УДК 621.37/.39

І.Г. Гусарова, О.П. Фещук

iryna.husarova@nure.ua, olha.feshchuk@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

ВИКОРИСТАННЯ СХЕМИ ЛАКСА-ВЕНДРОФФА ПРИ МОДЕЛЮВАННІ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ТЕЧІЇ ГАЗУ

Необхідність вирішення рівнянь газової динаміки виникає при розгляді питань, пов'язаних з формуванням і поширенням ударних хвиль в газах, плином газу в соплах або решітках турбін, запобіганням аварійних ситуацій при ефективному управлінні режимами транспорту газу і т.д.

Так як у випадку нештатної або аварійної ситуації, хоча б на одному з кінців ділянці трубопроводу (ДТ), відбувається різка зміна граничних умов, то режими транспорту газу по ДТ, є нестаціонарними і неізотермічними.

Нестаціонарний неізотермічний режим транспорту газу по ділянці трубопроводу, який представляє собою циліндричну трубу постійного діаметра, описується квазілінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу, отриманої із загальних рівнянь газової динаміки для одновимірного випадку: [1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+B(x,t,\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\Phi(x,t,\varphi), \qquad (1)$$

де

$$B(x,t,\varphi)=\begin{bmatrix} 2\alpha TS\frac{W}{p} & 1-2\alpha TS\frac{W^2}{p^2} & 0 \\ \alpha TS & 0 & 0 \\ \alpha S(\gamma-1)\frac{T^2}{p} & 0 & \alpha S\gamma T\frac{W}{p} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(x,t,\varphi)=\begin{bmatrix} -\beta TS\frac{W|W|}{p}-\frac{g}{\alpha S}\frac{p}{T}\frac{dh}{dx} \\ -\frac{4K}{D}(\gamma-1)\frac{T}{p}\left(T-T_{гр}\right)-g(\gamma-1)\frac{TW}{p}\frac{dh}{dx} \end{bmatrix},$$

де $\varphi(x,t)=\left(W(x,t),P(x,t),T(x,t)\right)$ – розв'язок системи, $\alpha=\frac{zgR}{S}$, $\beta=\frac{\lambda\alpha}{2D}$, $\gamma=\frac{C_p}{C_p-zgR}$, $W(x,t)$, $T(x,t)$, $P(x,t)$ – питома масова витрата, температура, тиск газу, t,x – часова і просторова координата. Також на границях ДТ задані граничні умови: тиск і температура на початку ділянки та масова витрата наприкінці ДТ як функції часу.

Перший крок двокрокового методу Лакса-Вендроффа [2] до системи (1) – метод Лакса, що використовується для побудови різницевого рівняння в точці $i+\frac{1}{2}$ на півкроці за часом:

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\varphi_i^k+\varphi_{i+1}^k\right)-\frac{\tau}{2\Delta}\left(B(x,t,\varphi)\right)_{i+\frac{1}{2}}^k\times$$
$$\times\left(\varphi_{i+1}^k-\varphi_i^k\right)+\frac{\tau}{2}\left(\Phi(x,t,\varphi)\right)_{i+\frac{1}{2}}^k,$$

де $\left(A(x,t,\varphi)\right)_{i+\frac{1}{2}}^k$ означає, що в якості рішення φ у вузлі $\left(i+\frac{1}{2},k\right)$ підставляємо значення $(\varphi)_{i+\frac{1}{2}}^k=\frac{1}{2}\left(\varphi_i^k+\varphi_{i+1}^k\right)$; другий крок – метод з переступанням, застосований на останньому півкроку за часом:

$$\varphi_i^{k+1}=\varphi_i^k-\frac{\tau}{\Delta}\left(B(x,t,\varphi)\right)_i^{k+\frac{1}{2}}\left(\varphi_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}-\varphi_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right)+$$
$$+\tau\left(\Phi(x,t,\varphi)\right)_i^{k+\frac{1}{2}},$$

де в $\left(A(x,t,\varphi)\right)_i^{k+\frac{1}{2}}$, $(\varphi)_i^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\varphi_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}+\varphi_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right)$.

З формул зазначених вище, що визначають схему, випливає, що з їх допомогою можна визначити розв'язок у всіх внутрішніх вузлах. Наводяться також рівняння, які визначають масову витрату на початку ділянки та тиск і температуру наприкінці ДТ з використанням граничних умов.

Наведена схема Лакса-Вендроффа має другий порядок точності за кроком по τ і по Δ. Як відомо, неявні схеми є, безумовно стійкими. Однак явні схеми краще узгоджені з кінцевою швидкістю поширення збурень, що буває потрібним при розгляданні наслідків аварійних ситуацій.

Список літератури

1. Гусарова И.Г. Численное моделирование режимов течения газа методом конечных разностей / И.Г. Гусарова, Д.В. Мелиневский // Системи Обробки Інформації: збірник наукових праць. – 2016. – №4(141). – С. 23 - 27.

2. Helgaker, J. F. Modeling Transient Flow in Long Distance Offshore Natural Gas Pipelines / J. F. Helgaker. — Thesis for — PhD. Trondheim, 2013.