О НЕПОЛНЫХ ТАБЛИЦАХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ (АЛ) И ОДНОМ ИХ ПРИЛОЖЕНИИ В АВТОМАТИКЕ

Г. Г. Любченко, В. С. Подлипенский
Киев

1. О неполных и минимальных таблицах функций АЛ

Функции АЛ $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, быть может, недоопределенные, часто задают [1] таблицей, содержащей 2^n строк вида

$$\begin{array}{l} x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n f \\ \alpha_{1j}\alpha_{2j}\ldots\alpha_{ij}\ldots\alpha_{nj}A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2^n), \end{array} \tag{1}$$

где α_{ij} — значение аргумента x_i; $\alpha_{ij} \in \{0; 1\}$; $\alpha_{1j}\alpha_{2j}\ldots\alpha_{nj}$ — двоичные целые неотрицательные n-значные попарно различные числа; $A_j = f(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$; $A_j \in \{0; 1; —\}$. Если на месте некоторых A_j стоят прочерки, то функция f недоопределена. Таблицы такого вида будем называть **полными таблицами** функций АЛ. Полную таблицу, из которой удалены одна или несколько строк, будем называть **укороченной**; если удалены только строки с прочерками на местах значения функции, называемые **пустыми**, то — **недоопределенной таблицей**.

Будем рассматривать таблицы функций АЛ со строками (1), в которых k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ значений α_{ij} аргументов x_i заменены

прочерками, называя такие строки **неполными строками** k-го порядка. Последовательность всех пустых слов неполной строки, взятых слева направо, будем называть **пустым кодом** этой строки.

Таблицу, состоящую из неполных строк, назовем **неполной таблицей** функции АЛ, если в результате подстановок в каждую неполную ее строку k-го порядка вместо ее пустого кода кодов $00\ldots0$, $00\ldots1$, $\ldots$, $11\ldots1$ (всех этих кодов 2^k при $k \geqslant 1$ или ни одного при $k=0$), называемых **допустимыми кодами** пустого кода строки и являющихся двоичными целыми неотрицательными k-значными попарно различными числами, получаются только все строки, быть может повторяющиеся, полной таблицы данной функции АЛ. Таблицу T будем называть **неполной недоопределенной таблицей** данной недоопределенной таблицы (или соответствующей недоопределенной функции АЛ), если в результате подстановок в каждую неполную строку таблицы T вместо ее пустого кода всех допустимых для него кодов получаются только все строки, быть может повторяющиеся, такой полной или укороченной таблицы, которая содержит все строки данной недоопределенной таблицы.

Неполную таблицу функции АЛ (или неполную недоопределенную таблицу недоопределенной функции АЛ), содержащую наименьшее число нулей и единиц, являющихся значениями аргументов функции, по сравнению с числом таких же нулей и единиц других неполных (или неполных недоопределенных) таблиц той же функции, будем называть **минимальной таблицей** (или **минимальной недоопределенной таблицей**) данной функции. **Краткой минимальной таблицей** недоопределенной функции АЛ будем называть таблицу, состоящую из всех пустых строк минимальной таблицы этой функции и всех строк ее минимальной недоопределенной таблицы.

Теорема. Если функция АЛ $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет минимальную таблицу, содержащую только такие строки с единицами на местах значений функции

$$\underset{1}{Y_{1j}}\underset{1}{Y_{2j}}\ldots\underset{1}{Y_{aj}}\underset{0}{Z_{1j}}\underset{0}{Z_{2j}}\ldots\underset{0}{Z_{bj}}\underset{-}{U_{1j}}\underset{-}{U_{2j}}\ldots\underset{-}{U_{cj}}\underset{1}{f} \quad (j=1, 2, \ldots, w), \tag{2}$$

где $Y_{1j}, Y_{2j}, \ldots, Y_{aj}, Z_{1j}, Z_{2j}, \ldots, Z_{bj}, U_{1j}, U_{2j}, \ldots, U_{cj}$ — буквы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но, быть может, взятые для каждого j в другом порядке, а каждое a, b и c, зависящее от j, — одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, n$ $(a+b+c=n)$, то формула

$$\bigvee_{j=1}^{w} Y_{1j}Y_{2j}\ldots Y_{aj}\bar{Z}_{1j}\bar{Z}_{2j}\ldots\bar{Z}_{bj} \tag{3}$$

есть минимальная дизъюнктивная нормальная форма функции f.

Доказательство. Подставив в каждую j-ю строку таблицы (2) вместо ее пустого кода все допустимые для него коды, получим таблицу

Номер строк	$Y_{1j}Y_{2j}\ldots Y_{aj}Z_{1j}Z_{2j}\ldots Z_{bj}$	$U_{1j}U_{2j}\ldots U_{cj}$	f	
1	1 1 ... 1 0 0 ... 0	0 0 ... 0	1	
2	1 1 ... 1 0 0 ... 0	0 0 ... 1	1	
...	. . . . .	. . . . .	...	$(j=1, 2, \ldots, w)$, (4)
k	1 1 ... 1 0 0 ... 0	$\sigma_{1k}\sigma_{2k}\ldots\sigma_{ck}$	1	
...	. . . . .	. . . . .	...	
2^c	1 1 ... 1 0 0 ... 0	1 1 ... 1	1,	

где строки матрицы — двоичные целые неотрицательные c-значные попарно различные числа. Если написать по этой таблице формулу

$$\bigvee_{j=1}^{w}\bigvee_{k=1}^{2^c} Y_{1j}Y_{2j}\ldots Y_{aj}\bar{Z}_{1j}\bar{Z}_{2j}\ldots\bar{Z}_{bj}U_{1j}^{\sigma_{1k}}U_{2j}^{\sigma_{2k}}\ldots U_{c}^{\sigma_{ck}}, \tag{5}$$

то она будет содержать лишь такие конъюнкции, быть может повторяющиеся, какие имеются в совершенной дизъюнктивной нормальной форме функции f. Так как $A \vee A = A$ (возможное повторение конъюнкций), то формула (5) задает функцию f и ее можно записать в таком виде

$$\bigvee_{j=1}^{m} Y_{1j}Y_{2j}\dots Y_{aj}\bar{Z}_{1j}\bar{Z}_{2j}\dots\bar{Z}_{bj}\bigvee_{k=1}^{2^c} U_{1j}^{\sigma_{1k}}U_{2j}^{\sigma_{2k}}\dots U_{cj}^{\sigma_{ck}}. \qquad (6)$$

Из (4) следует, что $\bigvee_{k=1}^{2^c} U_{1j}^{\sigma_{1k}}U_{2j}^{\sigma_{2k}}\dots U_{cj}^{\sigma_{ck}} = 1$. Тогда при $A \wedge 1 = A$ формулу (6) можно записать в виде (3). Таким образом, формула (3) задает функцию f, представленную таблицей (2).

Докажем, что дизъюнктивная нормальная форма (3) является минимальной. Предположим обратное, т. е. что существует дизъюнктивная нормальная форма функции f

$$\bigvee_{j=1}^{Q} A_{1j}A_{2j}\dots A_{aj}\bar{B}_{1j}\bar{B}_{2j}\dots\bar{B}_{\beta j}, \qquad (7)$$

(где каждая буква $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{aj}, B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{\beta j}$ — одна из букв $x_1, x_2, \dots, x_n$), содержащая меньшее количество букв x_i, чем (3), или (что одно и то же) чем число нулей и единиц, стоящих на местах значений аргументов в таблице (2). Так как $A \wedge 1 = A$, то формулу (7) можно записать в виде

$$\bigvee_{j=1}^{Q} A_{1j}A_{2j}\dots A_{aj}\bar{B}_{1j}\bar{B}_{2j}\dots\bar{B}_{\beta j}\bigvee_{k=1}^{2^p} C_{1j}^{\sigma_{1k}}C_{2j}^{\sigma_{2k}}\dots C_{pj}^{\sigma_{pk}}, \qquad (8)$$

где $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{aj}, B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{\beta j}, C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{pj}$ — буквы $x_1, x_2, \dots, x_n$, но, быть может, взятые в другом порядке, а $\bigvee_{k=1}^{2^p} C_{1j}^{\sigma_{1k}}C_{2j}^{\sigma_{2k}}\dots C_{pj}^{\sigma_{pk}}$ — совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции $\varphi(C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{pj}) = 1$. Формулу (8) можно записать в таком виде:

$$\bigvee_{j=1}^{Q}\bigvee_{k=1}^{2^p} A_{1j}A_{2j}\dots A_{aj}\bar{B}_{1j}\bar{B}_{2j}\dots\bar{B}_{\beta j}C_{1j}^{\sigma_{1k}}C_{2j}^{\sigma_{2k}}\dots C_{pj}^{\sigma_{pk}}.$$

Эта формула является совершенной дизъюнктивной нормальной формой, быть может с повторяющимися конъюнкциями, функции f. Поэтому в полной таблице этой функции есть только такие строки с единицами на местах значения функции:

Номер строк	$A_{1j}A_{2j}\dots A_{aj}B_{1j}B_{2j}\dots B_{\beta j}$	$C_{1j}C_{2j}\dots C_{pj}$	f	
1	1 1 … 1 0 0 … 0	0 0 … 0	1	
2	1 1 … 1 0 0 … 0	0 0 … 1	1	
…	. . . . .	. . . . .	… $(j = 1, 2, \dots, Q)$	(9)
k	1 1 … 1 0 0 … 0	$\sigma_{1k}\sigma_{2k}\dots\sigma_{pk}$	1	
…	. . . . .	. . . . .	…	
2^p	1 1 … 1 0 0 … 0	1 1 … 1	1	

Так как матрица в таблице (9) имеет строки, являющиеся двоичными целыми неотрицательными p-значными попарно различными числами, то функцию f можно задать неполной таблицей, содержащей только такие строки с единицами на местах значений функции

$$\begin{array}{l} A_{1j}A_{2j}\dots A_{aj}B_{1j}B_{2j}\dots B_{\beta j}C_{1j}C_{2j}\dots C_{pj}f \quad (j = 1, 2, \dots, Q), \\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 0\ 0\ \dots 0 — —\ \dots — 1 \end{array}$$

содержащей столько нулей и единиц в качестве значений аргументов, сколько букв x_i в формуле (7). Но это значит, что существует неполная таблица функции f, содержащая меньше нулей и единиц на местах значений аргументов, чем минимальная таблица (2), чего быть не может. Из этого противоречия следует, что наше предположение неверно и что формула (3) — минимальная дизъюнктивная нормальная форма функции f.

В теореме сформулировано известное* правило получения по полной таблице функции АЛ ее совершенной дизъюнктивной нормальной формы, но сформулировано для **минимальной таблицы**, для которой оно дает **минимальную дизъюнктивную нормальную форму**. Аналогично доказано, что если применить к минимальной таблице известное правило получения по полной таблице совершенной конъюнктивной нормальной формы, то будем иметь **минимальную конъюнктивную нормальную форму**. Если применить указанные правила к краткой минимальной таблице недоопределенной функции АЛ, то последняя автоматически доопределяется так, что при этом получаются ее конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы, содержащие наименьшее число букв по сравнению с другими такими же ее формами, полученными при ином доопределении ее. Техника получения минимальных и кратких минимальных таблиц (а она проще техники получения минимальных форм функций АЛ по известным методам) здесь не описывается и не даются понятия о неполных, минимальных и кратких минимальных таблицах для задания функций k-значной логики.

2. Переход от первоначального словесного задания схемы автоматики к заданию ее функциями АЛ

Идея предлагаемого метода состоит в том, что после введения переменных и их значений отдельные утверждения первоначального словесного задания схемы автоматики (постановка задачи) записываются в виде неполных строк, из которых составляются неполные и затем, если нужно, минимальные или краткие минимальные таблицы функций АЛ, по которым безо всяких преобразований пишутся минимальные конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы этих функций. Таким образом, логический синтез выполняется без составления полных таблиц функций АЛ и без преобразования формул алгебры логики, если конечной целью этого синтеза является получение минимальных нормальных форм.

При решении нередко выясняется, что постановка той или иной задачи некорректна, т. е. что некоторые ситуации, существенные для синтезируемой схемы, в первоначальном словесном задании не предусмотрены. В таких случаях приходится составлять неполные строки для указанных ситуаций, уточняя тем самым постановку задачи. Поясним предлагаемый метод на примере.

Постановка задачи. Три емкости загружаются сыпучим материалом с помощью распределительного конвейера и плужковых сбрасывателей. При опускании на конвейер плужкового сбрасывателя загружается соответствующая емкость. Емкости снабжены датчиками, сигнализирующими, что соответствующая емкость загружена. Необходимо создать схему, подающую сигналы для опускания каждого плужкового сбрасывателя, если загрузка очередной емкости происходит после заполнения предыдущей и соблюдается, по возможности, последовательный и циклический порядок загрузки.

* С. В. Яблонский. Функциональные построения в k-значной логике. Труды Математического института имени В. А. Стеклова, LI, 1958.

Переменные и их значения. Введем обозначения: y_1, y_2 и y_3 — сигналы датчиков в момент времени $t+1$; X_1, X_2 и X_3 — искомые функции, являющиеся сигналами для опускания плужковых сбрасывателей в момент времени $t+1$; x_1, x_2 и x_3 — эти же функции в момент t. Примем, что $(i=1,2,3)$ $y_i=0$ при заполненной емкости i (емкость i нельзя загружать) и $y_i=1$ при незаполненной емкости i (емкость i можно загружать); $x_i=0$ или $X_i=0$ при отсутствии сигнала (емкость i не загружается в момент t или соответственно в момент $t+1$) и $x_i=1$ или $X_i=1$ при наличии сигнала (емкость i загружается в момент t или соответственно в момент $t+1$).

Составление неполной краткой минимальной таблицы для функции X_1 и минимальных форм для X_1, X_2 и X_3. Составим краткую минимальную таблицу для функции $X_1=f(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$. Из постановки задачи следует, что два или три плужковых сбрасывателя не могут опускаться одновременно, поэтому

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	X_1
1	1	—	—	—	—	—
1	—	1	—	—	—	—
—	1	1	—	—	—	—

(10)

Для сокращения записей не будем писать строку наименований: $x_1x_2x_3y_1y_2y_3X_1$. Считаем, что в каждую из неполных строк нельзя подставлять вместо пустого кода таких допустимых для него кодов, которые давали бы такие же наборы значений аргументов, как и одна из строк (10) после подстановки в нее вместо пустых допустимых кодов.

Из утверждения «...загрузка очередной емкости происходит после заполнения предыдущей...» (см. постановку задачи) следует

1 — — 1 — — 1 (11)

— 1 — — 1 — 0 (12)

— — 1 — — 1 0. (13)

Из постановки задачи следует, что емкость 1 нельзя загружать при $y_1=0$, т. е.

— — — 0 — — 0. (14)

Из формулировки «...соблюдается циклический и последовательный порядок загрузки...» имеем

— — 1 1 — 0 1 (15)

1 — — 0 1 — 0

— 1 — — 0 1 0. (16)

Среднюю строку далее не рассматриваем, так как она является частным случаем строки (14).

Постановка задачи не является корректной; уточним ее следующим образом:

0 0 0 — — — 0 (17)

(в этом случае схема не работает);

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	X_1	X_2	X_3
—	1	—	1	0	0	1	0	0
—	—	1	0	1	0	0	1	0
1	—	—	0	0	1	0	0	1

(18)

(нарушается последовательный и циклический порядок загрузки). Последние две строки для X_1 являются частными случаями строки (14).

Сравнивая строки (16) и (12), заключаем, что строку (16) можно записать в виде

$$- 1 - - - 1\ 0.$$

Эту строку и строку (13), учитывая (10) и (17), можно представить в виде одной строки

$$0 - - - - 1\ 0. \qquad (19)$$

Собирая полученные строки в одну таблицу, получим такую краткую минимальную таблицу (нумерация строк прежняя)

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	X_1	
1	1	—	—	—	—	—	
1	—	1	—	—	—	—	(10)
—	1	1	—	—	—	—	
1	—	—	1	—	—	1	(11)
—	1	—	—	1	—	0	(12)
—	—	—	0	—	—	0	(14)
—	—	1	1	—	0	1	(15)
0	0	0	—	—	—	0	(17)
—	1	—	1	0	0	1	(18)
0	—	—	—	—	1	0	(19)

По этой таблице получаем (см. 1) минимальные нормальные дизъюнктивную и конъюнктивную формы

$$X_1 = x_1y_1 \vee x_3y_1\bar{y}_3 \vee x_2y_1\bar{y}_2\bar{y}_3,$$

$$X_1 = (\bar{x}_2 \vee \bar{y}_2) \wedge y_1 \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{y}_3).$$

После циклических перестановок переменных

$$X_2 = x_2y_2 \vee x_1y_2\bar{y}_1 \vee x_3y_2\bar{y}_3\bar{y}_1;$$

$$X_2 = (\bar{x}_3 \vee \bar{y}_3) \wedge y_2 \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee \bar{y}_1);$$

$$X_3 = x_3y_3 \vee x_2y_3\bar{y}_2 \vee x_1y_3\bar{y}_1\bar{y}_2;$$

$$X_3 = (\bar{x}_1 \vee \bar{y}_1) \wedge y_3 \wedge (x_3 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_3 \vee \bar{y}_2).$$

Дальнейший ход решения поставленной задачи не связан с описываемым методом.

НОРМАЛЬНЫЕ ОДНОЗНАЧНЫЕ ДВОИЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ И АЛГЕБРА ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Г. Г. Любченко, В. С. Подлипенский

Киев

1. Преобразования нормальных однозначных двоичных таблиц

Нормальные однозначные двоичные таблицы (НОД таблицы), называемые [3, 5 — 8] нормальными матрицами, являются одним из классов нормальных k-х таблиц [4]. Приведем определение НОД таблиц и опишем некоторые их преобразования.

Определение НОД таблиц. 1. Цифры 0 и 1 — двоичные таблицы. 2. Пустое слово, обозначаемое далее прочерком, есть двоичная таблица. 3. Таблица

$$\begin{array}{c} A_p\ \ A_{p-1}\ \ \ldots\ \ A_1\ \ f \\ \left\|\begin{array}{cccc} \alpha_{1p} & \alpha_{1,p-1} & \ldots & \alpha_{11} \\ \alpha_{2p} & \alpha_{2,p-1} & \ldots & \alpha_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2^p p} & \alpha_{2^p,p-1} & \ldots & \alpha_{2^p 1} \end{array}\right\| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_{2^p} \end{array} \end{array} \qquad (1)$$