границы расчётной области и линии сетки. Это несколько усложняет алгоритм, однако позволяет значительно повысить точность описания границ электродов с помощью равномерной сетки разбиения. В результате имеем, что в области, прилегающей непосредственно к поверхности электродов, сетка становится неравномерной. В этом случае уравнение (1) переписывается в виде¹:

$$\begin{aligned} & \frac{U(x+h_x^+) - U}{h_x^+} - \frac{U - U(x-h_x^-)}{h_x^-} + \\ & \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \\ & \frac{U(y+h_y^+) - U}{h_y^+} - \frac{U - U(y-h_y^-)}{h_y^-} + \\ & \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + \\ & \frac{U(z+h_z^+) - U}{h_z^+} - \frac{U - U(z-h_z^-)}{h_z^-} + \\ & \frac{h_z^+ + h_z^-}{2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где h_x^+, h_y^+, h_z^+ – расстояние между соответствующими текущими и следующими узлами координатной сетки; h_x^-, h_y^-, h_z^- – расстояние между соответствующими текущими и предыдущими узлами координатной сетки.

Из выражения (7) можно получить следующую итерационную формулу для общего случая неравномерной сетки:

$$\begin{aligned} U = & \frac{\frac{U(x+h_x^+)}{h_x^+} + \frac{U(x-h_x^-)}{h_x^-}}{\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}} + \\ & \frac{\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-}}{\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}} \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{h_y^+} + \frac{1}{h_y^-}}{\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}} \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{h_z^+} + \frac{1}{h_z^-}}{\frac{h_z^+ + h_z^-}{2}} \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{U(y+h_y^+)}{h_y^+} + \frac{U(y-h_y^-)}{h_y^-}}{\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}} + \\ & \frac{\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-}}{\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}} \frac{\frac{1}{h_y^+} + \frac{1}{h_y^-}}{\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}} \frac{\frac{1}{h_z^+} + \frac{1}{h_z^-}}{\frac{h_z^+ + h_z^-}{2}} + \\ & \frac{\frac{U(z+h_z^+)}{h_z^+} + \frac{U(z-h_z^-)}{h_z^-}}{\frac{h_z^+ + h_z^-}{2}} + \\ & \frac{\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-}}{\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}} \frac{\frac{1}{h_y^+} + \frac{1}{h_y^-}}{\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}} \frac{\frac{1}{h_z^+} + \frac{1}{h_z^-}}{\frac{h_z^+ + h_z^-}{2}} + \\ & \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} + \\ & \frac{\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-}}{\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}} \frac{\frac{1}{h_y^+} + \frac{1}{h_y^-}}{\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}} \frac{\frac{1}{h_z^+} + \frac{1}{h_z^-}}{\frac{h_z^+ + h_z^-}{2}} \end{aligned}$$

Выражение (8) позволяет при достаточном числе итераций получить численное решение уравнения Пуассона в декартовой системе координат.

3. Оценка точности разностной аппроксимации

В работе [2] при помощи разложения функции для потенциала в ряд Тейлора в окрестности точки (i, j, k) , для которой $z \in [z - h_z; z + h_z]$, $r \in [r - h_r; r + h_r]$, $\varphi \in [\varphi - h_\varphi; \varphi + h_\varphi]$, и последующей подстановки в разностные выражения показано, что трёхточечная разностная схема первой и второй производных имеет второй порядок точности.

Тогда первая и вторая производные могут быть представлены в виде суммы истинного значения и некоторой погрешности, связанной с разностной аппроксимацией.

Рассмотрим третий и четвёртый члены уравнения Пуассона (4) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial U}{r \cdot \partial r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 U}{r^2 \cdot \partial \varphi^2}. \quad (9)$$

С учётом сказанного выше выражения (9) запишутся в виде:

$$\frac{U'(r)}{r} + \frac{O(h_r^2)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{U''(\varphi)}{r^2} + \frac{O(h_\varphi^2)}{r^2}. \quad (10)$$

Первый член в каждом из выражений (10) представляет собой истинное значение соответствующего члена уравнения Пуассона, а второй характеризует вычислительную погрешность.

¹ Для сокращения записей переменные, по которым не ведётся дифференцирование, опущены.

Уравнение Пуассона в декартовой системе координат не содержит членов, похожих на выражения (9), поэтому погрешность аппроксимации уравнения Пуассона в декартовых координатах определяется величинами $O(h_x^2)$, $O(h_y^2)$, $O(h_z^2)$. В цилиндрической системе координат погрешность аппроксимации уравнения Пуассона определяется величинами $\frac{O(h_r)}{r}$, $\frac{O(h_\phi^2)}{r^2}$, $O(h_z^2)$.

Для оценки влияния выбора системы координат на точность и эффективность решения уравнения Пуассона был проведен численный эксперимент для азимутально-симметричной задачи.

4. Численный эксперимент

Численное решение уравнения Пуассона проводилось для расчёта магнетронной пушки [4], схема пространства взаимодействия которой представлена на рис. 4.

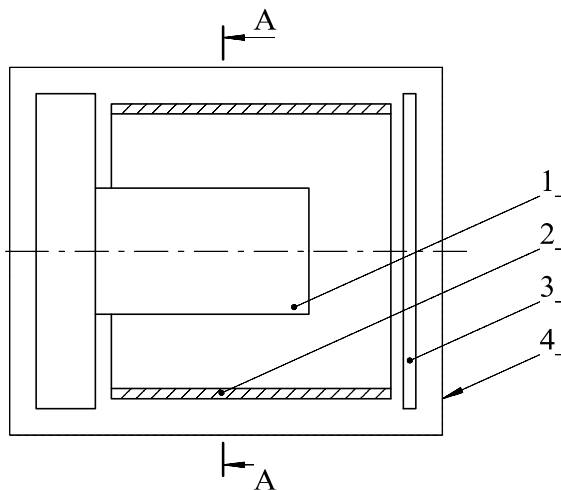


Рис. 4. Схема рабочего пространства магнетронной пушки: 1 – катод; 2 – анод; 3 – коллектор; 4 – граница расчётной области

На рис.5 показано распределение потенциала в сечении А-А в цилиндрической системе координат, а на рис. 6 – распределение потенциала в сечении А-А в декартовой системе координат. Для расчёта распределения потенциала во всём объёме, заключённом в границе расчётной области, необходим обоснованный выбор шага сетки и количества итераций, поскольку эти параметры влияют на эффективность и точность расчёта процесса формирования электронного пучка. Максимальная погрешность расчёта методом сеток находится примерно в середине межэлектродного промежутка, поскольку на электродах значения потенциала заданы абсолютно точно граничными условиями.

Для оценки величины относительной погрешности dU и сравнения решений, проведенных в цилиндрической и декартовой системах координат, был просчитан ряд тестовых задач. Результаты расчётов приведены на рис. 7 и 8.

Для сравнения был выбран потенциал, рассчитанный аналитически в сечении А-А по формуле:

$$U_{\text{истинное}}(r) = U_{\text{катода}} \frac{\ln\left(\frac{r_{\text{анода}}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_{\text{анода}}}{r_{\text{катода}}}\right)}. \quad (11)$$

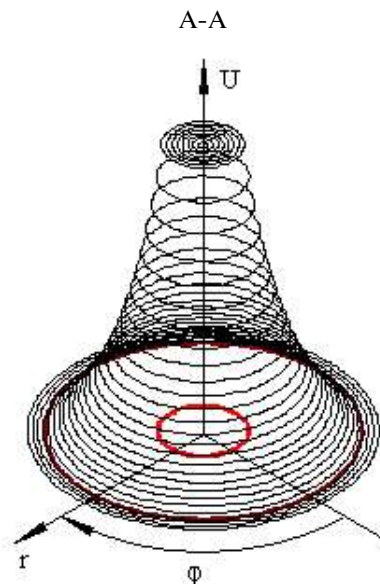


Рис. 5. Распределение потенциала в цилиндрической системе координат

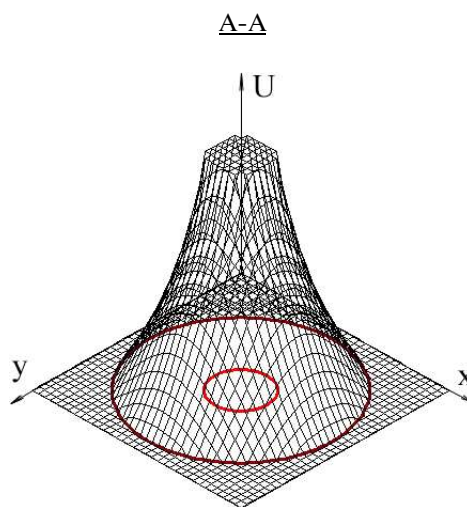


Рис. 6. Распределение потенциала в декартовой системе координат

На рис. 7 показаны зависимости относительной погрешности δU от числа итераций N в цилиндрической системе координат, которая определяется с учётом (11) следующим выражением:

$$\delta U_{\text{max}} = \max \left| \frac{U_{\text{истинное}}(r) - U(r)}{U_{\text{истинное}}(r)} \right| \cdot 100\%. \quad (12)$$

На рис. 8 показаны зависимости относительной погрешности δU от числа итераций N , рассчитанной по формуле (12) в декартовой системе координат.

Анализ показывает, что независимо от системы координат при уменьшении шага сетки для дости-

жения необходимой точности нужно увеличивать число итераций. При значительном увеличении числа итераций погрешность перестаёт уменьшаться и стремится к некоторому минимальному значению, которое определяется дискретностью пространственной сетки. Для дальнейшего уменьшения погрешности необходимо выбирать более мелкую сетку, а затем увеличивать число итераций.

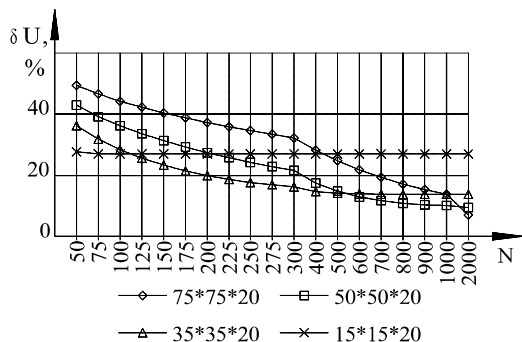


Рис. 7. Зависимости максимальной относительной погрешности δU от числа итераций N в цилиндрической системе координат

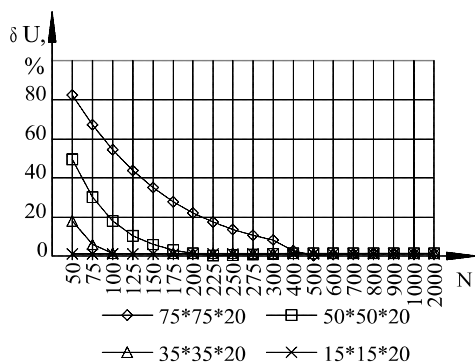


Рис. 8. Зависимости максимальной относительной погрешности δU от числа итераций N в декартовой системе координат

На рис. 9 представлена зависимость времени, затрачиваемого на расчёт одной итерации, от дискретности сетки. Время, затрачиваемое на расчёт одной итерации в цилиндрической и декартовой системе координат, практически одинаковое при соизмеримом числе узлов в сетках. Это объясняется идентичностью проделываемых операций. Поэтому полное время расчёта пропорционально числу итераций.

Точность расчёта при одинаковом числе итераций различна (см. рис. 7 и 8). Практический интерес представляет область, в которой относительная погрешность не превышает нескольких процентов. В декартовой системе координат предельная минимальная погрешность для рассматриваемых сеток наблюдается при 600 итерациях. Аналогичные сетки в цилиндрической системе координат не могут обеспечить аналогичную точность даже при числе итераций, превышающем 10000.

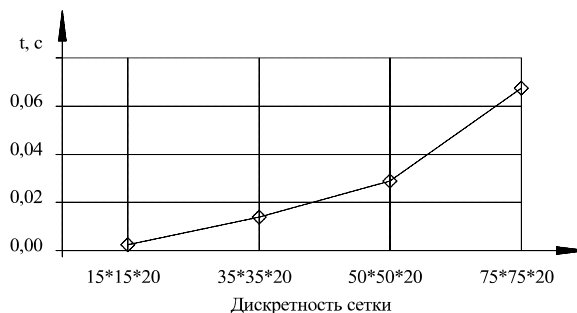


Рис. 9. Время t , затрачиваемое на расчёт одной итерации, в зависимости от дискретности сетки

Для расчёта физических процессов, протекающих в азимутально-симметричных приборах, обычно используется цилиндрическая система координат. Рассмотрим возможность оптимизации расчётов, проведенных в работе [5], при помощи перехода к декартовой системе координат.

На рис. 10 показана зависимость относительной погрешности от числа итераций для двухмерных равномерных сеток 200×250 для цилиндрической и декартовой систем координат.

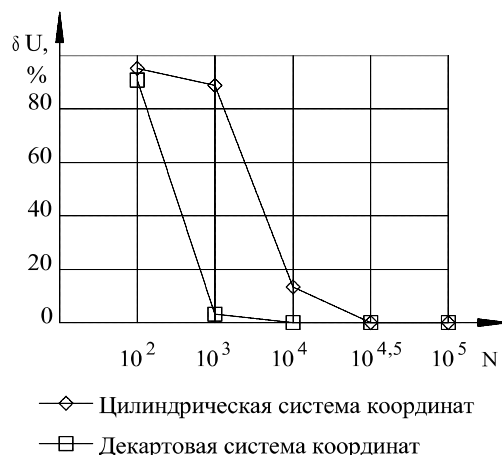


Рис. 10. Зависимость относительной погрешности δU от числа итераций N для цилиндрической и декартовой системы координат

Скорость счёта составляла 95,298 итераций в секунду (1 итерация за 0,0105 с). В декартовой системе координат минимально возможная погрешность при данной дискретности сетки (0,017%) достигалась за 1 минуту 45 секунд. В цилиндрической системе координат для достижения такой точности необходимо более 5,5 минуты. При дальнейшем увеличении числа итераций цилиндрическая система координат способна обеспечить значительно более высокую точность (порядка 10^{-5} %). Декартовая система координат позволяет значительно быстрее получить решение с погрешностью в несколько процентов, а это важно при проведении большого количества расчётов. В этой области скорость сходимости решения уравнения Пуассона в декартовой системе координат превосходит скорость сходимости в цилиндрической системе координат более чем на порядок.

5. Выводы

Научная новизна данной работы заключается в том, что в декартовой системе координат численное решение уравнения Пуассона конечно-разностным неявным итерационным методом находится быстрее, чем в цилиндрической системе координат при соизмеримом числе узлов соответствующих сеток. Представлены расчётные зависимости, которые дают количественную оценку скорости счёта при заданной дискретности сетки в обеих системах координат.

Практическое значение полученных результатов заключается в возможности ускорения расчётов распределения потенциала, создаваемого электродами практически любой геометрии. В частности, результаты работы были использованы при моделировании электронных пучков в магнетронных пушках.

Сравнение использованного метода решения уравнения Пуассона с аналогичными методами показывает преимущество выбранного, поскольку он требует меньше оперативной памяти, которая ограничена.

Литература: 1. *Помтер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 391 с. 2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с. 3. *Молоковский С.И., Сушков А.Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. Ленинград: Энергия, 1972. 270 с. 4. *Волколу-*

пов Ю.Я., Довбня А.Н., Закутин В.В., Красноголовец М.А., Решетняк Н.Г., Ромасько В.П. Быстрое формирование электронного пучка в магнетронной пушке с вторично-эмиссионным металлическим катодом // ЖТФ, 2001, Т.71, №9. С.134-136. 5. *Агафонов А.В., Тараканов В.П., Федоров В.М.* Динамика нарушения магнитной изоляции и самоорганизация электронного потока в магнетронном диоде // ЖТФ. 2004. Т.74, №1. С.93-103.

Поступила в редколлегию 11.03.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Стасев Ю.В.

Чурюмов Геннадий Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ФОЭТ ХНУРЭ. Научные интересы: Методы математического моделирования, СВЧ электроника и электродинамика, оптоэлектроника. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-057.

Старчевский Юрий Львович, аспирант кафедры ФОЭТ ХНУРЭ. Научные интересы: физика электронных пучков, программирование, математическое моделирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 32-49-19.

Лебедев Олег Григорьевич, канд. техн. наук, доцент, начальник кафедры №304 ХИ ВВС. Научные интересы: радиолокация и навигация, аэродромное оборудование. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Клочковская, 228. тел. 30-82-14.

Новиков Николай Иванович, канд. военных наук, зам. начальника факультета по учебной и научной работе ХИ ВВС. Научные интересы: радиосвязь. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Клочковская, 228.

УДК 621.375.9

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТЫХ СИСТЕМ С S-ОБРАЗНОЙ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

ЛОШИЦКИЙ П.П., НИКОЛОВ Н.А., АЛЬ СИНЖЛАВИ Ш.

Рассматриваются преобразователи стохастичности, построенные на электронных приборах с S-образной вольтамперной характеристикой. Показывается, что для генераторов, построенных на таких элементах (ЛПД, неоновая лампа, динистор), возможна реализация перехода к хаосу по сценарию, связанному с инерционностью основных параметров активного элемента.

Явление хаотизации динамических процессов в детерминированных нелинейных системах, которое совсем недавно казалось невероятным в рамках традиционных взглядов теории колебаний, в настоящее время представляет собой не только хорошо теоретически обоснованный факт, но и получило широкое практическое применение.

Одной из областей такого применения детерминированного хаоса является создание генераторов стохастичности. Основное их отличие от обычных генераторов шума заключается в следующем. В генераторах шума имеется первичный источник

шума, случайный сигнал которого требует достаточно большого усиления, что ограничивает область его применения. В генераторах стохастичности первичный источник используется для управления регулярными колебаниями большой амплитуды, преобразуя их в стохастические. При этом генераторы стохастичности создают столь сложные динамические колебания, что они мало отличаются от шумового сигнала. Таким образом, отличия генераторов шума от генераторов стохастичности заключаются не только в величине выходной мощности сигнала, но и в механизмах его реализации [1]. В теории детерминированного хаоса генераторы стохастичности нестрого делят на преобразователи, усилители и генераторы стохастичности.

Для преобразователей стохастичности источниками первичной случайности могут быть микроплазмы в твердотельных приборах, флуктуации параметров в вакуумных приборах, а также различные инерционные процессы.

Флуктуации оказывают относительно слабое влияние на устойчивые системы, имеющие малые отношения рабочей поверхности к объему активного элемента и работающие в частотных диапазонах, далеких от частоты (времени) релаксации флуктуаций. В неустойчивых системах рабочие частоты соизмеримы с частотами релаксации флуктуаций, и развитые поверхности последних играют решающую роль в работе прибора, качественно меняя его параметры.