

МЕТОД СИНТЕЗА ϵ -РОБАСТНЫХ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

С.Г. УДОВЕНКО, В.А. КАЛОША

Рассматривается подход к синтезу робастных регуляторов для многосвязных динамических процессов. Вводится понятие ϵ -робастности, гарантирующей субоптимальность и асимптотическую устойчивость децентрализованной системы. Предлагается алгоритм ϵ -робастного управления.

An approach to robust controller synthesis for multiconnecting dynamical processes is considered. The ϵ -robustness conception ensuring suboptimality and asymptotic stability of a decentralized system is introduced. An ϵ -robustness control algorithm is proposed.

Введение

Проблема управления многосвязными динамическими объектами зачастую может быть эффективно решена лишь с помощью децентрализации исходной системы.

Рассмотрим подробнее сущность задачи децентрализации исходной динамической системы S .

В общем виде (без учета случайных возмущений) линейная система может быть описана уравнениями вида

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = f(x, u, k),$$

$$x(k) \in R^n, u(k) \in R^m, \quad (1)$$

где A, B — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Известно, что если матрица B является диагональной, то система S , состоящая из подсистем $S_i, i = \overline{1, N}$, может удовлетворительно управляться с использованием методов координации [1].

Однако при большом числе взаимосвязей между подсистемами итерационный характер этих методов приводит к значительным вычислительным сложностям и наличию накапливаемых погрешностей. Кроме того, решения при расчете параметров координации основаны на предварительной оценке траекторий, которая осложняется тем, что координационным переменным, искусственно формируемым для уравнений связи, нельзя дать физической интерпретации. Для устранения этих недостатков в настоящей работе предлагается новый метод для решения задачи робастного управления многосвязными динамическими системами, основанный на анализе влияния взаимодействий на общий оптимум.

Для реализации такого метода целесообразно использовать математический аппарат, который позволил бы преобразовать матрицу в уравнении (1) таким образом, чтобы каждая подсистема S_i была управляемой лишь через свои собственные переменные. Процедура такого преобразования составляет основу решения задачи децентрализации общей системы.

1. Децентрализация динамической системы

Представим уравнение (1) в виде

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Рассмотрим стандартную задачу управления системой (2), минимизирующего линейно-квадратичный функционал:

$$J(u) = \min_u (k-k_1)^{-1} [x(k_2)^T D x(k_2) + \sum_{k=k_1}^{k_2} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k))], \quad (3)$$

где D, Q, R — диагональные положительно определенные матрицы.

Предположив, что вся система S является декомпозируемой на N подсистем $S_i, i = \overline{1, N}$, можно выделить N задач локальной оптимизации.

Пусть каждая из таких подсистем описывается уравнением вида

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(k), i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где $x_i(k) \in R^{n_i}, u_i(k) \in R^{m_i}; A_i, B_i$ — матрицы размерности $n_i \times n_i$ и $n_i \times m_i$ соответственно; A_{ij} — матрицы взаимодействий, входящих в i -ю подсистему.

Введем преобразование подсистем S_i следующего вида:

$$x'_i(k) = L_i^{-1} x_i(k), \quad (5)$$

где $L_i = [B_i^1, \dots, A_i^{n_i-1} B_i^1, \dots, B_i^i, \dots, A_i^{n_i} B_i^i]$; $B_i^1, \dots, B_i^i$ — столбцы матрицы B_i .

Уравнения (4) при этом преобразуются следующим образом:

$$x'_i(k+1) = A'_i x'_i(k) + B'_i u_i(k) + A'_{ij} x'_j(k), \quad (6)$$

где $A'_i = L_i^{-1} A_i L_i$; $A'_{ij} = L_i^{-1} A_{ij} L_j$; $B'_i = L_i^{-1} B_i$.

Поскольку вектор $x'_i(k) = [x'_{i1}(k), \dots, x'_{in_i}(k)]^T$, то в дальнейшем можно ввести перестановочную матрицу для перегруппировки элементов $x'_{ij}(k)$ таким способом, чтобы каждый элемент i -й подсистемы относился к управлению $u_i(k) \in R^{m_i}$.

Результирующая структура децентрализованной подсистемы будет соответствовать следующему уравнению:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_i(k+1) \\ \vdots \\ x_N(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & A_{il} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{il} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & A_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{ip1} & \dots & A_{ipp} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & B_i & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_i(k) \\ \vdots \\ u_N(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{iN} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $1 \leq l \leq n_i$.

Зависимость (7) соответствует децентрализованной системе. Преимущество предложенного метода

децентрализации состоит в относительно простой процедуре преобразования и перестановки элементов исходных матриц.

2. Анализ влияния взаимодействий на робастность многосвязной системы

Рассмотрим уравнение динамической системы S , содержащей N взаимосвязанных подсистем S_i после осуществления децентрализации (то есть взаимодействия связаны лишь с переменными состояниями $x(k)$):

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k), k) + z_i[x_i(k), k], \quad i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$x_i(k) \in R^{n_i}; \quad R^n = R^{n_1} \times R^{n_2} \times \dots \times R^{n_N};$$

$$u_i(k) \in R^{m_i}; \quad R^m = R^{m_1} \times R^{m_2} \times \dots \times R^{m_N}; \quad k1 \leq k \leq k2.$$

Целевую функцию для всей системы зададим в следующем виде:

$$J(u) = \min_u \left\{ \Phi_i[x(k2), k2] + \sum_{k=k1}^{k2} F(x(k), u(k), k) \right\}, \quad (9)$$

$$\text{причем } J(u) = \sum_{i=1}^N J_i(u_i),$$

где

$$J_i(u_i) = \min_{u_i} \left\{ \Phi_i[x_i(k2), k2] + \sum_{k=k1}^{k2} F_i(x_i(k), u_i(k), k) \right\}.$$

Предположим, что оптимальное управление для i -й системы может быть представлено стандартным уравнением обратной связи:

$$u_i(k) = g_i[x_i(k), k]. \quad (10)$$

Локальную функцию управления без учета итераций обозначим следующим образом:

$$u_i^S(k) = g_i^S[x_i(k), k], \quad (11)$$

причем

$$J^S(u^S) = \sum_{i=1}^N J^S(u_i^S). \quad (12)$$

Так как функции управления $u_i^S(k)$ не могут гарантировать условий глобального оптимума, то локальные управления являются лишь субоптимальными.

Если обозначить глобальную функцию как $J^g(u)$, то соотношение значений глобального функционала и функционала (12) можно выразить неравенством вида

$$J^g(u) \leq (1 + \varepsilon) J^S(u^S), \quad (13)$$

где ε — индекс субоптимальности управления ($\varepsilon > 0$).

Очевидно, что индекс субоптимальности является мерой влияния на качество управления учитываемых взаимодействий между подсистемами.

В общем случае взаимодействия $z_i[x_j(k), k]$ связаны с элементами фундаментальной матрицы взаимосвязей $E'(k) = [e_{ij}(k)]_{N \times N}$, элементы которой ограничены зависимостью $0 \leq e_{ij}(k) \leq 1$.

При этом взаимодействия выражаются следующей функцией:

$$z_i[x_j(k)] = z_i[e_{i1}(k)x_1(k), e_{i2}(k)x_2(k), \dots, \dots, e_{iN}(k)x_N(k), k], \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (14)$$

В соответствии с [2] можно утверждать, что подсистема S_i является субоптимальной по отношению к целевой функции $J_i^S(u_i^S)$ при $u_i^S(k) = g_i^S[x_i(k), k]$, если норма взаимодействий ограничивается неравенством вида

$$\|z_i[x_j(k), k]\| \leq \sum_{j=1}^N e_{ij}(k) \xi_{ij} \|x_j(k)\|, \quad (15)$$

где ξ_{ij} — функция, ограничивающая норму переменных взаимодействия, причем

$$\xi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \xi_{ij} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (16)$$

Определение 1. Многосвязную систему вида (2) будем считать ε -робастной по отношению к переменным взаимодействия, если выполняется условие (15).

Очевидно, что ε -робастность гарантирует субоптимальность управления системой в смысле (13) и ее асимптотическую устойчивость.

Определим условия ε -робастности для линейных многосвязных динамических систем с квадратичной целевой функцией.

Пусть после проведения децентрализации исходной линейной динамической системы локальные подсистемы описываются уравнениями вида (7), то есть

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(k), \quad i = \overline{1, N}, \quad (17)$$

где A_i , A_{ij} — матрицы размерности $n_i \times n_i$ и $(n - n_i) \times (n - n_i)$ соответственно; B_i — блочно-диагональная матрица.

Зададим квадратичный функционал для каждой подсистемы:

$$J_i(u_i) = \min_{u_i} (k - k_1)^{-1} \sum_{k=k_1}^{k_2} (x_i^T(k) Q_i x_i(k) + u_i^T(k) R_i u_i(k)), \quad (18)$$

где Q_i , R_i — положительно определенная и положительно полуопределенная блочно-диагональные матрицы соответственно.

Пусть существуют локальные управления подсистемами, соответствующие стандартным уравнениям обратной связи:

$$u_i^S(k) = -K_i^S x_i(k), \quad i = \overline{1, N}, \quad (19)$$

где $K_i^S = R_i^{-1} B_i^T K_i x_i(k)$; K_i — решение уравнения Риккати для заданного k_2 .

При подстановке локальных решений в (17) получаем

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i R_i^{-1} B_i^T K_i x_i(k) + z_i[x_j(k), k], \quad i = \overline{1, N}, \quad (20)$$

$$\text{где } z_i(k) = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(k).$$

Утверждение 1. Если взаимодействия $z_i[x_j(k), k]$, $i, j = \overline{1, N}$; $i \neq j$, ограничены по отношению к норме неравенством вида

$$\|z_i[x_j(k), k]\| \leq \xi_{ij} \|x_j(k)\|. \quad (21)$$

то существует число ξ , гарантирующее ε -робастность исходной системы, причем

$$\xi = \frac{\lambda_{\min}(P) \varepsilon}{\lambda_{\max}(K) (1 + \varepsilon)}, \quad (22)$$

где P — блочно-диагональная матрица с элементами $P_i = -K_i B_i R_i^{-1} B_i^T K_i + Q$; K — симметрическая положительно определенная матрица с блочно-диагональными элементами K_i , которые являются матричными решениями уравнений Риккати для $k_2 \rightarrow \infty$; $\lambda_{\max}(K)$ — максимальное собственное число матрицы K ; $\lambda_{\min}(P)$ — минимальное собственное число матрицы P .

3. Алгоритм ε -робастного управления

Пусть многосвязная динамическая система, состоящая из подсистем S_i , $i = \overline{1, N}$, может быть описана уравнениями типа (7). Предположим, что матрица B всей системы может быть приведена к блочно-диагональному виду описанным ранее методом децентрализации.

Очевидно, что применение локальных целевых функций дает лишь субоптимальные результаты для локальных управлений $u_i^S(k)$, $i = \overline{1, N}$, без обеспечения устойчивости подсистем.

Локальные управления имеют стандартный вид

$$u_i^S(k) = -K_i^S x_i(k),$$

где $K_i^S = R_i^{-1} B_i^T K_i$, K_i — решение матричного уравнения типа

$$A_i^T K_i + K_i A_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^T K_i + Q_i = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим некоторые теоретические предпосылки, позволяющие определить условия ε -робастности рассматриваемой динамической системы.

Утверждение 2. Для рассматриваемой динамической системы равенства (23) могут выполняться лишь тогда, если матрица явных взаимодействий между подсистемами $Z = (z_i)$, $i = \overline{1, N}$, может быть представлена в виде

$$Z = VK, \quad (24)$$

где K — симметричная диагональная матрица решений (23), а V — антисимметричная матрица размерности $n \times n$.

Доказательство. Пусть K' — решение уравнения

$$K'(A_0 + Z) + (A_0 + Z)^T K' - K'BR^{-1}B^TK' + Q = 0, \quad (25)$$

где A_0 — диагональная система, состоящая из подматриц A_i , $i = \overline{1, N}$; B , Q , R — диагональные матрицы, состоящие из подматриц B_i , Q_i , R_i , $i = \overline{1, N}$, соответственно.

Пусть для $k = k_1$ оптимальное значение глобального функционала вида

$$J^s(u) = \min_{u(k)} (k - k_1)^{-1} \sum_{k=k_1}^{k_2} (x^T Q x + u^T R u) \quad (26)$$

соответствует значению

$$J_o^s(u) = x(k_1)^T K' x(k_1). \quad (27)$$

С учетом необходимости выполнения зависимости (24) преобразуем уравнение (25) к виду

$$\begin{aligned} & [K'A_0 + A_0^T K' - K'BR^{-1}B^TK' + Q] + \\ & + [K'VK' + K'V^TK'] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как матрицы K_i являются симметричными, положительно определенными и удовлетворяют решению уравнения (23), то наряду с (28) должно выполняться равенство

$$KA_0 + A_0^T K - KBR^{-1}B^TK + Q = 0. \quad (29)$$

Сравнение (29) и (28) позволяет утверждать, что $K' = K$. Тогда

$$\begin{aligned} J_o^s(u) &= x^T(k_1)K'x(k_1) = \sum_{i=1}^N J_i(u_i^s) = \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^T(k_1)K_i x_i(k_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $K' = K$, то из (25) и (28) следует, что

$$KZ + Z^TK = 0, \quad (31)$$

поэтому KZ является антисимметричной матрицей, то есть

$$KZ = \bar{V}, \quad (32)$$

где

$$\bar{V} = K\bar{V}K. \quad (33)$$

Подстановка (32) в (33) дает результирующую зависимость

$$KZ = KVK \Rightarrow Z = VK,$$

доказывающую утверждение 2.

Если для многосвязной динамической системы (9) с глобальным квадратичным функционалом (26) может быть определено глобальное управление

$$u^s(k) = -R^{-1}B^TK'x(k), \quad (34)$$

где K' — решение матричного уравнения Риккати вида

$$K'A + A^TK' - K'BR^{-1}B^TK' + Q = 0, \quad (35)$$

то:

а) существует антисимметричная матрица V , которая является решением матричного уравнения Ляпунова:

$$V(A_0 + Z) + (A_0 + Z)^TV + Z^TKA_0 - A_0^TKZ = 0; \quad (36)$$

б) существует положительно определенная корректирующая матрица K^c , определяемая зависимостью вида

$$K^c = K' - K = (V - KZ)(A_0 + Z)^{-1}; \quad (37)$$

в) существует матрица коррекции управлений B^c размерности $n \times n$, определяемая зависимостью вида

$$B^c = -(K + K^c)^{-1}K^cB, \quad (38)$$

причем скорректированное управление $u^c(k)$ представляется следующим выражением:

$$u^c(k) = u^s(k) + u^M(k) = -(K^S + K^M)x(k). \quad (39)$$

На рис. 1 приведена общая схема модификации локальных решений, соответствующая описанному методу.

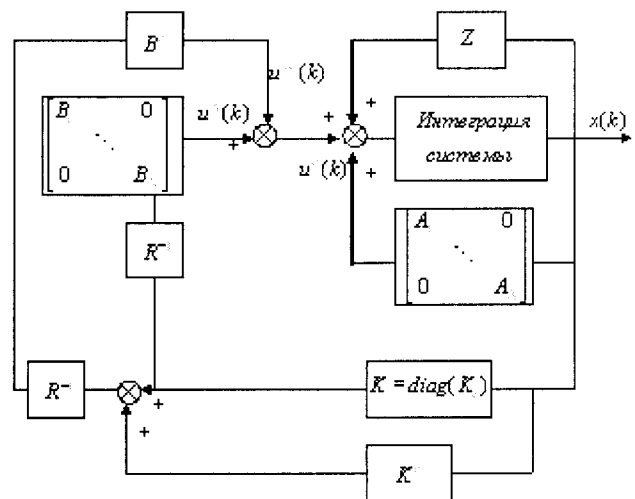


Рис. 1. Схема модификации локальных решений по методу явного задания взаимодействий

4. Прикладные результаты

Предложенная схема децентрализованного ϵ -робастного управления может быть эффективно использована для динамической оптимизации многосвязных объектов энергетики и химической технологии (например, для распределенных энергетических систем, процессов каталитического риформинга, вакуум-выпарки и т. д.).

В частности, была решена задача двухуровневого управления процессом вакуум-выпарки при производстве двуокиси титана. Декомпозиция исходной динамической модели этого процесса позволила выделить две подсистемы вида

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1,1 \\ -2,05 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0,9 \\ 0,01 & 0,9 \end{bmatrix}}_{A_{12}=Z_1} \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2,05 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1,2 \\ 2,23 & -3,4 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2,1 \\ 0 & 3,09 \end{bmatrix}}_{A_{21}=Z_2} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1,9 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

При этом были приняты следующие значения матричных коэффициентов для локальных функционалов (18):

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R_1 = 30; Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R_2 = 3.$$

В соответствии с рассмотренным методом ϵ -робастного управления получены корректирующие матрицы K^c , $(K + K^c)$ и B^c :

$$K^c = \begin{bmatrix} -4,491 & 0,007 & -0,342 & 0,187 \\ 0 & -1,867 & 0,555 & 0,106 \\ -0,349 & 0,546 & 0,002 & 0,004 \\ 0,184 & 0,095 & 0,001 & 0,084 \end{bmatrix};$$

$$K + K^c = \begin{bmatrix} 0,208 & -0,477 & -0,342 & 0,187 \\ -0,428 & 0,634 & 0,555 & 0,106 \\ -0,349 & 0,546 & 2,119 & -0,161 \\ 0,184 & 0,085 & -0,164 & 0,61 \end{bmatrix};$$

$$B^c = \begin{bmatrix} -30,922 & 3,691 \\ -29,475 & 0,508 \\ 3,927 & 0,355 \\ 14,395 & -1,513 \end{bmatrix}.$$

Результирующие траектории $x_i(k)$, $k = \overline{1,4}$, подтверждают асимптотическую устойчивость системы после введения матриц коррекции в алгоритм управления для различных начальных условий и различных значений матрицы взаимосвязей.

Моделирование этой же задачи было также осуществлено по известному методу координации, основанному на отыскании значений неопределенных множителей.

Результаты экспериментального моделирования микропроцессорной системы ϵ -робастного управления процессом вакуум-выпарки на базе МП Pentium II обобщены в табл. 1.

Таблица 1

Метод	Время реализации (с)	Индекс субоптимальности	Значения функционалов
Глобального управления	0,084	—	0,49
Локальных управлений	0,059	1,639	1,293
ϵ -робастного управления	0,023	0,172	0,574
Координации подсистем	0,112	0,148	0,563

Сравнительный анализ результатов, полученных с использованием стандартных методов и робастного метода, предложенного в настоящей работе, свидетельствует о предпочтительности последнего.

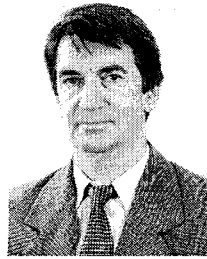
Заключение

Рассмотренный алгоритм дает возможность простого решения задач ϵ -робастного цифрового управления многосвязными динамическими системами, основой которого является определение матриц коррекции

B^c и K^c . Он позволяет декомпозировать общую задачу и перейти к решению уравнений для локальных подсистем, что является намного предпочтительнее с точки зрения практической реализации цифровых регуляторов. Процедура коррекции локальных решений для каждого из методов обеспечивает ϵ -робастность системы, то есть гарантированную устойчивость и субоптимальность. Предложенный подход может быть реализован двухуровневой схемой оптимизации. На нижнем уровне этой схемы решаются локальные задачи оптимизации без учета взаимодействий, а на высшем уровне эти решения корректируются (при известных A_i , B_i , Q_i , R_i , $i = \overline{1, N}$) для достижения ϵ -робастности.

Литература: 1. Паршева Е.Л., Цыкунов А.М. Адаптивное децентрализованное управление многосвязными объектами // Автоматика и телемеханика. 2001. № 2. С. 135–149. 2. Popchev I., Tsoneva I. Convergence Study of a Decomposition Method for Optimal Control of Large Scale time Delayed Interconnected Systems // Problems of Engineering Cybernetics. 1988. № 29. P. 62–71. 3. Удовенко С.Г., Калоша В.А. Робастная децентрализация дискретных динамических систем // Вестник Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета. 2001. Вып. 15–16. С. 183–185.

Поступила в редколлегию 10.12.2002 г.



Удовенко Сергей Григорьевич, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры ЭВМ ХНУРЭ. Область научных интересов: системы субоптимального управления стохастическими процессами.



Калоша Вадим Александрович, ассистент кафедры ЭВМ ХНУРЭ. Область научных интересов: системы адаптивного и робастного управления.