

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Моделювання систем безпечної життєдіяльності
в критичних точках
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-18-1
Яндуков Д.Є.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Наумейко І.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____ Тевяшев А.Д.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Яндукову Дмитру Євгенійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Моделювання систем безпечної життєдіяльності в критичних
точках

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1600 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель систем безпечної життєдіяль-
ності в критичних точках

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання

систем безпечної життєдіяльності в критичних точках

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Наумейко І.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 53 с., 8 табл., 14 рис., 1 дод., 20 джерел.

ОСОБЛИВІ ТОЧКИ, ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ, АСИМПТОТИКА, ПЕРШЕ НАБЛИЖЕННЯ, ЛІНЕАРИЗАЦІЯ, СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Об'єкт дослідження – система захисту від шкідливих чинників, модель якої побудована у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Мета роботи – дослідження систем безпечної життєдіяльності в критичних точках.

Метод дослідження – розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь з малим параметром.

Робота присвячена чисельному аналізу критичних режимів систем із захистом від шкідливих впливів. Отримано чисельний розв'язок загальної задачі та аналітичний розв'язок рівняння захисту від шкідливого впливу. Для обчислень та графічних зображень результатів застосовувався математичний пакет.

ABSTRACT

Introductory note: 53 pages, 8 tables, 14 figures, 1 appendixes, 20 sources.

CRITICAL POINTS, EIGENVALUES, ASYMPTOTICS, FIRST APPROXIMATION, LINEARIZATION, SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Object of research – a system of protection against harmful factors, which model is the system of nonlinear differential equations.

Purpose of work – to study the systems of safety at their critical points.

Methods of research – solving systems of nonlinear differential equations.

The work is devoted to the numerical analysis of critical modes of the systems with protection from harmful influences. A numerical solution of the general problem and analytical solution in the case of linear protection subsystem is obtained. For calculations and graphic representations of the results the modern mathematical package was used.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Системний аналіз проблеми та дослідницьких цілей.....	9
1.1 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми моделювання систем безпечної життєдіяльності в критичних точках.....	9
1.2 Постановка задач.....	14
2 Вибір та обґрунтування метода розв'язання	21
2.1 Математична модель взаємодії забруднення з навколишнім середовищем, що трактується як модель "хижак-жертва"	21
2.2 Найпростіша вірусна модель інфекційного захворювання.....	26
2.3 Подібні моделі поширення епідемій.....	29
2.4 Застосування теореми Тихонова	31
2.5 Елементи теорії збурень.....	35
3 Результати обчислювального експерименту.....	41
3.1 Модель 1	41
3.2 Модель 2	42
Висновки	48
Перелік джерел посилання	50
Додаток А	52

ВСТУП

Одним з найбільш важливих елементів економіки України завжди була і продовжує бути промислове виробництво, яке не є безпечним в принципі, і вже досить застаріле морально і фізично. У зв'язку з цим пристрої і об'єднуючі їх системи захисту персоналу і навколишнього населення особливо актуальні. Відомо [1], що безпека і ефективність виробництва є суперечливими критеріями. Їх об'єднання в єдиний можливо лише в над системі. Такий підхід дозволив розглянути модель «людина-машина-середовище з захистом» як відому модель конкуренції двох факторів – безпеки та ефективності [2-4].

Розглянемо спочатку загальну систему «Людина-Машина-Середовище». Що входить інформацією для даної системи є інформація з вище стоячої системи (планові завдання, інструкції і т.д.); виходом системи є результат праці.

У процесі функціонування системи змінюється її внутрішній стан. Елемент «людина» можна розділити на три функціональні частини:

– Л1 – людина, яка здійснює управління «машиною» головним чином для виконання основного завдання системи – виробництва кінцевого продукту, а також забезпечення можливості цього виробництва; в даному випадку розглядається програміст;

– Л2 – людина, що розглядається з точки зору безпосереднього впливу на навколишнє середовище за рахунок тепло і волога виділення;

– Л3 – людина, що розглядається з точки зору його психофізіологічного стану під впливом факторів, що впливають на нього в виробничому процесі; цей елемент вивчається з точки зору охорони праці та суміжних з нею дисциплін, стан цього елемента системи є вихідною точкою проведеної декомпозиції.

Елемент «машина» виконується основну технологічну функцію – вплив на предмет праці, побічну – зміна параметрів навколишнього середовища. Таким чином, елемент «машина» можна розділити на наступні елементи:

– М1 – елемент, який виконує основну технологічну функцію;

– М2 – елемент впливу на навколишнє середовище і людину.

Нижче, на рисунку 1.1 представлена розроблена для відділу ІАЦ система «Людина-Машина-Середовище». Технічний стан обладнання, що використовується визнано хорошим, все обладнання знаходиться в експлуатації не більше трьох років. Обладнання, що використовується відповідає стандартам і нормам техніки безпеки. Спеціальна служба технічної підтримки і ремонту обладнання здійснює постійний моніторинг і необхідний ремонт устаткування, що експлуатується.

У дипломному проекті розглянуті різні типи загальних моделей «людина-машина-середовище», кожна з яких адекватно описує деякий практично важлива якість об'єкта, а всі разом – описують об'єкт з точки зору його безпечного функціонування [5]. Подальша їх деталізація призводить до відомим, а також деяким новим моделям підсистем [6]. Дана робота присвячена кількісному аналізу важливої моделі ЛМС – системи з захистом при зовнішньому шкідливому впливу.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ТА ДОСЛІДНИЦЬКИХ ЦІЛЕЙ

1.1 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми моделювання систем безпечної життєдіяльності в критичних точках

В якості альтернативи для вирішення завдання щодо усунення катастрофи необхідно вибрати метод розв'язання задачі за сукупністю критеріїв, що характеризують основні властивості процесу рішення [7, 8].

Як альтернатив розглядаються наступні методи рішення:

- а) аналітичний;
- б) аналітико-чисельний;
- в) чисельний.

Якість процесу рішення задачі характеризується такими властивостями:

- а) час розрахунку (потрібне методу для знаходження рішення);
- б) точність рішення (похибки результату);
- в) складність алгоритму (побудова математичної моделі, залежність від початкових умов, застосовність до ЕОМ);
- г) форма представлення результату (по фазового простору і знаходженню критичних точок виражена можлива наочність результату рішення задачі);
- д) ресурси пам'яті ЕОМ (витрати пам'яті ЕОМ при процесі отримання рішення алгоритмом).

Для оцінки пріоритетів видів скористаємося методом аналізу ієрархій. Для даної задачі побудуємо ієрархічну модель проблеми вибору методу рішення, яка має такий вигляд (рисунок 1.1).

Далі проводимо етап аналізу, який полягає в дослідженні ступеня впливу показників властивостей процесу рішення задачі на вибір відповідного методу. На рисунку 1.2 представлена матриця парних порівнянь для п'яти чинників, заповнена судженнями, за шкалою Сааті [9]. Також на рисунку 1.2 містяться вектор пріоритетів і значення відносини узгодженості.

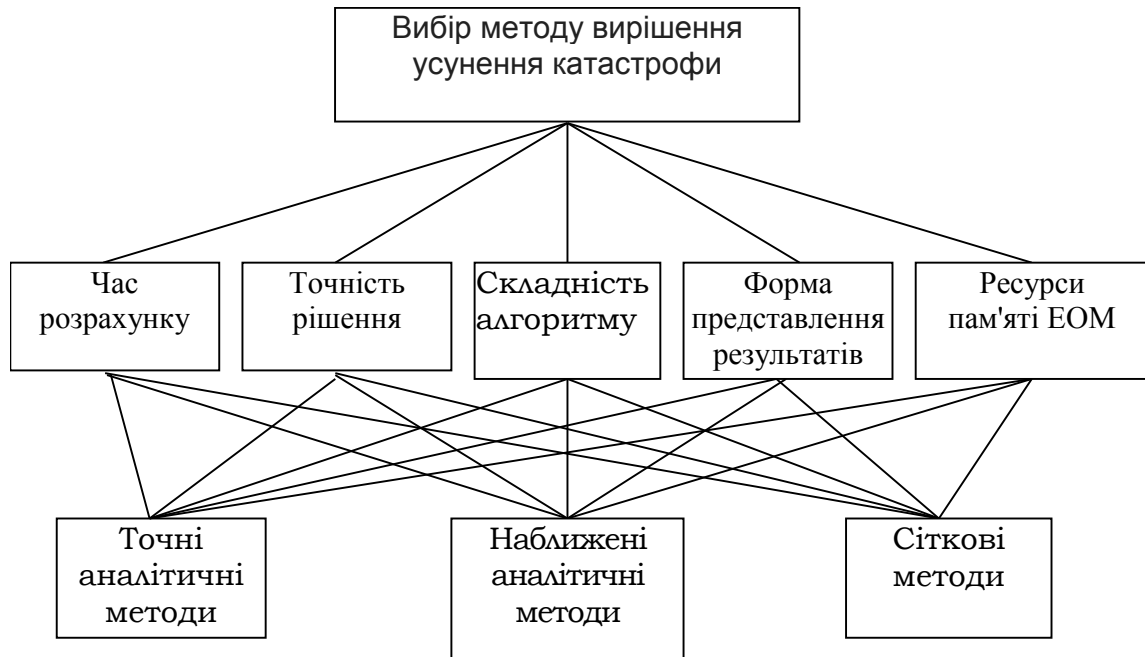


Рисунок 1.1 – Ієрархічна модель проблеми вибору

i\j	1. Время расч	2. Точность	3. Сложность	4. Форма пр	5. Ресурсы
1. Время расч	1	0,2	3	5	6
2. Точность		1	7	7	8
3. Сложность	0,33333	0,14286	1	3	4
4. Форма пр	0,2	0,14286	0,33333	1	2
5. Ресурсы	0,16667	0,125	0,25	0,5	1

Рисунок 1.2 – Матриця парних порівнянь властивостей процесу

Для матриці парних рівнянь (рис. 1.2) розраховане максимальне власне значення λ_{\max} , індекс узгодженості ІУ та відносини узгодженості ВУ:

$$\lambda_{\max} = 5, \text{ ІУ} = 0,085342, \text{ ВУ} = 0,082761.$$

Виходячи з вектора пріоритетів, можна зробити висновок, що найбільше значення надається такій властивості рішення як "точність". Значення ВУ свідчить про те, що матриця є узгодженою.

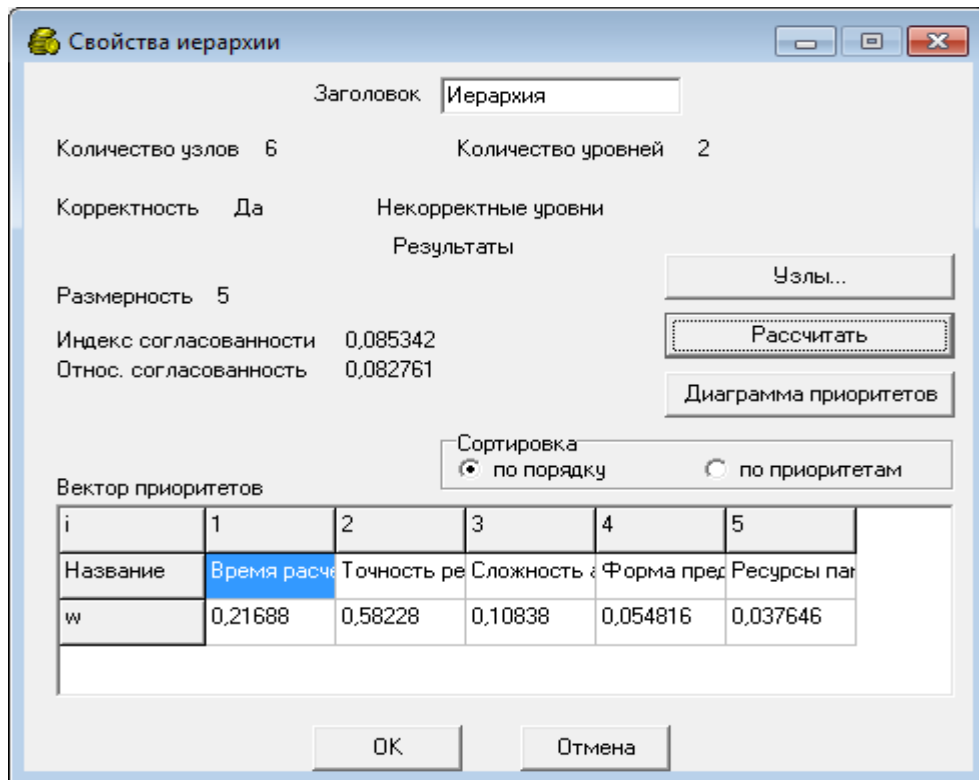


Рисунок 1.3 – Розрахунки порівнянь властивостей процесу



Рисунок 1.4 – Діаграма пріоритетів

Тепер перейдемо до аналізу переваги кожного з розглянутих методів вирішення по відношенню до кожного фактору другого рівня. Далі представлені п'ять матриць парного порівняння з відповідними локальними векторами пріоритетів.

На наступному етапі аналізу виконаємо оцінку глобальних пріоритетів. Переходимо тепер до розгляду впливу чинників третього рівня на фактори дру-

гого рівня, тобто до аналізу «ваги» кожного з методів по відношенню до кожного фактору другого рівня.

Для цього необхідно сформуванати і обробити п'ять матриць парних порівнянь (табл. 1.2 – 1.6).

Таблиця 1.1 – Час розрахунку

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	0,2	3	0,1884
2	5	1	7	0,7306
3	0,33	0,143	1	0,0810

Для табл. 1.1 розраховані $IY=0,0324$, $VY=0,0559$.

Таблиця 1.2 – Точність рішення

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	3	6	0,6442
2	0,333	1	4	0,2706
3	0,166	0,25	1	0,0810

Для табл. 1.2 розраховані $IY=0,0268$, $VY=0,0462$.

Таблиця 1.3 – Складність алгоритму

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	0,333	0,125	0,0726
2	3	1	0,166	0,1662
3	8	6	1	0,7612

Для табл. 1.3 розраховані $IY=0,0368$, $VY=0,0634$.

Таблиця 1.4 – Форма подання

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	2	5	0,5695
2	0,5	1	4	0,3331
3	0,2	0,25	1	0,0974

Для табл. 1.4 розраховані $IY=0,0123$, $VY=0,0212$.

Таблиця 1.5 – Ресурси пам'яті ЕОМ

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	3	0,142	0,3196
2	2	1	4	0,5584
3	0,333	0,25	1	0,1220

Для табл. 1.5 розраховані $IY=0,0091$, $VY=0,0158$.

Таблиця 1.6 – Вектор локальних пріоритетів фокуса

Час розрахунку	Точність рішення	Складність алгоритму	Форма подання	Ресурс пам'яті ЕОМ
0,0491	0,0559	0,0462	0,0634	0,5836

На наступному етапі здійснюється синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених пріоритетів. Методом парних порівнянь за шкалою Сааті були розраховані вектори локальних і глобальних пріоритетів елементів ієрархічної структури (табл. 1.7 – 1.8).

Таким чином, з урахуванням всіх розглянутих факторів перевагу природним чином віддається аналітичному методу, однак аналітико-чисельний метод має також високу оцінку.

Таблиця 1.7 – Вектор локальних пріоритетів

Елемент рівня	Вектор пріоритетів		
	Точні аналітичні методи	Наближені аналітичні методи	Сіткові методи
Час розрахунку	0,6716	0,2654	0,0629
Точність рішення	0,1429	0,7143	0,1429
Складність алгоритму	0,7703	0,1618	0,0679
Форма подання	0,7085	0,2311	0,0603
Ресурс пам'яті ЕОМ	0,0572	0,5969	0,3458

Таблиця 1.8 – Вектор глобальних пріоритетів

Точні аналітичні методи	Наближені аналітичні методи	Сіткові методи
0,2127	0,3844	0,4030

1.2 Постановка задачі

Модель Лотки-Вольтери описує взаємодію двох видів – популяції хижаків і популяції жертв [10, 11].

Нехай $N(t)$ – чисельність жертв, $P(t)$ – чисельність хижаків в момент часу t . Тоді модель Лотки-Вольтери має вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP, \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cNP, \quad (1.1)$$

де a , b , c , d – додатні сталі.

Нагадаємо, що система рівнянь (1.1) заснована на наступних припущеннях:

– при відсутності хижаків жертви розмножуються не обмежено відповідно до рівняння $dN/dt = aN$, яке називають іноді рівнянням Мальтуса;

– хижаки при відсутності жертв вимирають відповідно до рівняння $dP/dt = -dP$;

– складові, пропорційні добутку NP , розглядаються як перетворення енергії одного джерела в енергію іншого (ефект впливу популяції хижаків на популяцію жертв, тобто результат їх зустрічі, полягає у зменшенні швидкості приросту dN/dt чисельності жертв на величину NP , пропорційну чисельності хижаків).

Якщо ввести нові змінні

$$u(\tau) = \frac{N(t)}{c}, \quad v(\tau) = \frac{P(t)b}{a}, \quad \tau = ab, \quad y = \frac{c}{d},$$

то система рівнянь буде мати вигляд

$$\frac{du}{d\tau} = u - uv, \quad \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u - 1).$$

Система рівнянь (1.1) має дві нерухомі точки: $(0, 0)$ – сідло і $(1, 1)$, для якої власні значення матриці Якобі $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ – $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}$, $i = \sqrt{-1}$, тобто положення рівноваги (1.1) негіперболічне і зробити висновок про його стійкість на основі лінійного аналізу не можна. Фазові траєкторії системи рівнянь, як відомо, є інтегральними кривими рівняння

$$\frac{dv}{du} = v \frac{(u-1)v}{(1-v)u},$$

розв'язок якого

$$\gamma u + v - \ln u^\gamma v = H. \quad (1.2)$$

Можна показати, що поблизу рівня (1,2) лінії рівня функції являють собою замкнуті криві, відповідні періодичним розв'язком системи рівнянь (1.1) (рис. 1.5). Стала H у натуральному вираженні визначається початковими умовами, наприклад $u(0) = u_0$ і $v(0) = v_0$

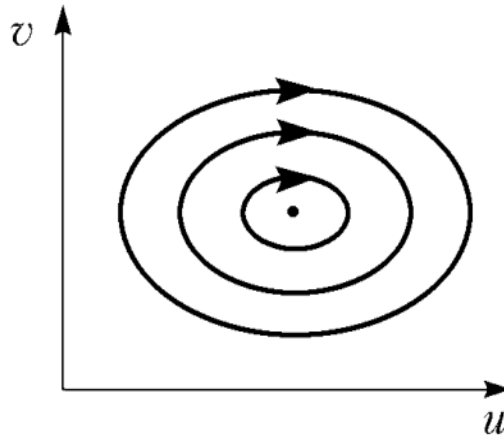


Рисунок 1.5 – Фазові траєкторії, що відповідають співвідношенню (1.3)

Математична модель, що описується системою рівнянь (1.3), структурно нестійка, тобто мала зміна правих частин в ній може призводити до якісної зміни поведінки рішення. В цьому її основний недолік. Більш того, саме тому важко говорити про збіг теорії з експериментом.

Одна з причин структурної нестійкості моделі в тому, що вона є консервативною, тобто має перший інтеграл. Незважаючи на зазначений основний недолік моделі, система рівнянь (1.1) дозволяє зробити нетривіальні висновки, підтвержені численними спостереженнями. Зокрема, сформульований принцип Вольтери: якщо в системі «хижак-жертва», описуваної моделлю (1.2), обидва види винищуються рівномірно і пропорційно числу їх індивідуумів, то середнє число жертв зростає, а середнє число хижаків зменшується.

Таким чином, згідно з принципом Вольтери, в екосистемі «хижак-жертва» популяція жертв більш чутлива до процесу пропорційного зменшення особин в популяції.

У термінології В.І. Арнольда [12], модель, що описується системою рівнянь (1.1), називається «жорсткою». При малій зміні моделі вона стає м'якою, коли до правих частин (1.1) додаються малі складові, що враховують, наприклад, конкуренцію жертв за їжу або хижаків за жертв (конкретні види рівнянь приведемо нижче). Тоді в загальному вигляді рівняння (1.2) можна переписати так:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bPN + \varepsilon f(P, N), \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cPN + \varepsilon g(P, N), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Залежно від малих поправок $\varepsilon f(P, N)$ і $\varepsilon g(P, N)$ можливі, наприклад, сценарії, показані на рисунку 1.6.

У сенсі інтерпретації цікавий рисунок 1.6, б. За Арнольду, якщо P – бандити, а N – трудящі, еволюція системи призводить то до різкого збільшення числа бандитів, то до їх майже повного вимирання, оскільки вони настільки пограбували трудящих, що взяти вже нічого. Система в кінцевому рахунку потрапляє в область таких великих або настільки малих значень P і N , що модель стає непридатною, оскільки змінюються закони еволюції. Наведемо ще кілька ускладнених моделей «хижак-жертва».

Система «хижак-жертва» з урахуванням внутрішньовидової конкуренції

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{K_1} \right) - bNP, \quad \frac{dN}{dt} = -dN \left(1 - \frac{N}{K_2} \right) + cNP. \quad (1.3)$$

На рисунку 1.6 а – стан рівноваги стійкий: при будь-яких початкових умовах через великий час установлюється воно ж; б – стан рівноваги В нестійкий: в системі йде «рознос»; в – в системі з нестійким стаціонарним станом А установлюється з плином часу періодичний режим С (на відміну від системи (1.1) (див.

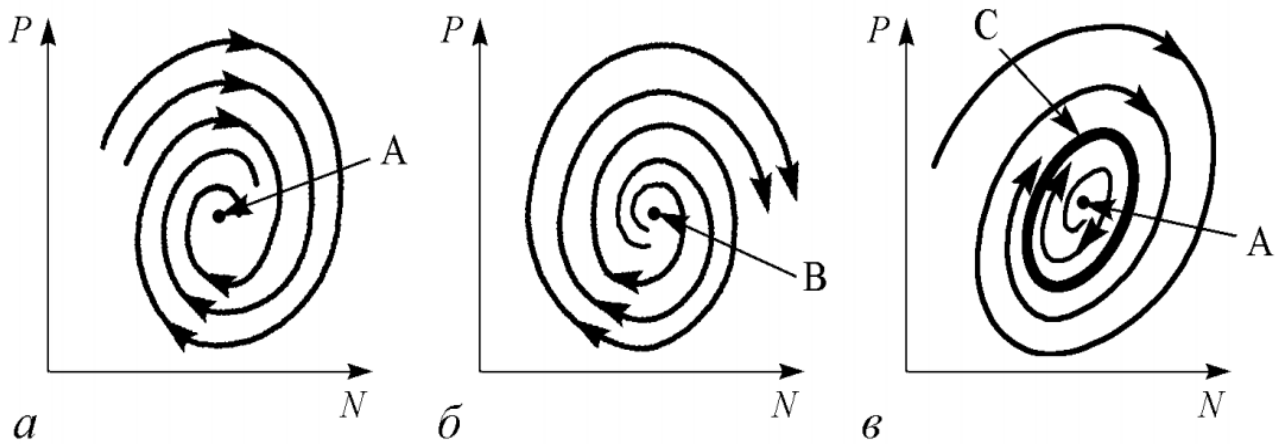


Рисунок 1.6 – Стани рівноваги

рис. 1.5) мають місце коливання певної амплітуди, що не залежать від малості відхилення), де $K_{1,2}$ – потенційні ємності екологічних систем, які визначаються доступним кількістю ресурсів і відповідають граничним значенням чисельності популяцій. У безрозмірних змінних дана система рівнянь прийме вигляд

$$\frac{du}{dt} = u(1 - \alpha u - v), \quad \frac{dv}{dt} = u(-\gamma - \beta v + u), \quad (1.4)$$

де

$$N(t) = (a/c)u\tau, P(t) = av(\tau)/b, \alpha = a/(cK_1), \beta = d/(aK_2).$$

Модель конкуренції

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - e N_1 N_2; \quad \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - h N_1 N_2. \quad (1.5)$$

Тут r_1, r_2, e, h – додатні сталі.

Аналіз системи рівнянь (1.5) показує: якщо n популяцій лінійно залежать від m ресурсів, причому $m < n$, то принаймні одна з популяцій вимирає.

Модель мутуалізму (симбіозу)

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(r_1 + a_{11}u_1 + a_{12} + u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = u_2(r_2 + a_{21}u_1 + a_{22} + u_2). \quad (1.6)$$

Для опису мутуалізму досить зажадати, щоб $a_{12} > 0, a_{21} > 0$.

На закінчення розділу, розглянемо узагальнену модель Лотки-Вольтери, описувану системою рівнянь

$$\frac{du}{dt} A(u) - B(u,v), \quad \frac{dv}{dt} = -D(v) + C(u,v), \quad (1.7)$$

де u і v – чисельності жертв і хижаків, відповідно,

$A(u)$ – функція розмноження жертв при відсутності хижаків;

$D(v)$ – функція вимирання хижаків при відсутності жертв;

функція $B(u,v)$ описує виведене хижаками жертв;

$C(u,v)$ – ефективність споживання жертв хижаками.

Перерахуємо можливі додаткові чинники всередині і між популяційних відносин:

– нелінійна залежність швидкості розмноження популяцій жертв від щільності при малих значеннях щільності (відсутність достатньої кількості шлюбних пар): $A(u) = au_2 / (N + u)$, де a і N – додатні сталі.

– внутрішньовидова конкуренція жертв: $A(u) = au(1 - u / K)$.

– насичення хижаків: $B_1(u) = bu / (1 + \alpha u)$ – трофічна функція хижака.

– нелінійний характер виїдання хижаками жертв: $B_2(u) = bu_1 / (1 + \alpha u)$.

– конкуренція хижаків за жертв: $B_2(v) = bv / (1 + \beta v)$, та $B(u,v) = B_1(u)B_2(v)$.

– конкуренція хижаків за відмінні від жертв ресурси: $C(v) = v / (1 + v / K_1)$.

– нелінійний характер залежності швидкості розмноження хижака від

щільності популяції при малих значеннях щільності $C_2(v) = cv / (Nv + v)$, при цьому $C(u, v) = C_1(u)C_2(v)$ і $C_1(u) = B_1(u)$, $D_2(u) = cv$.

Тоді $C(u, v) = cv / (Nv + v)B_1(u)$.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Математична модель взаємодії забруднення з навколишнім середовищем, що трактується як модель "хижак-жертва"

Ситуацію «забруднення-природа» можна трактувати як окремий випадок моделі «хижак-жертва», коли природа виступає в якості жертви, а забруднення – хижака. Головне припущення, що лежить в основі моделі, полягає в тому, що навколишнє середовище активно абсорбує і переробних забруднення аж до певної межі [13–15].

З якісних міркувань в системі навколишнє середовище – забруднення можливі три наступних принципово різні сценарії взаємодій.

Сценарій 1. При малих викидах забруднення довкілля його повністю переробляє (стійка ситуація).

Сценарій 2. При збільшенні викидів забруднення в залежності від зовнішніх умов і випадкових причин навколишнє середовище може знаходитися в задовільному стані, а може і загинути (бістабільна ситуація).

Сценарій 3. Нарешті, третя ситуація відповідає екологічній катастрофі – повного вимирання природи.

Припустимо, що загальний фон забруднення і стан навколишнього середовища можна характеризуються концентрацією забруднення P і щільністю біомаси E , відповідно. Утому випадку, якщо існує постійно діючий джерело забруднення, процес еволюції забруднення можна описати рівнянням

$$\frac{dP}{dt} = a - bP, \quad (2.1)$$

де a – потужність джерела забруднення за одиницю часу,

b – коефіцієнт природного знищення забруднення (таке знищення називають «ме-

ртим», або природної дисипацією). При початковій умові $P(t=0) = P_0$ рішення рівняння (3.1) має вигляд:

$$P(t) = \frac{a}{b} + \left(P_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt},$$

якщо із часом концентрація забруднення зменшується природним чином.

Припустимо далі, що забруднення знаходиться в постійній взаємодії з навколишнім середовищем, яка надає очищаючий ефект на забруднення. Будемо також вважати систему «навколишнє середовище – забруднення» замкнутою. Тоді процес взаємодії з навколишнім середовищем можна описати наступною системою рівнянь:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - f(\varepsilon, P), \quad (2.2)$$

де функція $f(\varepsilon, P) \geq 0$ – описує абсорбування і переробку забруднення навколишнього середовища;

$g(E)$ – доданок, що описує динаміку навколишнього середовища під час відсутності забруднення;

$h(E, P)$ – функція, описує вплив забруднення на навколишнє середовище.

Прийmemo в якості функцій взаємодії забруднення і живої природи

$$f(\varepsilon, P) = c\varepsilon P \quad \text{та} \quad h(\varepsilon, P) = d\varepsilon P,$$

де c і d – постійні коефіцієнти.

Будемо вважати, що при відсутності забруднення поведінку навколишнього середовища можна описати логістичним рівнянням, тобто $g(\varepsilon) = r\varepsilon(1 - \varepsilon/K)$, де r – постійний коефіцієнт, а K – відповідає максимальному значенню ε при

$d\varepsilon/dt = 0$. Підставивши вирази для $f(\varepsilon, P)$, $h(\varepsilon, P)$ та $g(\varepsilon)$ в систему рівнянь (2.2), отримаємо

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - c\varepsilon P, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = r\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{K}\right) - d\varepsilon P. \quad (2.3)$$

Переходячи в системі рівнянь (2.3) до безрозмірних змінних

$$P = \frac{bu}{d}, \quad \varepsilon = \frac{bv}{c}, \quad \tau = bt, \quad \alpha = \frac{ad}{b^2}, \quad u_0 = \frac{r}{b}, \quad p = \frac{r}{cK},$$

отримуємо просту математичну модель взаємодії забруднення з навколишнім середовищем у вигляді наступних рівнянь:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - uv, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2. \quad (2.4)$$

Легко бачити, що система рівнянь (2.3) є система хижак-жертва, де в якості жертви виступає забруднення (не біологічний об'єкт), а в якості хижака - біологічно активна довкілля.

В системі рівнянь (2.4) параметр α можна трактувати як узагальнену потужність джерела забруднення; u_0 – гранично допустима концентрація для даної екосистеми (якщо $u > u_0, dv/dt < 0$, і природа вимирає); p – характеристика екосистеми – коефіцієнт внутрішньовидової концентрації в природі.

Положення рівноваги системи рівнянь (2.4), що відповідають умовам $du/dt = 0$ та $dv/dt = 0$, неважко знайти з рівнянь

$$a - u(1 + v) = 0, \quad -v(u - u_0) - pv^2 = 0.$$

Тоді

$$A_1 = (\alpha, 0); A_2 = ((u_0 + p + Q) / 2, (u_0 - p - Q) / (2p));$$

$$A_3 = ((u_0 + p - Q) / 2, (u_0 - p + Q) / (2p)); Q = \sqrt{(u_0 + p)^2 - 4\alpha p}.$$

Друге і третє положення рівноваги існують, якщо $[(u + p)^2 - 4\alpha p] > 0$.

Стандартний лінійний аналіз на стійкість зазначених положень рівноваги призводить до параметричного портрету системи рівнянь (2.3), наведеним на рис. 2.1.

На рис. 2.2 наведені відповідні фазові портрети системи рівнянь (2.4).

Якщо параметри належать області IV, то все траєкторії за винятком стійкого різноманіття A_1 прагнуть при $t \rightarrow \infty$ к A_3 (рис. 2.2, а). Області II відповідає фазовий портрет на рис. 2.2, б. В області III існує єдиний глобальний аттрактор A_1 (рис. 2.2, в).

Таким чином, описана математична модель відповідає трьом якісно описаним вище ситуацій. Однак на початку цього розділу в якості головного припущення було зазначено, що модель містить порогову величину забруднення, яке здатна переробити природа. Цей ефект слід враховувати в математичній моделі.



Рисунок 2.1 – Параметричний портрет системи рівнянь (2.4)

При фіксованому u_0 вся область допустимих параметрів розбивається на чотири множини.

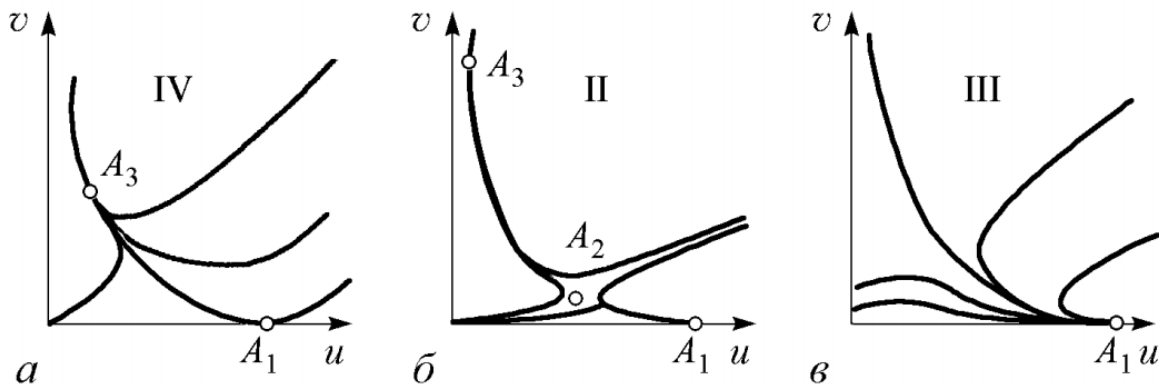


Рисунок 2.2 – Фазові портрети системи рівнянь (2.3)

Пропонується використовувати одну з трофічних функцій [15], що описують процес насичення, наприклад:

$$f(\varepsilon, P) = \frac{c\varepsilon P / d}{A + P}. \quad (2.5)$$

Тоді при малій концентрації забруднення при високій концентрації $f(\varepsilon, P) \approx c\varepsilon$, що більш реалістичне, ніж первісне вираження.

Після приведення системи рівнянь (2.2) до безрозмірного вигляду з урахуванням співвідношення (2.5) і переобозначення отримана наступна система рівнянь:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - \frac{uv}{\lambda + u}, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2, \quad (2.6)$$

де $\lambda = A(d/b) > 0$ описує ступінь впливу природи на забруднення: чим більше його величина, тим менше ступінь поглинання живої природи і навпаки. Параметр λ можна вважати кількісною характеристикою сприятливості даній екосистемі к викидам забруднень.

В системі рівнянь (2.6) можливі одне, два або три стану рівноваги такого ж характеру, як і для системи (2.4) [15].

2.2 Найпростіша вірусна модель інфекційного захворювання

У 1974 році Г. Белл запропонував найпростішу модель імунної реакції, в якій взаємодія між антигеном і антитілом описується в термінах «хижак-жертва».

Викладемо варіант теорії Г. Белла [16], виходячи з більш загальної моделі Г.І. Марчука [17].

Основними факторами в моделі інфекційного захворювання є наступні:

- концентрація патогенних розмножуються антигенів $V(t)$;
- концентрація антитіл $F(t)$; під антитілами розуміють субстрати імунної системи, що нейтралізують антигени (імуноглобуліни, рецептори клітин);
- концентрація плазмо клітин C -носіїв і продуцентів антитіл – передбачається постійна концентрація плазмо клітин C -носіїв і продуцентів антитіл – передбачається постійною;
- ступінь ураження органу мішені не враховується.

Рівняння, що описує зміну числа антигенів (чужорідних клітин, що проникають в організм) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV. \quad (2.7)$$

Перший доданок в рівнянні (2.7) – швидкість приросту антигенів за рахунок розмноження; β – коефіцієнт розмноження антигенів; доданок γFV описує число антигенів, нейтралізованих антитілами F в одиницю часу; γ – коефіцієнт, пов'язаний з імовірністю нейтралізації антигену антитілами при зустрічі з ними.

Для отримання другого рівняння підрахуємо баланс числа антитіл, що реагують з антигеном. Матимемо

$$dF = \rho C dt - \eta \gamma F V dt - \mu_f F dt. \quad (2.8)$$

Перший доданок в правій частині рівняння (2.8) описує генерацію анти-тіл плазмовими клітинами за час dt ; ρ – швидкість виробництва анти-тіл плаз-мо кліткою. Другий доданок ($\eta \gamma F V dt$) описує зменшення числа анти-тіл за ра-хунок зв'язку з антигенами, причому на нейтралізацію одного антигену припа-дає η анти-тіл. Третя складова ($\mu_f F dt$) описує зменшення популяції анти-тіл за рахунок старіння; μ_f – коефіцієнт, обернено пропорційний часу розпаду анти-тіл. Розділивши рівняння (2.8) на dt , отримаємо

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta \gamma V) F. \quad (2.9)$$

Якщо при $t < t_0$ $V(t) \equiv 0$, то початкові умови мають вигляд

$$V(t_0) = V_0, \quad F(t_0) = F_0. \quad (2.10)$$

Нехай надалі $t_0 = 0$.

Розглянемо два граничних випадки динаміки хвороби. Припустимо, що організм не виробляє анти-тіл даної специфічності. Тоді з (2.7) випливає, що

$$\frac{dV}{dt} = \beta V \quad \text{и} \quad V(t) = V_0 e^{\beta t}, \quad (2.11)$$

де V_0 – доза зараження (початкова концентрація антигенів) при $t = 0$. Очеви-дно, що таке рішення відповідає перебігу хвороби з летальним результатом, так як немає компенсуючих зростання антигенів факторів. Другий граничний ви-падок: присутні в організмі анти-тіла (специфічні до даного антигену) достатні для того, щоб знищити все проникли в організм антигени, не включаючи в дію

механізм утворення антитіл. В цьому випадку в рівнянні (2.7) $\beta \ll \gamma F$. Припускаючи дозу зараження V_0 малої, можна вважати величину F постійної, яка визначається нормальним рівнем антитіл F^* . Тоді рівняння (2.7) має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \lambda F^*)V,$$

і його розв'язок записується так:

$$V = V_0 e^{-(\gamma F^* - \beta)t}.$$

У граничному випадку, коли $B = 0$

$$V = V_0 e^{-\gamma F^* t}, \quad (2.12)$$

що відповідає високому імунологічному бар'єру.

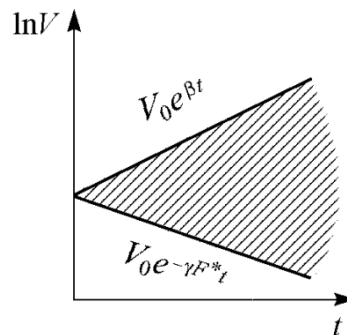


Рисунок 2.3 – Область захворювань, обмежена розв'язками для двох граничних випадків

Розв'язок (2.11) і (2.12) представлені на рисунку 2.3. При заданих значеннях коефіцієнтів моделі і початкових умовах і природно, що все сімейство різноманітних динамік захворювання вкладеться в заштрихованій області на рисунку 2.3.

2.3 Подібні моделі поширення епідемій

Розглянемо SIR-модель Кермак-Маккендрік, вважаючи, що особини популяції можуть бути в трьох різних станах:

- $S(t)$ – здорові особини, які знаходяться в групі ризику і можуть підхопити інфекцію;
- $I(t)$ – заражені переносники хвороби;
- $R(t)$ – ті, хто одужав і перестав поширювати хворобу (в цю категорію відносять, наприклад, тих, хто знаходить імунітет або навіть померлих).

Типова еволюція особини популяції описується діаграмою $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Побудуємо феноменологічну модель, відповідного діаграмі, використовуючи такі припущення:

- а) популяція замкнута і має сталу суму N ;
- б) проміжок часу, коли хворий залишається небезпечним для оточуючих, розподілений за експоненціальним законом із середнім $1/\gamma$;
- в) контакти випадкові і рівно можливі (однорідне перемішування).

При цих припущеннях матимемо:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S, \quad \frac{dI}{dt} = \lambda I - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

де λ – так звана сила інфекції, яка в даному випадку дорівнює добутку кількості контактів в одиницю часу, зроблених одним здоровим (позначимо це кількість як cN), ймовірності передати йому інфекцію при контакті p і ймовірності зустріти хворого $I(t)/N$. Позначимо $\beta = cp$. Тоді отримаємо $\lambda = \beta I$ і приходимо до стандартної форми рівнянь:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0, S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (2.13)$$

Третє рівняння в наведеній системі надлишкове і, оскільки $dS / dt \leq 0$, то природно вважати фазовим простором трикутник $S(t) + I(t) \leq N$.

З першого і другого рівнянь системи (2.13) випливає, що

$$\frac{dI}{dS} = \frac{(\beta S - \gamma)I}{\beta SI} = -1 + \frac{\sigma}{S}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta}, I \neq 0. \quad (2.14)$$

З огляду на початкові умови $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, знайдемо перший інтеграл $I + S - \sigma \ln S = I_0 + S_0 - \sigma \ln S_0$, за допомогою якого можна побудувати фазові криві на площині (S, I) (рисунок 2.4).

Постановка завдання для аналізу зараження вірусом комп'ютерів [14].

Нехай S – число комп'ютерів, які піддаються зараженню вірусом, I – частина комп'ютерів, заражених вірусом і не мають антивірусного програмного забезпечення, R – частина комп'ютерів, що мають належну антивірусний захист (імунітет). Тоді рівняння моделі мають вигляд (див. систему рівнянь (2.13)):

$$\frac{dS}{dt} = -aSI, \quad \frac{dI}{dt} = aSI - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

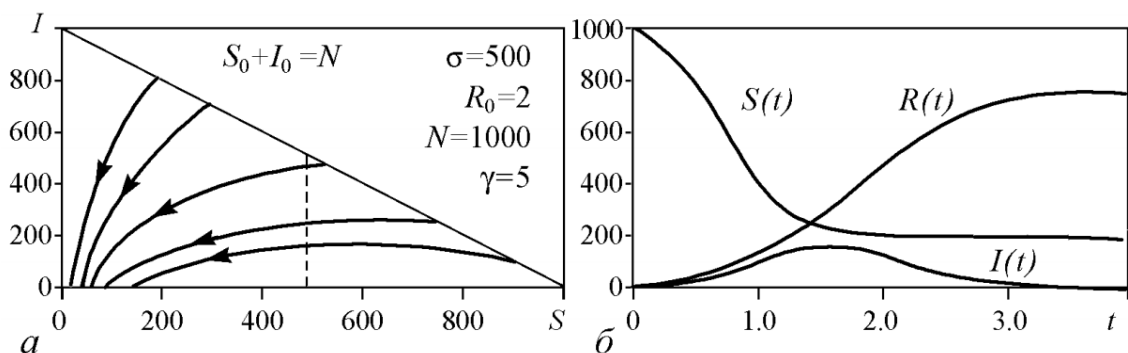


Рисунок 2.4 – Приклад конкретного розрахунку за рівняннями (2.13) і (2.14)

Основна ідея модифікації цієї класичної моделі епідемії полягає у введенні елемента циклічності, тобто елемента регулюючого додавання нових зараз епідемія комп'ютерів. У кожен новий відрізок часу число інфікованих комп'ютерів обчислюється на основі кількості інфікованих комп'ютерів, що залишилися від попереднього моменту, а число схильних до епідемії комп'ютерів розігрується як випадкова величина за законом Пуассона з розподілом

$$\rho_m = (\lambda^m / m!)e^{-\lambda}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Розв'язок завдання має такий вигляд. Побудуємо графік функції $I(t)$, чисельно вирішуючи наведену вище систему рівнянь з початковими умовами $S(0) = 100$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $\lambda = 10$, $a = 0.23$, $b = 0.5$. Додавання нових елементів пропонується проводити при $t_k = k$, $k = 1, 2, \dots, 100$.

2.4 Застосування теореми Тихонова

Математично строге обґрунтування застосування методу квазістаціонарних концентрацій (редукції системи відповідно до ієрархіїю часів) і формулювання умов його застосовності дана в роботі А.М. Тихонова (1952)[18].

Розглянемо найпростіший випадок двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (2.15)$$

Нехай y – повільна, а x – швидка змінна. Це означає, що відношення збілень dx и dy за короткий проміжок часу dt багато менше одиниці $dx / dy \ll 1$.

Швидкість зміни x значно перевершує швидкість зміни y , тому праву частину першого рівняння можна записати у вигляді:

$$\phi(x, y) = AF(x, y), \text{ де } A \gg 1.$$

Перше рівняння системи можна представити у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = AF(x, y).$$

Розділивши ліву і праву частину рівняння на A і позначивши $\varepsilon = 1/A$, отримаємо повну систему рівнянь, тотожну вихідної:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (2.16)$$

де $A \gg 1$ – малий параметр.

Якщо характер рішення не зміниться при спрямуванні малого параметра до нуля (умови цієї обставини і складають зміст теореми Тихонова), можна спрямувати $F(x, y)$ до нуля і отримати для «швидкої» змінної x замість диференціального рівняння – алгебраїчне.

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (2.17)$$

На відміну від повної така система називається виродженою. Фазовий портрет такої системи представлений на рисунку 2.12.

Фазові траєкторії в будь-якій точці фазової площині за виключенням околиці кривої $F(x, y) = 0$ мають нахил, який визначається рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \approx \varepsilon \ll 1,$$

тобто розташовані майже горизонтально. Це області швидких рухів, при яких уздовж фазової траєкторії $y = \text{const}$, а x швидко змінюється. Досягнувши за однією з таких горизонталей околиці кривої $F(x, y) = 0$, зображена точка потім буде рухатися по цій кривій.

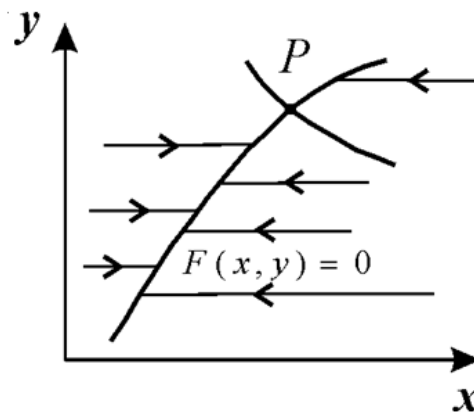


Рисунок 2.12 – Фазовий портрет системи (2.17)

Швидкість руху по горизонтальних ділянках траєкторії $dx/dt \gg 1/\varepsilon = A$, тобто дуже велика в порівнянні зі швидкістю руху в околиці кривої $F(x, y) = 0$. Тому загальний час досягнення якогось стану на кривій $F(x, y)$ визначається лише характером руху вздовж цієї кривої, тобто залежить лише від початкових значень повільної змінної y і не залежить від початкових значень швидкої змінної x .

Відзначимо, що квазістаціонарні значення швидких змінних є результатом не остаточних стаціонарних значень повільних змінних, а лише їх миттєвих значень. У цьому сенсі говорять про те, що швидка змінна «підпорядкована» повільній.

Теорема Тихонова встановлює умови редукції системи диференціальних рівнянь з малим параметром (умови заміни диференціальних рівнянь для швидких змінних алгебраїчними).

Запишемо систему N рівнянь, частина з яких містить малий параметр перед похідною.

$$\varepsilon \frac{dx_p}{dt} = F_p(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N), \quad (2.18)$$

$$\frac{dx_q}{dt} = F_q(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N). \quad (2.19)$$

Назвемо систему (2.18) приєднаної, а систему (2.19) вироджених.

Рішення повної системи (2.18) – (2.19) прагне до вирішення вироджених системи (2.19), якщо виконуються наступні умови:

а) розв'язок повної і приєднаної системи єдиний, а праві частини неперервні;

б) розв'язок $x_1 = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, x_r = \phi_r(x_1, x_2, \dots, x_N)$ є ізольованим коренем алгебри $F_p(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N) = 0, p = 1, \dots, r$ (в околі цього кореня немає інших коренів);

в) розв'язок x_1, x_2, \dots, x_r – стійка ізольована особлива точка приєднаної системи (2.18) при всіх значеннях $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_N$;

г) початкові умови $x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0$ потрапляють в область впливу стійкої особливої точки приєднаної системи.

Число початкових умов виродження системи менше, ніж повній: початкові значення швидких змінних не використовуються в вироджених системі. Згідно з теоремою Тихонова, якщо виконується умова в), результат не залежить від початкових умов для змінних приєднаної системи.

Таким чином, необхідною умовою редукції є наявність малого параметра в рівняннях (2.18). Цікавим є система двох диференціальних рівнянь виду (3.18), в якій особлива точка розташована на нестійкою гілці кривої $F(x, y) = 0$. Така система робить релаксаційні коливальні рухи.

Теорема Тихонова явно або неявно застосовується при дослідженні практично будь-яких моделей динамічних систем.

2.5 Елементи теорії збурень

Термін "теорія збурень" в теорії звичайних диференціальних рівнянь [19] використовують у двох значеннях: широкому – для позначення теорії, що займається загальними питаннями залежності рішень від параметрів, і в вузькому – для позначення теорії, присвяченій дослідженню можливостей розкладання в ряди за ступенями малого параметра. Останню зазвичай називають асимптотичною теорією збурень.

Загальна постановка задачі така. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x' = f(t, x, \varepsilon) \quad (2.20)$$

з малим параметром ε . Для простоти ми будемо розглядати тільки задачу Коші для цього рівняння:

$$x(0) = x_0. \quad (2.21)$$

Нехай задача (2.20)–(2.35) має при кожному ε розв'язок $\varphi(t, \varepsilon)$. Припустимо, що функція $\varphi(t, \varepsilon)$ виявилася аналітичною по ε (наприклад, відповідно до теореми Пуанкаре про розкладання, $\varphi(t, \varepsilon)$ аналітична, якщо функція f аналітично залежить від своїх аргументів). Тоді її можна представити у вигляді ряду

$$\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \dots, \quad (2.22)$$

а часткові суми цього ряду апроксимують розв'язок $\varphi(t, \varepsilon)$ як завгодно точно. У загальному випадку ряд (2.36) зовсім не обов'язково виявляється що сходяться. Його часткову суму

$$\psi_k(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \dots + \varepsilon^k\varphi_k(t) \quad (2.23)$$

називають формальним асимптотическим рішенням завдання (3.20)-(3.21),

$$\psi'_k(t, \varepsilon) - f[t, \psi_k(t, \varepsilon), \varepsilon] = O(\varepsilon^{k+1}) \quad (2.24)$$

та $\psi_k(0, \varepsilon) = x_0$. Якщо ж, додатково,

$$\varphi(t, \varepsilon) - \psi_k(t, \varepsilon) \equiv r_{k+1}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad (2.25)$$

то кажуть, що функція $\psi_k(t, \varepsilon)$ є асимптотичним рішенням завдання (2.22)–(2.23) порядку k . Якщо $\psi_k(t, \varepsilon)$ є асимптотичним рішенням при будь-якому k , то ряд (2.24) називають асимптотичним розкладанням, або асимптотикою рішення φ по малому параметру. У загальному випадку не потрібно, щоб асимптотичний розклад збігався до розв'язку і тому нев'язка $r_k(t, \varepsilon)$ при фіксованому k , взагалі кажучи, не прямує до нуля при $k \rightarrow \infty$. Стверджується тільки, що при кожному фіксованому k вона прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ як ε^{k+1} .

Основна задача теорії збурень – це задача про можливість побудови асимптотики рішень звичайних диференціальних рівнянь з параметром. Диференціальні рівняння, яким задовольняють члени $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ асимптотик, виявляються, як правило, істотно простіше вихідних рівнянь, а властивість асимптотических розкладів дозволяє ефективно вивчати поведінку рішень при малих ε , незважаючи на те, що асимптотичні ряди часто виявляються не сходяться. В даний час асимптотичні методи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь успішно доповнюються чисельними методами.

Питання про існування асимптотичних розкладів в разі гладкої залежності f від ε вирішується легко. Наприклад, з теореми про ліпшіцевості оператора зсуву випливає, що якщо f задовольняє умові Ліпшиця по x і ε , $\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + r_1(t, \varepsilon)$, де φ_0 – рішення задачі при $\varepsilon = 0$, а r_1 задовольняє умові Ліпшиця по ε , отже, зокрема, $\|r_1(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon$.

Таким чином, в цьому випадку φ_0 є асимптотикою нульового порядку рішення задачі (або ще кажуть про головне члени асимптотики). Теорема про диференціюванні оператора зсуву дозволяє в разі якщо f має задовольняють умові Ліпшиця похідні за сукупністю змінних x і ε побудувати асимптотику першого порядку:

$$\psi_1(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t).$$

У ній φ_0 така ж сама, що і вище, а φ_1 – розв'язок відповідного рівняння в варіаціях. Точно так же теорема про існування старших похідних розв'язків по параметру дозволяє виписати і обґрунтувати асимптотики старших порядків, тобто виписати кінцеву суму ряду Тейлора і оцінити залишковий член функції $\varphi_k(t) = \partial^k \varphi(t, \varepsilon) / \partial \varepsilon^k |_{\varepsilon=0}$ визначаються з відповідних рівнянь у варіаціях. Ці рівняння легко виходять за допомогою наступної формальної процедури. Формальний ряд підставляють в рівняння і початкова умова, формально розкладають праву частину рівняння в ряд Тейлора по ε в точці $\varepsilon = 0$ і прирівнюють в одержані формальних рядах коефіцієнти при однакових ступенях ε . Виходить набір звичайних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ряду і набір відповідних початкових умов.

$$x' + a(t) + \varepsilon b(t)x^2 = c(t), x(0) = 0.$$

Ситуація істотно складніше в разі так званих сингулярно-збурених рівнянь (правильніше говорити сингулярно-збурених задач). Ці терміни охоплю-

ють різні класи рівнянь з параметрами, в яких рішення залежать від варіанту не регулярним чином. Найпростішим прикладом такого рівняння є $\varepsilon x' = -x$ з малим параметром ε . Його спільне рішення $Ce^{-t/\varepsilon}$ не аналітично (сингулярно) залежить від ε в точці $\varepsilon = 0$.

Нижче ми продемонструємо лише деякі особливості асимптотик сингулярно збурених задач на прикладі задачі Коші

$$\varepsilon x' = -x - e^t, \quad (2.26)$$

$$x(0) = 1, \quad (2.27)$$

припускаючи параметр ε малим і позитивним. Розв'язок завдання (2.26) – (2.27) має вигляд

$$\phi(t, \varepsilon) = \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{1}{1 + \varepsilon} e^t. \quad (2.28)$$

Спробуємо подати розв'язок (2.24) у вигляді ряду (2.26). Підставляючи (2.36) в (2.40) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях ε , отримаємо

$$\varphi_0(t) = -e^t, \quad \varphi_1(t) = e^t, \quad \varphi_2(t) = -e^t, \quad \varphi_3(t) = e^t,$$

Таким чином, ряд (5) збігається до функції $\frac{e^t}{1 + \alpha}$, тобто до другого члену в розв'язку, який представляє при $\varepsilon = 0$ розв'язок виродженого рівняння (нульового порядку). Відзначимо два тісно пов'язаних між собою обставини. По-перше, вийшла сума не задовольняє початковій умові (зверніть увагу на те, що при знаходженні функції φ_k воно нам не треба було) і, по-друге, в отриманому розпаду невідомі апроксимується перший член розкладу, наявність якого викликано "зайвим" для виродженого рівняння початковою умовою. Відзначимо

також, що перший член в рішенні поза малих околиць нуля, тобто поза прикордонним шаром, швидко – з експоненційною швидкістю - загасає. Таким чином, отриманий ряд апроксимує розв'язок на відрізках виду $[\delta, T]$ ($\delta > 0$).

Для того, щоб побудувати рівномірний на $[0, T]$ асимптотичний розклад зауважимо, що "погранслойна" частина розв'язку $\varphi(t, \varepsilon)$ задачі регулярним образом залежать від агрегату t / ε , взятого як єдине ціле. Це наводить на думку уявити рішення $\varphi(t, \varepsilon)$ у вигляді $\Phi(t, t / \varepsilon, \varepsilon)$ і спробувати розкласти в ряд за ступенями ε функцію $\Phi(t, \tau, \varepsilon)$ (маючи на увазі в подальшому, що $\tau = t / \varepsilon$), наприклад, у вигляді

$$\Phi(t, \tau, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \dots + \pi_0(\tau) + \varepsilon \pi_1(\tau) + \varepsilon^2 \pi_2(\tau) + \dots \quad (2.43)$$

Підставляючи, як і раніше, (2.43) в рівняння (2.40) і початкова умова (2.41) і прирівнюючи члени при однакових ступенях ε (зрозуміло, окремо розглядаючи функції, що залежать від незалежного аргументу t і незалежного в даному контексті аргументу τ), отримаємо наступне сімейство рівнянь

$$\varphi_0(t) = -e^t, \quad \pi'_0(\tau) = -\pi_0(\tau), \quad \varphi_0(0) + \pi_0(0) = 1,$$

$$\varphi_1(t) = -\varphi'_0(t), \quad \pi'_1(\tau) = -\pi_1(\tau), \quad \varphi_1(0) + \pi_1(0) = 0,$$

$$\varphi_2(t) = -\varphi'_1(t), \quad \pi'_2(\tau) = -\pi_2(\tau), \quad \varphi_2(0) + \pi_2(0) = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Тому

$$\phi(t, \varepsilon) = \Phi\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = -e^t + \varepsilon e^t - \varepsilon^2 e^t + \dots + 2e^{\frac{t}{\varepsilon}} - \varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} - \dots =$$

$$= -e^t(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots) + e^{\frac{t}{\varepsilon}}[2 + \varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots)] = \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{1}{1 + \varepsilon} \varepsilon^t.$$

Таким чином, ми побудували розкладання виду (2.43) для вирішення задачі (2.40) – (2.42).

Члени π_0, π_1, \dots побудованої асимптотики називаються погранслайніми членами. Вони характеризуються тим, що швидко (в даному випадку з експоненційною швидкістю) зменшуються далеко від початкової точки і не малі поблизу неї. Члени ж $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ називаються регулярними членами асимптотики.

3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1 Модель 1

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u(t)' = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z(t)' = \gamma u(t), \varepsilon \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

де $u(t)$ – наведена інтенсивність шкідливого фактора,

$z(t)$ – інтенсивність роботи динамічної захисної системи.

Якщо $z(t) \gg u(t)$, то

$$\begin{cases} u(t)' = \alpha u(t) - \beta \varepsilon \cdot z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z(t)' = \gamma u(t), \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Виконаємо підстановку $u = \frac{z'}{\gamma}$ та $u' = \frac{z''}{\gamma}$ в перше рівняння системи (3.1)

$$\frac{z''}{\gamma} = \frac{\alpha z'}{\gamma} - \beta z \frac{z'}{\gamma}, \quad z'' = \alpha z' - \frac{\beta}{2} (z^2)'$$

Перевизначити змінні ($z = z'$), отримавши нове диференціальне рівняння

$$z' = \alpha z - \frac{\beta}{2} z^2 + c, \quad z(0) = z_0, \quad (3.3)$$

де c – деяка константа.

Початкова умова визначає стаціонарну захист (екран). Рівняння розв'язується аналітично. Його розв'язком буде функція

$$z = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta} + \operatorname{arctg} \left(\frac{a - z_0 \beta}{\sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta}} \right) \right) \right). \quad (3.4)$$

Для визначення вартості захисту скористаємося функцією

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(z - z_0) dt + C_0,$$

де c_0 – вартість стаціонарного захисту;

z_0 – величина стаціонарного захисту;

$c(z)$ – функція вартості, яка може приймати вид:

а) $c(z) = z$;

б) $c(z) = z^2$;

в) $c(z) = z \ln(z)$.

Проінтегруємо, взявши за $T=6.5$ (час, за яке захист системи прийме значення менше, ніж z_0) і запишемо отримані результати:

а) $c(z) = z$; $\tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 73 + 1200 = 1273$;

б) $c(z) = z^2$; $\tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 544 + 1200 = 1744$;

в) $c(z) = z \ln z$. $\tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 221.33 + 1200 = 1421.33$.

3.2 Модель 2

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t), \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Якщо $z(t) \gg u(t)$, то

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta \varepsilon \cdot z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z'(t) = \gamma u(t) - \delta \varepsilon \cdot z(t), \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.5) не має аналітичного розв'язок в загальному вигляді. Функції $z(t)$ і $u(t)$ пакетом Mathematica [20] надані у вигляді інтерполяційних функцій, тобто отримано чисельне рішення системи (3.5). Знайдемо її стаціонарні точки, $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$, $(0,0)$ прирівнявши ліві частини до 0 при будь-яких значеннях параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

$$\begin{cases} 0 = \alpha u - \beta z u, \\ 0 = \gamma u - \delta z. \end{cases} \quad (3.7)$$

Модель (3.5) є імітаційною і дозволяє інтерактивно підбирати потрібні параметри захисту, наприклад, наступним чином.

Зобразимо фазовий портрет системи (3.5) на рис. 3.1, взявши для визначеності такі значення параметрів системи $\alpha = 0.4, \beta = 0.3, \gamma = 0.5, \delta = 2$ і стаціонарний захист $z_0 = 11$ з вартістю $C_0 = 1100$.

Як видно з фазового портрета система прямує до стану $z = 1.3, u = 5.3$, але інтервал часу, за який вона перейде в малу околиця стійкого стану – $t = 16$ є неприйнятним для нашого випадку, якщо прийняти за обов'язкову умову $t = 8$ – робоча зміна. Тому необхідно змінити рівень впливу захисту (в бік збільшення).

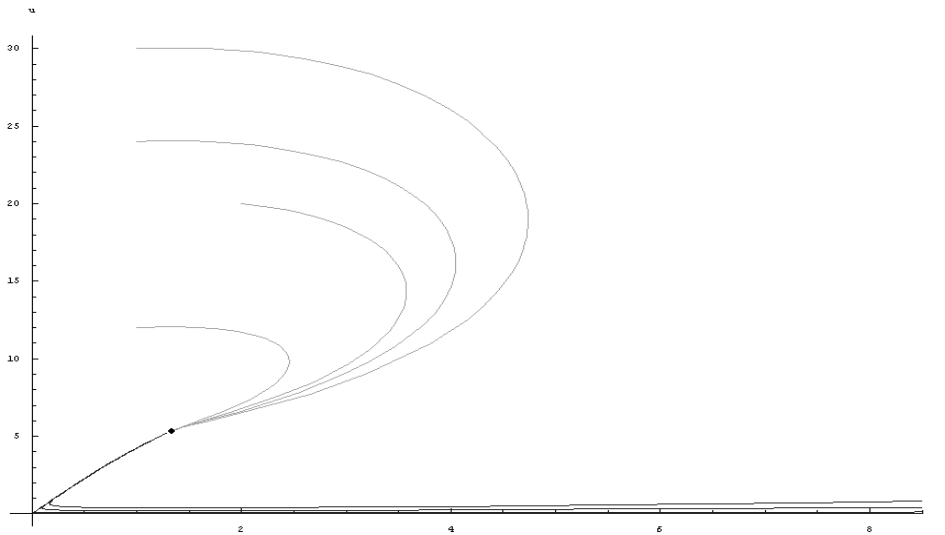


Рисунок 3.1 – Фазовий портрет системи (3.7)

Для цього збільшимо параметр β . Прийmemo для нашої системи $\beta = 0.31$, що позначиться на вартості стаціонарного захисту, природно, у бік її збільшення. Вартість стаціонарного захисту дорівнює $C_0 = 1320$. Зобразимо тепер фазовий портрет зміненої системи (3.5).

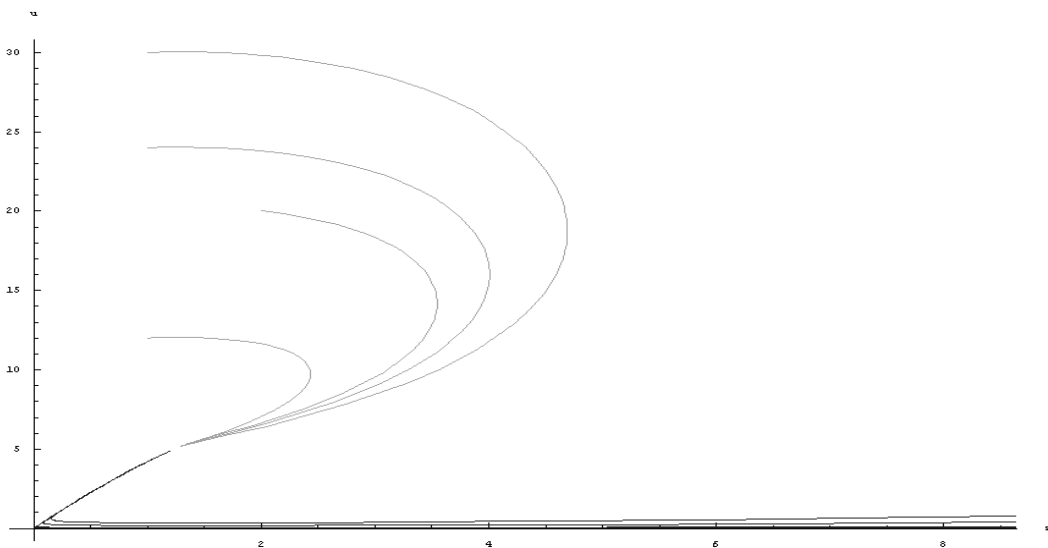


Рисунок 3.2 – Фазовий портрет системи (3.5)

Як видно з фазового портрета система прагне до стану $z = 1,29, u = 5,16$, але інтервал часу, протягом якого вона прагне до стійкого стану все ще є неприйнятним для нашого випадку. Тому необхідно збільшити рівень впливу. На

цей раз прийmemo $\beta = 0.4$. Приймемо тепер вартість нашої стаціонарної захисту рівній $C_0 = 2400$. Зобразимо фазовий портрет зміненої системи (рисунок 3.3). Як видно з фазового портрета система прагне до стану $z = 1, u = 4$. Інтервал часу, протягом якого вона переходить в околицю сталого стану $t = 7.5 < 8$ є прийнятним для нашого випадку. Виконаємо розрахунок вартості системи захисту, скориставшись емпіричними функціями вартості:

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 33.42 + 2400 = 2433.42;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 851.31 + 2400 = 3251.31;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 203.96 + 2400 = 2603.96.$$

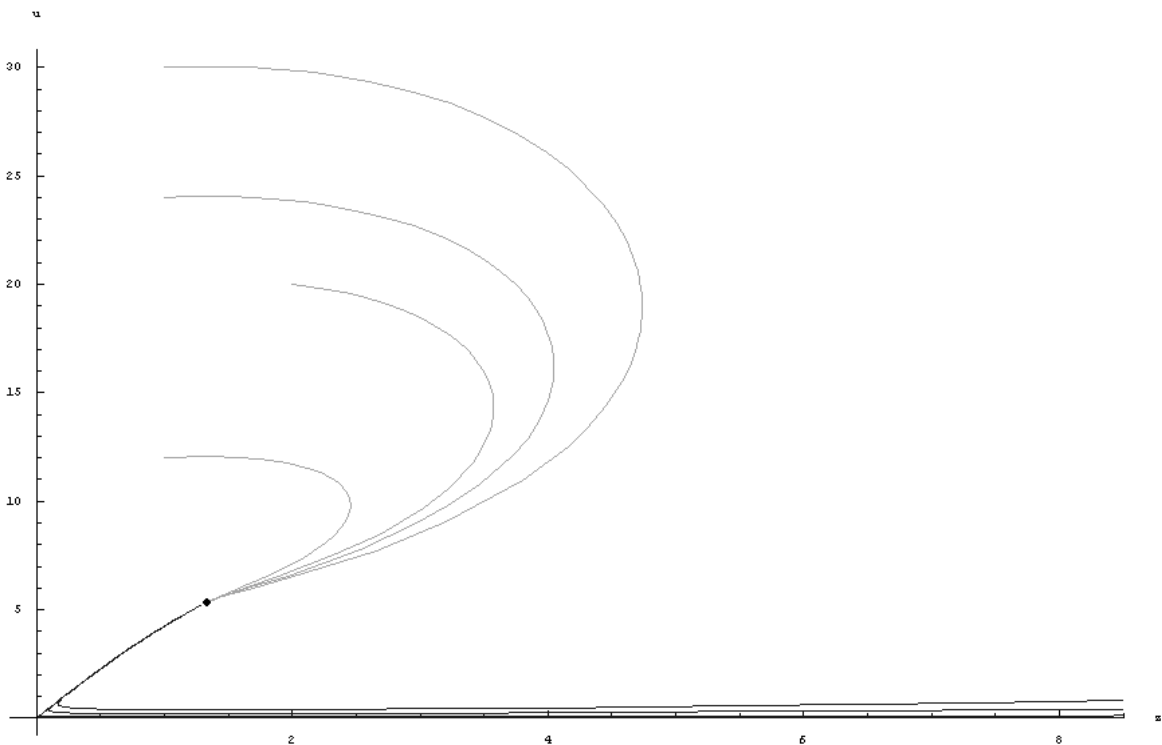


Рисунок 3.3 – Фазовий портрет системи (3.5)

Досліджуємо поведінку системи в околах її стаціонарних точок.

Розглянемо точку, відповідну штатного режиму – не виділяється шкідливий чинник і, отже, не працює захист.

Лінеарізуємо систему (3.5), скориставшись формулою

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dF}{dz} & \frac{dF}{du} \\ \frac{dG}{dz} & \frac{dG}{du} \end{pmatrix}_{(x,y)},$$

де F, G – функції з правої частини системи,

(x, y) – стаціонарна точка.

Знайдемо власні значення лінеаризованої системи, вирішивши рівняння $\det |A - \lambda E| = 0$.

$$\det |A - \lambda E| = \det \left| \begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}_{(0,0)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \det \left| \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\delta & \gamma - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0.$$

$$-\lambda(\gamma - \lambda) + \alpha\delta = 0. \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta}).$$

Для того, щоб стаціонарна точка була вузлом, необхідно $\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta} \geq 0$ або $\gamma \geq 2\sqrt{\alpha\delta}$ для випадку, коли $\alpha\delta > 0$.

Розглянемо власні значення. Залежністю від β на даному етапі нехтуємо. Розглянемо, як залежить поведінка системи від параметра α .

Візьмемо $\alpha > 0$ і для визначеності будемо приймати $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} > 0$ для $0 \leq \alpha \leq \frac{\gamma^2}{4\delta}$.

Ми отримали в точці $(0,0)$ для системи – нестійкий вузол. Цей випадок відповідає катастрофі – захист не справляється.

Візьмемо $\alpha < 0$ і для визначеності $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} < 0$ для будь-яких $\alpha < 0$. В точці $(0,0)$ для системи (3.5) – стійкий вузол, що і було потрібно.

Розглянемо тепер другу стаціонарну точку $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$.

Лінеаризуємо систему і знайдемо її власні значення.

$$\det |A - \lambda E| = \det \left| \begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}_{\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \det \left| \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\delta}{\gamma} - \lambda & 0 \\ -\delta & \gamma - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0.$$

$$-\left(\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \lambda\right)(\gamma - \lambda) = 0, \lambda_1 = \gamma, \lambda_2 = -\frac{\alpha\delta}{\gamma}.$$

Візьмемо $\alpha > 0$ і для визначеності будемо приймати $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ для $\alpha > 0$. У стаціонарній точці $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ ми отримали сідло для системи.

Візьмемо $\alpha < 0$ і для визначеності будемо приймати $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} > 0$ для $\alpha < 0$. У стаціонарній точці $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ ми отримали нестійкий вузол для системи.

Обидва випадки неприйнятні з точки зору безпеки життя і діяльності.

Тоді єдиним прийнятним розв'язком для системи (3.5) буде розв'язок в точці $(0,0)$ із значенням $\alpha < 0$ для визначеності $\delta > 0, \gamma > 0$, тоді $\lambda_{1,2} < 0$ для будь-яких $\alpha < 0$.

ВИСНОВКИ

В роботі було вироблено чисельно-аналітичне дослідження критичних режимів нелінійних динамічних систем із зовнішнім впливом і захистом. Проведена оптимізація витрат на систему захисту при обмеженнях на її якість. В математичному пакеті Mathematica був здійснений розрахунок вартості захисту.

У дипломній роботі розглянуті різні типи загальних моделей «людина-машина-середовище», кожна з яких адекватно описує деякий практично важлива якість об'єкта, а всі разом – описують об'єкт з точки зору його безпечного функціонування. Дана робота присвячена кількісному аналізу важливою моделі ЧМС – системи з захистом при зовнішньому шкідливому впливу.

Знайдені вирази і величини для інтенсивності захисту дозволяють визначити її вартість в умовних одиницях.

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(z - z_0) dt + C_0.$$

Для першої моделі це

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 73 + 1200 = 1273;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 544 + 1200 = 1744;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 221.33 + 1200 = 1421.33$$

а для другої

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 33.42 + 2400 = 2433.42;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 851.31 + 2400 = 3251.31;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 203.96 + 2400 = 2603.96.$$

Крім отримання рішень в замкнутому аналітичному вигляді і їх дослідження даний підхід дозволив отримати реальні оцінки для вартості захисту, і навіть зменшувати цю вартість, коли інтенсивність шкідливого фактора u не перевищує порогу динамічного захисту $c(z(t) - z_0) = 0$.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Alexeev I., Voloshyn O. Formation of Compensation Mechanism of Regional Enterprises' Human Resources Regeneration in the Labor Potential Development System // *Econtechmod. An International Quaterly Journal*. 2013. V. 2, № 3. P. 3–8.
2. Альрефай В. А., Наумейко И. В., Альджаафрех М. Р. Исследование асимптотик систем с защитой // *Sciences of Europe*. 2016. Т. 1, № 8 (8). С. 63–68.
3. Дзюндзюк Б. В., Наумейко И. В., Сердюк Н. Н. Содержательная модель воздействия нескольких вредных факторов на человека // *Радиоэлектроника и информатика*. 2000. №3(12). С.127–128.
4. Hoppensteadt F. Predator-prey model // *Scholarpedia*. 2006. 1 (10). P. 1563.
5. Наумейко И. В., Аль-Рефай В. А. К вопросу анализа критических режимов систем с динамической защитой от вредных воздействий // 2-я Международ. научно-техн. конференция ИСТ-2013, 16–22 сентября 2013 г. Евпатория, 2013. С. 12.
6. Наумейко И. В. Критические точки динамической модели распределенных вредных факторов // материалы Международ. научно-техн. конференции ИСТЭ-2011, 1–6 окт. 2011 г. Харьков-Ялта. С. 60–61.
7. Naumeyko I., Alja'afreh M. Dynamic balance research of protected systems // *Econtechmod. An International Quaterly Journal*. 2015. V. 4, № 3. P. 85–90.
8. Inozemtsev G. Scientific and technical preconditions of electric field application at plants protection // *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal*. 2012. V. 1. № 1, 47–50.
9. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва : Радио и связь, 1993. 282 с.
10. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.

11. Lotka A. Elements of mathematical biology. Baltimore : Dover Pubns, 1957. 457 p.
12. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. Москва : МЦНМО, 2004. 32 с.
13. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer-Verlag, 2000. 201 p.
14. Братусь А. С., Мещерин А. С., Новожилов А.С. Математические модели взаимодействия загрязнений с окружающей средой // Вычислительная математика и кибернетика, 2001. Т. 6. 140 с.
15. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. Москва : Физматлит, 2010. 400 стр.
16. Bell G. Prey – predator equations simulating on immune response // Mathematical Biosciences. 1973. №16. С. 291.
17. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии и медицине. Москва: Наука, 1985. 239 с.
18. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т.31 (73), №3. С. 575–586.
19. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : ИЛ, 1958. 474 с.
20. Дорогобед А. Н., Кобрунов А. И. Практическое руководство по изучению пакета Wolfram Mathematica. Ухта : УГТУ, 2015. 90 с.