УДК 621.376

В. И. ЩЕРБАК, канд. техн. наук

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, СИНТЕЗИРОВАННЫХ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Развитая в классических трудах [1—4] теория оценок позволяет без затруднений принципиального характера, для случая аппроксимации входного воздействия аддитивной смесью детерминированного сигнала и белого шума, синтезировать измерительные системы оценки векторных параметров $\vec{\lambda}$ любой размерности n. Однако уже при $n > 3$ разработчик измерительной аппаратуры сталкивается при анализе структуры синтезируемого измерителя с серьезными трудностями. Во-первых, до сих пор не существует меры, которая характеризовала бы уровень сложности получаемого схемного решения, во-вторых, в большинстве случаев анализ структуры измерителя невозможен без получения оптимальных алгоритмов обработки, что сопряжено с громоздкими математическими выкладками и существенно зависит от типа используемого в измерителе сигнала.

Цель работы — разработать метод, позволяющий количественно оценивать структуру синтезируемого измерителя без обращения к точным алгоритмам оптимальной оценки.

Размерность информативного вектора $\vec{\lambda}$, следовательно, и структурные свойства синтезируемого измерителя полностью определяются типом информативного сигнала, выбираемым разработчиком для решения измерительной задачи. Причем во многих практических ситуациях достаточно просто составляющие информативного вектора могут быть разделены на три типа параметров: амплитудные λ_a, фазовые $\lambda_ф$ или амплитудно-фазовые λ_c, под которыми понимаются такие параметры, изменение которых ведет к изменению в плоскости обработки пространственного распределения амплитуды, фазы или амплитуды и фазы одновременно.

О п р е д е л е н и е. Под элементарным пространственным каналом (ЭПК) обработки оптимального измерителя понимается устройство, реализующее пространственную операцию вида

$$\int\limits_L f_1(\vec{r}, \vec{\lambda}) f_2(\vec{r}, \vec{\lambda}) \cdot \ldots \cdot f_k(\vec{r}, \vec{\lambda})\, d\vec{r}, \tag{1}$$

где L — выбранная поверхность пространственного усреднения, а f_1, f_2, ... , $f_к$— пространственные амплитудные, фазовые или амплитудно-фазовые функции.

Введение понятия ЭПК может быть оправдано по меньшей мере двумя соображениями. Во-первых, к (1) приводит задача оценки в самом простейшем случае для скалярного параметра и число ЭПК может служить мерой сложности измерительной системы. Во-вторых, построение канала пространственной обработки в виде последовательности амплитудных, фазовых и (или) амплитудно-фазовых транспарантов, являющееся наиболее простым способом реализации операций над пространственными сигналами [5], вновь приводит к (1).

Если информативный сигнал имеет вид

$$s(\vec{r}, \vec{\lambda}) = a(\vec{r}, \vec{\lambda}_a, \vec{\lambda}_c) \exp\{j\varphi(\vec{r}, \vec{\lambda}_ф, \vec{\lambda}_c)\},$$

то для e-й составляющей отклонения λ_e вектора $\vec{\lambda}$ от опорного значения λ_{0e} вектора $\vec{\lambda}_0$ справедливо соотношение [6]

$$\Delta\lambda_e = \frac{2}{N_0}\left\{\sum_{i=1}^{n_a} \sigma_{ei}^2 \int\limits_L U(\vec{r})\, s_i'(\vec{r}, \vec{\lambda}_0)\, d\vec{r} + \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{n_ф} \sigma_{em}^2 \int\limits_L U(\vec{r})\, s_m'(\vec{r}, \vec{\lambda}_0)\, d\vec{r} +$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{n_c} \sigma_{ep}^2 \int\limits_L U(\vec{r})\, s_p'(\vec{r}, \vec{\lambda}_0)\, d\vec{r} \right\}, \tag{2}$$

где N_0 — спектральная плотность шума; s_i', s_m' и s_p' — частная производная от опорного сигнала по i-й, m-й и p-й составляющей вектора $\vec{\lambda}_0$, $i = \overline{1, n_a}$, $m = \overline{1, n_ф}$, $p = \overline{1, n_c}$, $U(\vec{r})$ — входное воздействие, а коэффициенты σ_{ei}^2, σ_{ep}^2 и σ_{em}^2 определяются путем обращения информационной матрицы Фишера A размерностью $n \times n\,(n = n_a + n_ф + n_c)$ с элементами [4]

$$A_{ej} = \frac{2}{N_0} \int\limits_L U(\vec{r})\, S''_{ej}(\vec{r}, \vec{\lambda})\, d\vec{r}, \tag{3}$$

n_a, $n_ф$ и n_c — число коррелированных составляющих вектора $\vec{\lambda}_a$, $\vec{\lambda}_ф$ и $\vec{\lambda}_c$ соответственно,

$$s''_{ej} = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_e \partial\lambda_j} s(\vec{r}, \vec{\lambda}).$$

Согласно (2), (3) основные свойства оптимального измерителя определяются первыми и вторыми производными $s(\vec{r}, \vec{\lambda})$, которые имеют вид (в (4) и (5) для упрощения записи зависимость функций от $\vec{r}$ и $\vec{\lambda}$ не указывается, но подразумевается)

$$\begin{gathered} s'_i = a'_i \exp\{j\varphi\}, \quad s'_m = j\psi_m a \exp\{j\varphi\}, \\ s'_p = [a'_p + j\psi_p] \exp\{j\varphi\}; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} s''_{iq} = a''_{iq} \exp\{j\varphi\}, \quad s''_m = ja'_i \psi_m \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{mt} = -a\psi_m\psi_t \exp\{j\varphi\}, \quad s''_{ip} = (a'_p j\psi_p + a''_{ip}) \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{mp} = (ja'_p\psi_m + ja\psi_{mp} - a\psi_m\psi_p) \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{pf} = (a''_{pf} + ja'_p\psi_f + ja'_f\psi_p - a\psi'_{pf} - a\psi_p\psi_f) \exp\{j\varphi\}, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$a'_p = \frac{\partial}{\partial\lambda_p} a, \quad a''_{pf} = \frac{\partial^2 a}{\partial\lambda_p \partial\lambda_f}, \quad \psi_m = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_m},$$

$$\psi'_{pm} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_p \partial\lambda_m}, \quad q \in \overline{1, n_a}, \quad t \in \overline{1, n_ф}, \quad f \in \overline{1, n_c}.$$

На основании соотношений (1)—(5), не обращаясь к точным алгоритмам оценки проведем общий структурный анализ синтезируемого по критерию максимального правдоподобия измерителя.

Теорема 1. *Если информативный вектор $\vec{\lambda}$ имеет n_a амплитудных $n_ф$ фазовых и n_c амплитудно-фазовых коррелированных составляющих и известно некоторое значение $\vec{\lambda}_0$, близкое к $\vec{\lambda}$ и попадающее в область сигнального выброса функции правдоподобия, то верхняя граница числа элементарных пространственных каналов $N_к$, необходимого для получения оценки одной коррелированной составляющей вектора $\vec{\lambda}$, определяется соотношением*

$$\begin{gathered} N_k \leqslant n_ф + 1{,}5n_a + 4{,}5n_c + 0{,}5\,(n_a^2 + 25n_c^2) + \\ + n_ф n_a + 3n_ф n_c + 2n_a n_c. \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Согласно (2), (3) для получения одной составляющей вектора $\vec{\lambda}$ необходимо сформировать $n_и$ составляющих (число слагаемых в (2), $n_и = n_ф + n_a + n_c$ (7) и n_g составляющих для нахождения элементов матрицы A. Для определения n_g учтем, что матрица A — симметрична и, следовательно, $n_g = 0{,}5\,(n_и + n_и^2)$ (8), однако, согласно определению ЭПК, их число определяется не только числом составляющих n_a, $n_ф$ и n_c, но и числом слагаемых в каждой составляющей, которое равно числу слагаемых в соответствующих производных (4), (5). Обозначая число каналов через N, из (7), с учетом (4) имеем $N_и = n_ф + n_a + 2n_c$, (9), а из (8), зная, что для фазовых параметров $n_ф$ элементы матрицы A постоянны [9] и могут быть просто рассчитаны, согласно (5) и (8), получаем

$$N_g = n_ф n_a + 3n_ф n_c + 0{,}5\,(n_a^2 + n_a) + 2n_a n_c + \\ + 2{,}5\,(5n_c^2 + n_c). \quad (10)$$

И окончательно, суммируя (9) и (10), приходим к (6). Причем строгое равенство в (6) соответствует случаю, когда все составляющие коррелированы между собой и не равны нулю все слагаемые для производных в (4) и (5).

Теорема 2. *При оценке коррелированных составляющих информативного вектора $\vec{\lambda}$ пространственная структура измерителя инвариантна к размерности вектора оценки $\vec{\Delta\lambda}$.*

Доказательство. Для обращения матрицы A необходимо постоянное число ЭПК N_g, определяемое соотношением (10), которое не зависит от числа оцениваемых составляющих, а зависит только от размерности вектора $\vec{\lambda}$. Такие же рассуждения оказываются справедливыми и для $N_и$ (9). Последнее непосредственно следует из определения ЭПК (1) и общего алгоритма обработки (2), согласно которому функции, входящие в интегралы (2), не зависят от e-го параметра. Это значит, что изменение индекса параметра e не приводит к изменению числа ЭПК, изменяются только коэффициенты σ_e^2, но $N_и$ постоянно. Поэтому увеличение числа одновременно оцениваемых составляющих вектора оценки $\vec{\Delta\lambda}$ приводит только к различному сочетанию каналов, но их величина постоянна.

Расчет согласно (6) числа ЭПК в зависимости от n_a, $n_ф$ и n приведен в табл. 1. Анализ данных таблицы показывает, что структура измерителя существенно зависит от выбираемого разработчиком информативного сигнала, в связи с чем особое внимание следует уделять типу информативного параметра, кодируемого в сигнале. Причем наиболее

Таблица 1

$n_ф$	2	4	0	0	0	0	0	0	2	2
n_a	0	0	2	4	6	0	0	0	2	2
n_c	0	0	0	0	0	2	4	6	2	3
n_k	2	4	5	14	27	59	218	477	90	167

нежелательным является наличие амплитудно-фазовых составляющих n_o информативного вектора $\vec{\lambda}_o$, что более чем в десять раз усложняет схему измерителя в сравнении со случаем оценки только амплитудного вектора $\vec{\lambda}_a$ и в десятки раз в сравнении с оценкой фазового вектора $\vec{\lambda}_ф$.

В некоторых приложениях, например при синтезе измерителей оптического диапазона с когерентной обработкой [6], дискриминационная характеристика оптимального измерителя оказывается столь узкой, что во всем ее диапазоне коэффициенты σ_e^2 могут считаться постоянными. В этом случае полезным оказывается следствие теоремы 1 для числа каналов N_k.

Теорема 3. *Если существует интервал значений информативного вектора, перекрывающий дискриминационную характеристику измерителя, в пределах которого элементы матрицы ковариаций могут считаться постоянными, то число элементарных пространственных каналов оптимального измерителя определяется соотношением*

$$N_k = n_ф + n_a + 2n_o. \qquad (11)$$

Доказательство. Постоянство коэффициентов σ_e^2 эквивалентно исключению из пространственного блока оценки измерителя N_g ЭПК (10). В этом случае $N_k = N_u$ и определяется (9) или (11).

Расчет числа ЭПК согласно (11) приведен в табл. 2.

Таблица 2

$n_ф$	2	4	0	0	0	0	0	0	2	2
n_a	0	0	2	4	6	0	0	0	2	2
n_o	0	0	0	0	0	2	4	6	2	3
n_k	2	4	2	4	6	4	8	12	8	10

Сравнительный анализ данных табл. 1 и 2 показывает, что структура измерителя для оценки амплитудных и амплитудно-фазовых параметров оказывается приемлемой для практической реализации только в частном случае — при выполнении условия постоянства элементов матрицы ковариаций σ_e^2.

В заключение рассмотрим еще один частный случай теорем 1 и 2, который имеет важное самостоятельное значение и частично рассматривался в [7]. Согласно данным табл. 1 в общем случае наиболее простыми в реализации оказываются измерители, в которых информативный сигнал включает только фазовые составляющие: $\vec{\lambda}_a = \vec{\lambda}_o = 0$.

Теорема 4. *Если на каждом цикле оценки фазового векторного параметра известно некоторое значение* $(\vec{\lambda_0})$, *достаточно близкое к истинному и попадающее в область сигнального выброса функции правдоподобия, то число элементарных каналов оптимального измерителя, необходимое для оценки информативного вектора или любой части его составляющих, равно числу ненулевых ковариаций между составляющими вектора.*

Доказательство. Непосредственно из (6) при $n_a = n_c = 0$ имеем $N_k \leqslant n_ф$. При этом равенство строгое, если все составляющие информативного вектора коррелированы между собой.

Таким образом, в результате проведенного анализа сформулированы структурные теоремы и получены соотношения, позволяющие установить однозначную связь между типом информативного вектора и структурой, синтезируемой по критерию максимального правдоподобия, оптимальной измерительной системы с когерентной обработкой входного сигнала. При этом установлено: структура измерителя полностью определяется типом и размерностью информативного вектора $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_ф + \vec{\lambda}_a + \vec{\lambda}_c$ и не зависит от размерности вектора оценки $\Delta\vec{\lambda}$; наиболее нежелательным с точки зрения практической реализации является наличие у информативного вектора амплитудно-фазовых составляющих, это более чем в десять раз усложняет схему измерителя в сравнении со случаем оценки только амплитудных параметров и в десятки раз в сравнении с оценкой фазового вектора той же размерности; приемлемую сложность при оценке амплитудных и амплитудно-фазовых параметров измерительная система имеет лишь в случае постоянства элементов матрицы ковариаций σ_e^2; наиболее просто реализуются измерители в случае $\vec{\lambda}_a = \vec{\lambda}_c = 0$, число ЭПК оптимального измерителя равно числу коррелированных составляющих информативного вектора.

Поступила в редколлегию 01.04.88