В.В. ДОЛЖИКОВ, д-р физ.-мат. наук

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ НА ФОКАЛЬНОЙ ОСИ КРУГЛОЙ СФОКУСИРОВАННОЙ АПЕРТУРЫ

Введение

Знание корреляционных свойств поля необходимо при оценке разброса случайной ДН (амплитудной, фазовой, поляризационной в определенном угловом секторе), необходимого в свою очередь при решении ряда важных прикладных задач. К числу таковых можно, в частности, отнести задачу анализа потенциальной точности моноимпульсных РЛС или фазовых пеленгаторов, работающих в неоднородной среде, расчет надежности систем углового разнесенного приема и т.д. В [1] изучены корреляционные свойства флуктуаций поля сфокусированной круглой апертуры на фокальной сфере. В данной работе рассматриваются корреляционные характеристики поля на фокальной оси. Получены выражения для корреляционных функций флуктуаций комплексного поля и его вещественной и мнимой компонент, а также для корреляционных и взаимных корреляционных функций флуктуаций амплитуды и фазы этого поля в зоне Френеля. Проанализированы зависимости указанных характеристик от параметров фазовых флуктуаций на апертуре – их дисперсии и радиуса корреляции.

1. Исходные соотношения

Рассмотрим плоскую синфазную равномерно возбужденную круглую апертуру радиуса R, сфокусированную в зону Френеля. Поле данной антенны в приближении Френеля с точностью до несущественного множителя $i\pi E_A/8$ ($\mathrm{E_A}$ – амплитуда поля на апертуре) можно представить в виде [1]:

$$E_0(\zeta,\psi)=e^{-ib\chi(\zeta)}E_0^{(0)}(\zeta,\psi)= =e^{-ib\chi(\zeta)}\frac{2}{\chi(\zeta)}\int_0^1 e^{i2\zeta u^2}J_0(u\psi)u\,du \quad (1)$$

[1]

Входящие в (1) безразмерные переменные ψ, u, χ и ζ связаны с реальными координатами системы (рис.1) следующими соотношениями: $\psi = kR\sin\theta$, $u=\rho_1/R$, $\chi = r/r_{дз}$ [2] и $\zeta=\pi(1-\chi_0/\chi)/16\chi_0$. Здесь $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ– длина волны в свободном пространстве, $\mathrm{r_{дз}}=8\mathrm{R}^2/\lambda$ – расстояние до границы дальней зоны, $\chi_0=\mathrm{r_f}/\mathrm{r_{дз}}$ – нормированное значение фокусного расстояния, $\mathrm{b}=\mathrm{kr_{дз}}=16\pi(\mathrm{R}/\lambda)^2$.

Если на апертуре имеются фазовые флуктуации $\Phi(u,\varphi_1)$, то вместо (1) имеем для поля отдельной реализации следующее выражение:

$$E(\zeta,\psi,\varphi)=e^{-ib\chi(\zeta)}E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)=e^{-ib\chi(\zeta)}\frac{1}{\pi\chi(\zeta)}\int_S e^{i\Phi(u,\varphi_1)}e^{i2\zeta u^2}e^{iu\psi\cos(\varphi-\varphi_1)}ds. \quad (2)$$

Будем считать, что функция $\Phi(u,\varphi_1)$ - нормальная, однородная по раскрыву, случайная функция с нулевым средним значением, дисперсией $\overline{\Phi^2(u,\varphi_1)}=\sigma^2(u,\varphi_1)=\alpha=const$ и коэффициентом корреляции гауссовского вида

[1] Здесь и далее верхний индекс (0) означает, что соответствующая величина записана без учета множителя $\exp[-ib\chi(\zeta)]$. В данном случае это величина $\mathrm{E}_0(\zeta,\psi)$.

[2] Поскольку в качестве основной продольной переменной в дальнейшем используется ζ, то безразмерная величина χ, выраженная через ζ как $\chi(\zeta)=\chi_0/(1-16\chi_0\zeta/\pi)$, далее будет обозначаться как $\chi(\zeta)$.

$$r=\frac{\overline{\Phi(u,\varphi_1)\cdot\Phi(u',\varphi_1')}}{\alpha}=e^{-\frac{u^2+u'^2-2uu'\cos(\varphi_1-\varphi_1')}{c^2}},$$

где числитель дроби в показателе экспоненты – квадрат расстояния между точками с координатами u,φ_1 и u',φ_1', а знаменатель – квадрат радиуса корреляции c в относительных единицах, связанного с радиусом корреляции фазовых флуктуаций ρ_0 соотношением $c=\rho_0/R$.

Тогда, усредняя соотношение (2), получим

$$\overline{E(\zeta,\psi,\varphi)}=e^{-ib\chi(\zeta)}\,\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)}=e^{-ib\chi(\zeta)}e^{-\frac{\alpha}{2}}E_0^{(0)}(\zeta,\psi). \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) являются исходными для определения корреляционных характеристик поля антенны с круглой апертурой.

В рамках корреляционной теории флуктуации поля

$$\delta E(\zeta,\psi,\varphi)=e^{-ib\chi(\zeta)}\left[E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)-\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)}\right]=$$
$$=\frac{e^{-ib\chi(\zeta)}}{\chi(\zeta)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\left[2\zeta u^2+u\psi\cos(\varphi-\varphi_1)\right]}\left[e^{i\Phi(u,\varphi_1)}-e^{-\frac{\alpha}{2}}\right]d\varphi_1 u\,du=A(\zeta,\psi,\varphi)+iB(\zeta,\psi,\varphi), \tag{4}$$

где $A(\zeta,\psi,\varphi)=\mathrm{Re}\,\delta E(\zeta,\psi,\varphi)$, $B(\zeta,\psi,\varphi)=\mathrm{Im}\,\delta E(\zeta,\psi,\varphi)$ – реальная и мнимая части флуктуаций поля, описываются корреляционной матрицей второго порядка [2]:

$$\mathbf{K}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\begin{pmatrix}K_{AA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) & K_{AB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)\\ K_{BA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) & K_{BB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $K_{AA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ и $K_{BB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ – корреляционные функции (КФ), а $K_{AB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ и $K_{BA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ – взаимные корреляционные функции (ВКФ) реальной и мнимой частей флуктуаций поля.

В общем случае, когда $\psi\neq\psi_1$, $\zeta\neq\zeta_1$, $\varphi\neq\varphi_1$, корреляционная матрица (5) характеризует корреляционную связь между флуктуациями поля в произвольных точках (ζ,ψ,φ)и $(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$. Эта же матрица $\mathbf{K}$ при $\zeta=\zeta_1$, но $\varphi\neq\varphi_1$, $\psi\neq\psi_1$ будет характеризовать корреляцию между флуктуациями поля в поперечном направлении (в точках, лежащих на сфере радиуса ζ, а при $\zeta=\zeta_1=0$ на фокальной сфере). При $\psi=\psi_1=0$ она характеризует корреляционную связь флуктуаций поля в продольном направлении (вдоль фокальной оси). Если же $\psi=\psi_1$, $\zeta=\zeta_1$, $\varphi=\varphi_1$, то диагональные элементы матрицы $\mathbf{K}$ определяют дисперсию $\sigma_A^2(\zeta,\psi,\varphi)$, $\sigma_B^2(\zeta,\psi,\varphi)$, а недиагональные – характеризуют корреляцию $A(\zeta,\psi,\varphi)$ и $B(\zeta,\psi,\varphi)$ в точке с координатами ζ,ψ,φ.

Отметим, что если флуктуации поля излучающей системы (ИС) распределены по нормальному закону, то статистическое описание функции $\delta E(\zeta,\psi,\varphi)$ с помощью матрицы $\mathbf{K}$ будет исчерпывающим. Нормальный закон распределения флуктуаций поля будет иметь место в случае малых фазовых флуктуаций в апертуре или в случае, когда радиус корреляции этих флуктуаций много меньше размера ИС [2].

Введем, следуя [2], корреляционные функции

$$K_1(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\overline{\delta E(\zeta,\psi,\varphi)\,\delta E^*(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=e^{-ib[\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)]}\overline{\delta E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)\,\delta E^{(0)*}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=e^{-ib[\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)]}K_1^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1), \quad (6)$$

$$K_2(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\overline{\delta E(\zeta,\psi,\varphi)\,\delta E(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=e^{-ib[\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)]}\overline{\delta E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)\,\delta E^{(0)}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=e^{-ib[\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)]}K_2^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1), \quad (7)$$

де $*$ – знак комплексного сопряжения, а вспомогательные функции

$$K_1^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)\,E^{(0)*}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}-\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)}\;\overline{E^{(0)*}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}, \quad (8)$$

$$K_2^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)\,E^{(0)}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}-\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)}\;\overline{E^{(0)}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}. \quad (9)$$

Значение $K_1(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ при $\zeta_1=\zeta,\ \psi_1=\psi,\ \varphi_1=\varphi$ определяет дисперсию флуктуа-ций комплексного поля:

$$K_1(\zeta,\psi,\varphi)=\overline{|\delta E(\zeta,\psi,\varphi)|^2}=\overline{|E(\zeta,\psi,\varphi)|^2}-\left|\overline{E(\zeta,\psi,\varphi)}\right|^2, \quad (10)$$

де первое слагаемое есть средняя интенсивность поля, а второе – квадрат модуля среднего юля.

При принятой в данной работе статистике фазовых флуктуаций

$$\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)E^{(0)*}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=\frac{e^{-\alpha}}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)}\left\{E_0^{(0)}(\zeta,\psi)\,E_0^{(0)*}(\zeta_1,\psi_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(+1)^n\alpha^n}{n!}T_n^{(1)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)\right\}, \quad (11)$$

$$\overline{E^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi)\,E^{(0)}(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=\frac{e^{-\alpha}}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)}\left\{E_0^{(0)}(\zeta,\psi)\,E_0^{(0)}(\zeta_1,\psi_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}T_n^{(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)\right\}. \quad (12)$$

Здесь $c_n=c/\sqrt{n}$, $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_1$ и согласно (П.7)

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=4\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm 1)^m\cos(m\Delta\varphi)S_m^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1), \quad (13)$$

где

$$S_m^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1)=\int_0^1\!\!\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}e^{i2\left(\zeta u^2\mp\zeta_1 u_1^2\right)}I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)uu_1\,du\,du_1\,. \quad (14)$$

Подставив (11), (12) в (8), (9), получаем

$$K_{1,2}^{(0)}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{1}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)}e^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n\alpha^n}{n!}T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi). \quad (15)$$

Как следует из (13) – (15), $K_{1,2}^{(0)}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ – комплексные функции.

Так как согласно (6), (7) и (4) $K_1=\overline{\left[(A+iB)\cdot(A_1+iB_1)^*\right]}=\left(K_{AA_1}+K_{BB_1}\right)+i\left(K_{BA_1}-K_{AB_1}\right)$

и $K_2 = \left(K_{AA_1} + K_{BB_1}\right) + i\left(K_{BA_1} + K_{AB_1}\right)$, то элементы корреляционной матрицы выражаются через введенные вспомогательные функции $K_{1,2}^{(0)}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$ следующим образом[3]:

$$K_{AA_1,BB_1} = \frac{\operatorname{Re}K_1 \pm \operatorname{Re}K_2}{2} = \frac{1}{2}\left\{\cos b\left[\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right]\operatorname{Re}K_1^{(0)} \pm \cos b\left[\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right] \times \operatorname{Re}K_2^{(0)} + \sin b\left[\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right]\operatorname{Im}K_1^{(0)} \pm \sin b\left[\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right]\operatorname{Im}K_2^{(0)}\right\}, \quad (16)$$

$$K_{BA_1,AB_1} = \frac{\operatorname{Im}K_2 \pm \operatorname{Im}K_1}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\cos b\left[\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right]\operatorname{Im}K_1^{(0)} + \cos b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right) \times \operatorname{Im}K_2^{(0)} \mp \sin b\left[\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right]\operatorname{Re}K_1^{(0)} - s\operatorname{in} b\left[\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right]\operatorname{Re}K_2^{(0)}\right\}. \quad (17)$$

Коэффициенты корреляции флуктуаций комплексного поля и его реальной и мнимой компонент при этом определяются выражениями:

$$R(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_1(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_1(\zeta,\psi)\sigma_1(\zeta_1,\psi_1)}, \quad (18)$$

$$R_{AA_1,BB_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_{AA_1,BB_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_{A,B}(\zeta,\psi)\sigma_{A_1,B_1}(\zeta_1,\psi_1)}, \quad (19)$$

$$R_{AB_1,BA_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_{AB_1,BA_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_{A,B}(\zeta,\psi)\sigma_{B_1,A_1}(\zeta_1,\psi_1)}, \quad (20)$$

где $\mathrm{R}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$ – коэффициент корреляции флуктуаций комплексного поля, а

$$\sigma_1(\zeta,\psi) = \sqrt{K_1(\zeta,\psi,\zeta,\psi,\Delta\varphi=0)}\ , \ \sigma_{A,B}(\zeta,\psi) = \sqrt{K_{AA,BB}(\zeta,\psi,\zeta,\psi,\Delta\varphi=0)}\,. \quad (21)$$

Полученные соотношения справедливы при произвольных значениях дисперсии α и радиуса корреляции c фазовых флуктуаций на апертуре.

2. Корреляция комплексного поля и его реальной и мнимой компонент

Для точек на фокальной оси продольные[4] КФ и ВКФ будем записывать с верхним индексом "$\|$" – например, $K_{1,2}^{(0)\|}$, $K_{AA_1}^{\|}$, $K_{BB_1}^{\|}$, $K_{AB_1}^{\|}$ и т.д.

Полагая в (15) $\psi = \psi_1 = 0$, для функций $K_{1,2}^{(0)}$ получим:

$$K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1) = \frac{1}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)}e^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{\alpha^n}{n!}T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\zeta_1,), \quad (22)$$

где, согласно (П.17)

[3] Здесь и далее аргументы у КФ и ВКФ в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, для краткости будут опускаться

[4] Здесь и далее вместо термина "корреляционные функции в продольном направлении» будем использовать более короткий термин «продольные» корреляционные функции.

$$T_n^{(1),(2)}(c,\zeta,\zeta_1)=4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}e^{i2(\zeta u^2\mp\zeta_1 u_1^2)}I_0\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)uu_1dudu_1 \qquad (23)$$

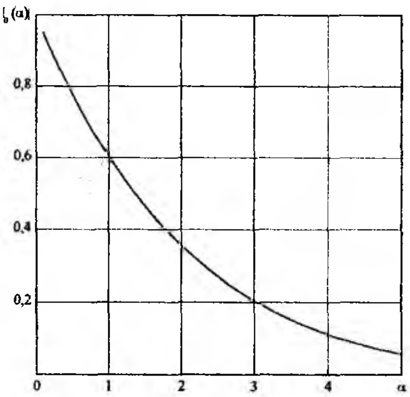


Рис. 2

Продольные КФ комплексного поля, его реальных и мнимых компонент, их ВКФ и соответствующие коэффициенты корреляции определяются выражениями (16), (17) и (19), (20).

Рассмотрим ряд частных случаев: а) радиусы корреляции флуктуаций фазы поля на апертуре малы, б) флуктуации фазы малы

Радиусы корреляции малы. Согласно (П.18) при $c \ll 1$ функции $T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\zeta_1)$ с точностью до c_n^2 имеют вид

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\zeta_1)=c_n^2 e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}\frac{\sin(\zeta\mp\zeta_1)}{\zeta\mp\zeta_1}, \qquad (24)$$

Тогда, согласно (22), получим

$$K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)=\frac{c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}e^{-\alpha}M_{1,2}(\alpha)e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}\frac{\sin(\zeta\mp\zeta_1)}{\zeta\mp\zeta_1}, \qquad (25)$$

и, подставив (25) в (16) и (17)

$$K^{\|}_{AA_1,BB_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{c^2}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}e^{-\alpha}M_1(\alpha)\left\{\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)\cos\left[(\zeta-\zeta_1)-b(\chi-\chi_1)\right]}{(\zeta-\zeta_1)}\pm\right.$$
$$\left.\pm M_0(\alpha)\frac{\sin(\zeta+\zeta_1)\cos\left[(\zeta+\zeta_1)-b(\chi+\chi_1)\right]}{(\zeta+\zeta_1)}\right\}, \qquad (26)$$

$$K^{\|}_{BA_1,AB_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{c^2}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}e^{-\alpha}M_1(\alpha)\left\{\frac{\sin(\zeta+\zeta_1)\sin\left[(\zeta+\zeta_1)-b(\chi+\chi_1)\right]}{\zeta+\zeta_1}\times\right.$$
$$\left.\times M_0(\alpha)\pm\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)\sin\left[(\zeta-\zeta_1)-b(\chi-\chi_1)\right]}{\zeta-\zeta_1}\right\}, \qquad (27)$$

де $M_0(\alpha)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n}{n!n}\Big/\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!n}=\frac{M_2(\alpha)}{M_1(\alpha)}$, $\quad M_{1,2}(\alpha)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n\alpha^n}{n!n}=\begin{cases}\mathrm{Ei}(\alpha)-\ln\alpha-\gamma\\ \Gamma(0,\alpha)-\ln\alpha-\gamma\end{cases}$.

Здесь $\mathrm{Ei}(\alpha)$ – интегральная показательная функция, $\Gamma(0,\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\infty}(e^{-t}/t)dt$ - неполная амма-функция [3], γ – постоянная Эйлера. Величина $M_0(\alpha)$ отрицательна и её модуль юнотонно уменьшается с ростом α. Для малых α это следует из асимптотического разлоения $M_0(\alpha)$ при $\alpha \ll 1$: $M_0(\alpha)\approx-(1-0.5\alpha)$. Для более широкого интервала значений α рафик $|M_0(\alpha)|$ представлен на рис. 2.

Величины дисперсий определяется выражением

$$\sigma^{\|}_{A,B}{}^2(\zeta)=\frac{c^2e^{-\alpha}}{2\chi^2(\zeta)}M_1(\alpha)\left[1\pm M_0(\alpha)\frac{\sin2\zeta\cos2(\zeta-b\chi)}{2\zeta}\right].$$

Коэффициенты корреляции флуктуаций при этом принимают соответственно вид

$$R^{\|}_{AA_1,BB_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\dfrac{\sin(\zeta-\zeta_1)\cos\left[b(\chi-\chi_1)-(\zeta-\zeta_1)\right]}{(\zeta-\zeta_1)}\pm M_0(\alpha)\dfrac{\sin(\zeta+\zeta_1)\cos\left[b(\chi+\chi_1)-(\zeta+\zeta_1)\right]}{(\zeta+\zeta_1)}}{\sqrt{1\pm M_0(\alpha)\dfrac{\sin 2\zeta\cos 2\left(b\chi(\zeta)-\zeta\right)}{2\zeta}}\sqrt{1\pm M_0(\alpha)\dfrac{\sin 2\zeta_1\cos 2\left(b\chi(\zeta_1)-\zeta\right)}{2\zeta_1}}},\quad(28)$$

$$R^{\|}_{BA_1,AB_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{-M_0(\alpha)\dfrac{\sin(\zeta+\zeta_1)\sin\left[b(\chi+\chi_1)-(\zeta+\zeta_1)\right]}{\zeta+\zeta_1}\mp\dfrac{\sin(\zeta-\zeta_1)\sin\left[b(\chi-\chi_1)-(\zeta-\zeta_1)\right]}{\zeta-\zeta_1}}{\sqrt{1\mp M_0(\alpha)\dfrac{\sin 2\zeta\cos 2\left(b\chi(\zeta)-\zeta\right)}{2\zeta}}\sqrt{1\pm M_0(\alpha)\dfrac{\sin 2\zeta_1\cos 2\left(b\chi(\zeta_1)-\zeta_1\right)}{2\zeta_1}}},\quad(29)$$

$$R^{\|}(\zeta,\zeta_1)=e^{i\left[(\zeta-\zeta_1)-b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)\right]}\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1}.\quad(30)$$

Заметим, что модуль КФ и коэффициента корреляции флуктуаций комплексного поля в отличие от КФ, ВКФ и соответствующих коэффициентов корреляции реальной и мнимой частей поля, не зависят от параметра b. Радиус корреляции порядка π в единицах обобщенной координаты ζ.

При $\alpha\gg 1$ величина $M_0(\alpha)\approx 0$ и из (28) и (29) следует, что

$$R_{AA_1}=R_{BB_1}=\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)\cos\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)-(\zeta-\zeta_1)\right]}{\zeta-\zeta_1},$$

$$R_{AB_1}=-R_{BA_1}=\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)\sin\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)-(\zeta-\zeta_1)\right]}{\zeta-\zeta_1}.$$

Коэффициенты корреляции реальных и мнимых компонент равны, взаимные коэффициенты корреляции равны по модулю, но противоположны по знаку.

На рис. 3 и 4 приведены графики (сплошная и штриховая кривые) коэффициентов корреляции реальной и мнимой компонент, а на рис.4 их взаимных коэффициентов корреляции для различных значений дисперсии α и величины параметра $b=7$. Фокусное расстояние $\chi_0=0.1$, координата одной из точек наблюдения $\chi(\zeta_1)=0.095$, что соответствует $\zeta_1=-0.1$.

С ростом дисперсии флуктуаций фазы поля на апертуре взаимная корреляция реальной и мнимой компонент поля ослабевает (штриховые кривые). Коэффициенты корреляции этих компонент имеют практически одинаковый вид (штриховые кривые).

Флуктуации малы. При малых флуктуациях с точностью до первого порядка малости по α имеем

$$K^{(0)\|}_{1,2}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\pm\alpha}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}T_1^{(1),(2)}(c,\zeta,\zeta_1).\quad(31)$$

Рассмотрим случаи малых ($c<<1$) и больших ($c>>1$) радиусов корреляций.

При $c<<1$, подставив (24) в (28) получим:

$$K^{(0)\|}_{1,2}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\pm\alpha c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}\frac{\sin(\zeta\mp\zeta_1)}{\zeta\mp\zeta_1}\quad(32)$$

и затем для продольных корреляционных функций компонент флуктуаций поля:

$$K^{\|}_{AA_1,BB_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\alpha c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\left[\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)}{(\zeta-\zeta_1)}\cos\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)-(\zeta-\zeta_1)\right]\mp\right.$$
$$\left.\mp\frac{\sin(\zeta+\zeta_1)}{(\zeta+\zeta_1)}\cos\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right)-(\zeta+\zeta_1)\right]\right], \qquad (33)$$

$$K^{\|}_{AB_1,BA_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\alpha c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\left[\pm\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)}{(\zeta-\zeta_1)}\sin\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)-(\zeta-\zeta_1)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin(\zeta+\zeta_1)}{(\zeta+\zeta_1)}\sin\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right)-(\zeta+\zeta_1)\right]\right]. \qquad (34)$$

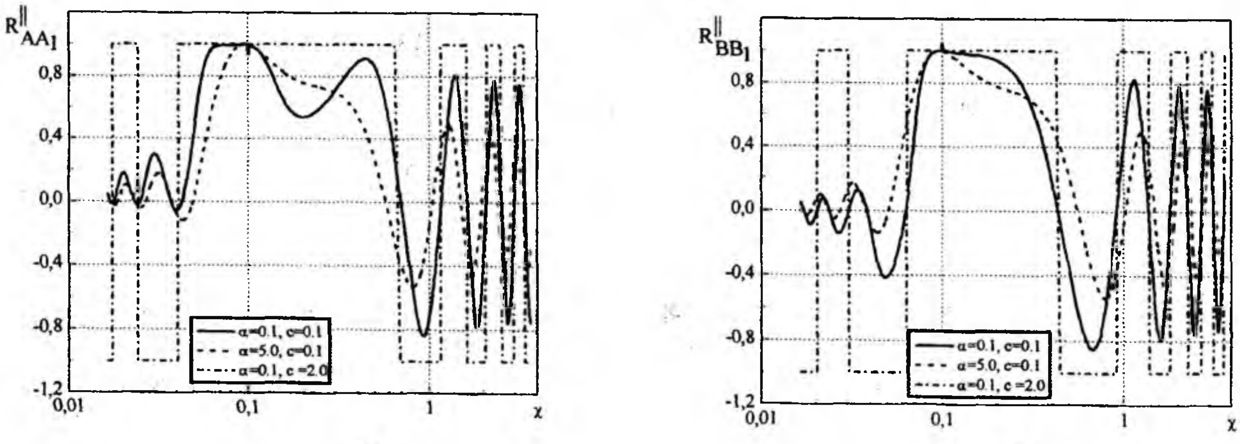


Рис. 3

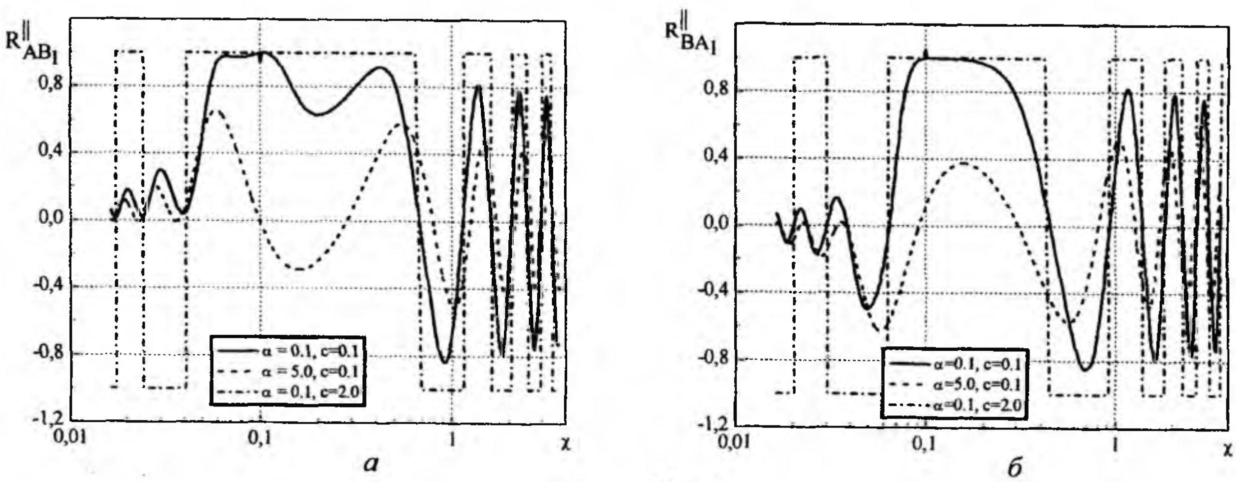


Рис. 4

Коэффициент корреляции комплексного поля определятся соотношением (30).

При $c \gg 1$, как показано в приложении (П.30), с точностью до членов $1/c^2$ имеем

$$T_1^{(1),(2)}(c,\zeta,\zeta_1)=\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\sin\zeta\cdot\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}.$$

Тогда для функции $K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)$ получим

$$K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\pm\alpha}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\sin\zeta\cdot\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}. \quad (35)$$

При этом продольные КФ и ВКФ компонент флуктуаций поля на фокальной оси принимают вид

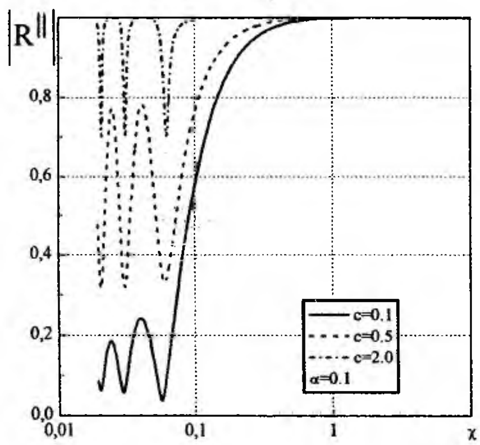
$$K^{\|}_{AA_1,BB_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\alpha}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\sin\zeta\cdot\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}\times$$
$$\times\left\{\cos\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)-(\zeta-\zeta_1)\right)\right]\mp\cos\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)+(\zeta-\zeta_1)\right)\right]\right\}, \quad (36)$$

$$K^{\|}_{AB_1,BA_1}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\alpha}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\sin\zeta\cdot\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}\times$$
$$\times\left\{\pm\sin\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)-(\zeta-\zeta_1)\right)\right]+\sin\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)-(\zeta+\zeta_1)\right)\right]\right\}. \quad (37)$$

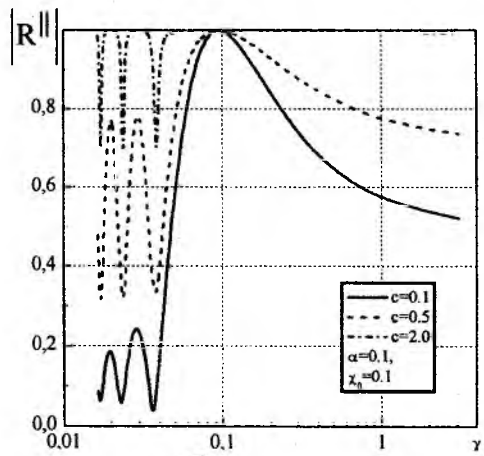
Коэффициент корреляции комплексного поля

$$R^{\|}(\zeta,\zeta_1)=e^{i\left[(\zeta-\zeta_1)-b(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1))\right]}sign\left(\frac{\sin\zeta\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}\right). \quad (38)$$

Представленные на рис. 3 и 4 кривые (сплошные и штрих-пунктирные) коэффициентов корреляции и взаимных коэффициентов корреляции флуктуаций компонент поля (реальных и мнимых частей его) иллюстрируют влияние величины радиуса корреляции флуктуаций фазы на их характер. При малых радиусах корреляции компоненты поля по мере приближения одной из точек к апертуре быстро уменьшается (сплошные кривые). С ростом радиуса корреляции корреляционная и взаимная корреляционная связь между флуктуациями реальных и мнимых компонент поля быстро растет (штрих-пунктирные кривые). Такая же закономерность имеет место и для коэффициента корреляции флуктуаций комплексного поля (рис.5). На рис. 5, *а*, *б* приведены кривые продольного коэффициента корреляции для синфазной апертуры (рис. 5, *а*) и апертуры, сфокусированной в точку с координатой $\chi_0=0.1$ (рис. 5, *б*).



а



б

Рис. 5

Видно, что с ростом радиуса корреляции флуктуаций фазы коэффициент корреляции быстро стремится к единице.

3. Корреляция амплитуд и фаз поля

3.1. Общие соотношения

При изучении этого вопроса ограничимся случаем малых фазовых флуктуаций в апертуре ($\alpha \ll 1$). При этом флуктуации амплитуды δP и фазы $\delta\Psi$ комплексного поля сфокусированной в зону Френеля круглой апертуры описываются следующими выражениями [2]:

$$\delta P(\zeta,\psi,\varphi) = \cos\Psi_0 \operatorname{Re}(\delta E) + \sin\Psi_0 \operatorname{Im}(\delta E),$$

$$\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi) = \frac{1}{\left|E_0(\psi,\zeta)\right|}\left[\cos\Psi_0 \operatorname{Im}(\delta E) - \sin\Psi_0 \operatorname{Re}(\delta E)\right],$$

где величины с нижним нулевым индексом относятся к случаю, когда флуктуации отсутствуют. (Здесь $\Psi_0 = \Psi_0^{(0)} - b\chi(\zeta)$, где $\Psi_0^{(0)}$ фаза поля в отсутствие флуктуаций на апертуре без учета множителя $\exp\left[-ib\chi(\zeta)\right]$).

Введем величины $C^{(0)}(\zeta,\psi) = \operatorname{Re} E_0(\zeta,\psi)$, $D^{(0)}(\zeta,\psi) = \operatorname{Im} E_0(\zeta,\psi)$ и учтем, что $\cos\Psi_0 = C^{(0)}(\zeta,\psi)/\left|E_0(\zeta,\psi)\right|$, $\sin\Psi_0 = D^{(0)}(\zeta,\psi)/\left|E_0(\zeta,\psi)\right|$. Тогда, принимая во внимание обозначения (4), получим

$$\delta P(\zeta,\psi,\varphi) = \left[C^{(0)}(\zeta,\psi)A(\zeta,\psi,\varphi) + D^{(0)}(\zeta,\psi)B(\zeta,\psi,\varphi)\right] \Big/ \left|E_0(\zeta,\psi)\right|,$$

$$\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi) = \left[C^{(0)}(\zeta,\psi)B(\zeta,\psi,\varphi) - D^{(0)}(\zeta,\psi)A(\zeta,\psi,\varphi)\right] \Big/ \left|E_0(\zeta,\psi)\right|^2.$$

Корреляционные функции флуктуаций амплитуды K_{PP_1}, фазы $K_{\Psi\Psi_1}$ и их взаимные корреляционные функции запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} K_{PP_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) \\ \left|E_0(\zeta,\psi)\right|\left|E_{01}(\zeta_1,\psi_1)\right| K_{\Psi\Psi_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) \end{array}\right\} = \frac{1}{\left|E_0(\zeta,\psi)\right|\left|E_0(\zeta_1,\psi_1)\right|} \times$$
$$\times\left[C^{(0)}C_1^{(0)}K_{AA_1,BB_1} + D^{(0)}D_1^{(0)}K_{BB_1,AA} \pm C^{(0)}D_1^{(0)}K_{AB_1,BA_1} \pm D^{(0)}C_1^{(0)}K_{BA_1,AB_1}\right], \tag{39}$$

$$K_{P\Psi_1,\Psi P_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{1}{\left|E_0(\zeta,\psi)\right|\left|E_0(\zeta_1,\psi_1)\right|^2} \times$$
$$\times\left[C^{(0)}C_1^{(0)}K_{AB_1,BA_1} - D^{(0)}D_1^{(0)}K_{BA_1,AB_1} \mp C^{(0)}D_1^{(0)}K_{AA_1,BB_1} \pm D^{(0)}C_1^{(0)}K_{BB_1,AA_1}\right], \tag{40}$$

где K_{AA_1,BB_1} и K_{AB_1,BA_1} определены в (16) и (17).

Следует отметить, что выражения (39), (40) при $\zeta_1 = \zeta$, $\psi_1 = \psi$ преобразуются в полученные ранее выражения [4] для дисперсий амплитуды и фазы поля $\sigma_P^2(\zeta,\psi)$, $\sigma_\Psi^2(\zeta,\psi)$.

Нормированные корреляционные функции R_{PP_1}, $R_{\Psi\Psi_1}$, $R_{P\Psi_1}$, $R_{\Psi P_1}$ определяются соотношениями:

$$R_{PP_1,\Psi\Psi_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_{PP_1,\Psi\Psi_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_{P,\Psi}(\zeta,\psi)\sigma_{P_1,\Psi_1}(\zeta_1,\psi_1)}, \tag{41}$$

$$R_{P\Psi_1,\Psi P_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{K_{P\Psi_1,\Psi P_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_{P,\Psi}(\zeta,\psi)\sigma_{\Psi_1,P_1}(\zeta_1,\psi_1)}. \qquad (42)$$

Формулы (43), (44) и (16), (17) позволяют рассчитать корреляционные характеристики флуктуаций амплитуды и фазы поля для круглой апертуры, сфокусированной в зону Френеля при малых фазовых флуктуаций поля возбуждения с произвольными значениями радиуса корреляции c. Рассмотрим два частных случая.

3.2. Корреляция амплитуд и фаз поля на фокальной оси

Для точек на фокальной оси $\psi=\psi_1=0$. В этом случае

$$E_0(\zeta,0)=\frac{e^{-i(a\chi-\zeta)}}{\chi(\zeta)}\frac{\sin\zeta}{\zeta}, \qquad P_0(\zeta,0)=\left|E_0(\zeta,0)\right|=\frac{1}{\chi(\zeta)}\left|\frac{\sin\zeta}{\zeta}\right|,$$

$$\Psi_0(\zeta,0)=\arg\left(\frac{\sin\zeta}{\zeta}\right)-\left[b\chi(\zeta)-\zeta\right]=\Psi_0^{(0)}(\zeta)-\left[b\chi(\zeta)-\zeta\right], \qquad (43)$$

где $\Psi_0^{(0)}(\zeta)$ равна 0 или π.

Из общих соотношений (39)-(42) тогда имеем:

$$\left.\begin{array}{l} K_{PP_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1) \\ P_0(\zeta)P_0(\zeta_1)K_{\Psi\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)-\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Re}K_1^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)\pm\right.$$
$$\pm\cos\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)+\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Re}K_2^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)+ \qquad , \qquad (44)$$
$$+\sin\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)-\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Im}K_1^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)\pm$$
$$\left.\pm\sin\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)+\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Im}K_2^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{P\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)P_0(\zeta_1) \\ K_{\Psi P_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)P_0(\zeta)\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)-\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Re}K_1^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)\mp\right.$$
$$\mp\sin\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)+\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Re}K_2^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)- \qquad , \qquad (45)$$
$$-\cos\left[b\left(\chi(\zeta)-\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)-\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Im}K_1^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)+$$
$$\left.\mp\cos\left[b\left(\chi(\zeta)+\chi(\zeta_1)\right)+\left(\Psi_0^{(0)}(\zeta)+\Psi_0^{(0)}(\zeta_1)\right)\right]\operatorname{Im}K_2^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)\right\}$$

где $K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)$ с точностью до первой степени α определены в (31).

Чтобы выяснить зависимость корреляционных и взаимных корреляционных функций флуктуаций амплитуды и фазы от радиуса корреляции флуктуаций фазы на апертуре рассмотрим два случая.

Радиусы корреляции малы $(c \ll 1)$.

Используя (32) для $K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)$, имеем

$$K_{PP_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\alpha c^2}{2\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)}\left[\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1}-\frac{\sin(\zeta+\zeta_1)}{\zeta+\zeta_1}\right]\operatorname{sign}\left(\frac{\sin\zeta\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}\right), \qquad (46)$$

$$K_{\Psi\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\alpha c^2}{2}\left[\frac{\sin(\zeta-\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1}+\frac{\sin(\zeta+\zeta_1)}{\zeta+\zeta_1}\right]\left(\frac{\zeta\zeta_1}{\sin\zeta\sin\zeta_1}\right), \qquad (47)$$

$$K_{P\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=K_{\Psi P_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=0. \qquad (48)$$

Согласно (48) флуктуации амплитуды и фазы с точностью до величин первого порядка малости по α не коррелированны.

Радиусы корреляции велики $(c \gg 1)$.

В этом случае с учетом (35) для $K_{1,2}^{(0)\|}(\zeta,\zeta_1)$ получим

$$K_{PP_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=\alpha\cdot O\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad K_{\Psi\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=\alpha\left(1-\frac{1}{c^2}\right), \qquad (49)$$

$$K_{P\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=K_{\Psi P_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=0. \qquad (50)$$

Соответственно коэффициенты корреляции и взаимные коэффициенты корреляции имеют вид:

при $c \ll 1$

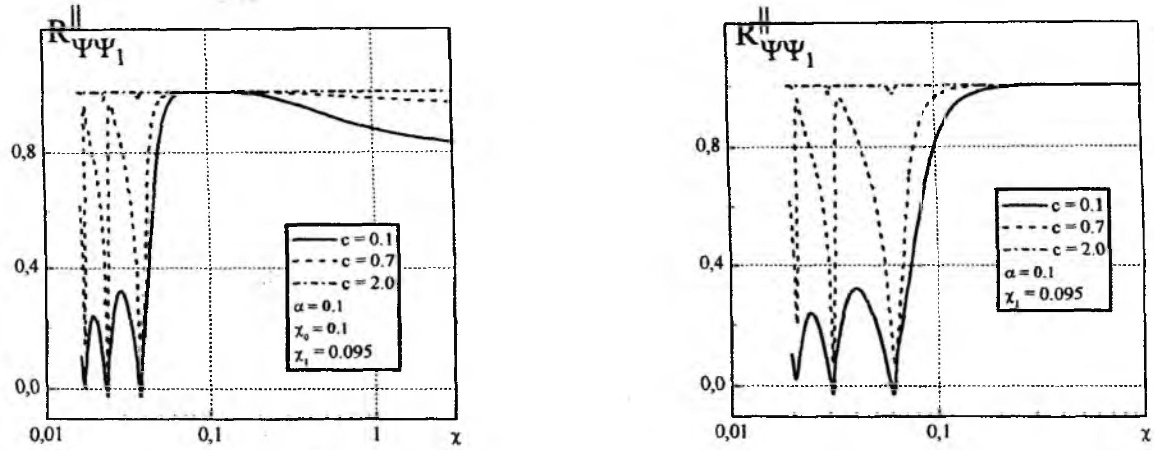
$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{R_{PP_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)}{\operatorname{sign}(\sin\zeta\sin\zeta_1/\zeta\zeta_1)}\\ R_{\Psi\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)\end{array}\right\}=\frac{\left[\sin(\zeta-\zeta_1)/(\zeta-\zeta_1)\mp\sin(\zeta+\zeta_1)/(\zeta+\zeta_1)\right]}{\sqrt{1\mp\sin 2\zeta/2\zeta}\sqrt{1\mp\sin 2\zeta_1/2\zeta_1}}, \qquad (51)$$

при $c \gg 1$

$$R_{PP_1,\Psi\Psi_1}^{\|}(\zeta,\zeta_1)=\operatorname{sign}(\sin\zeta\sin\zeta_1/\zeta\zeta_1). \qquad (52)$$

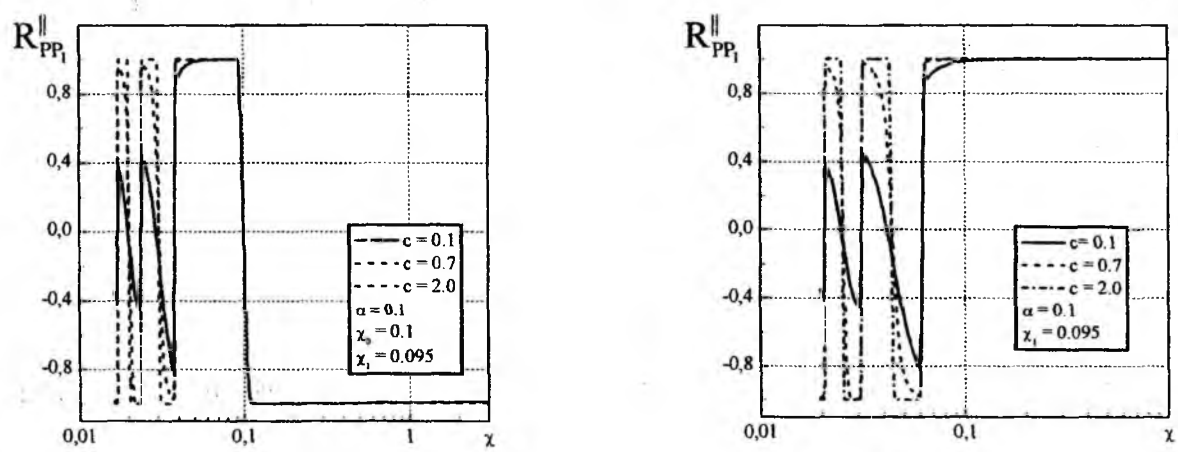
Из соотношений (47), (48) следует, что с ростом радиуса корреляции фазы поля на апертуре коэффициенты корреляции флуктуаций фазы и амплитуды поля возрастают до единицы. Однако при этом флуктуации амплитуды уменьшаются (их дисперсия стремится к нулю) в то время как дисперсия фазы стремится к величине α. Это хорошо видно на рис. 6 и 7, на которых приведены графики коэффициентов корреляции амплитуды и фазы на фокальной оси сфокусированной (рис.6, *а*, 7, *а*) и синфазной (рис.6, *б*, 7, *б*) апертур для различных значений радиусов корреляции.

Из сравнения рис.6, *а*, 7, *а* и рис. 6, *б*, 7, *б* видно также, что протяженность области коррелированности амплитуды и фазы на фокальной оси для сфокусированных апертур больше. Её ближняя граница с уменьшением фокусного расстояния приближается к апертуре, в то время как дальняя остается на бесконечности.



а *б*

Рис. 6



а *б*

Рис. 7

Заключение

Получены корреляционные и взаимные корреляционные функции компонент флуктуаций комплексного поля, а также корреляционные и взаимные корреляционные функции амплитуды и фазы поля в зоне Френеля круглой сфокусированной апертуры при наличии флуктуаций фазы поля на апертуре. Полученные результаты необходимы при оценке уровня поля вне фокального пятна. Проанализированы частные случаи, для которых получены в явном и достаточно простом виде корреляционные и взаимные корреляционные функции, позволившие выяснить влияние статистических параметров флуктуаций фазы поля на апертуре – дисперсии и радиуса корреляции, на характер корреляционных связей компонент поля, а также амплитуды и фазы его.

Приложение

П. Вычисление функций $T_n^{(1),(2)}(c,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$

П.1 Общие выражения

Исходные выражения для $T_n^{(1),(2)}(c,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$ имеют вид:

$$T^{(1),(2)}\left(c_n,\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1\right)=\int\limits_S\int\limits_{S'} e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2\left(\zeta u^2\mp\zeta_1 u_1^2\right)} J^{(1),(2)}\left(u,u_1,\psi,\varphi,\psi_1,\varphi_1\right)uu_1 du du_1, \quad (\text{П.1})$$

где $c_n = c/\sqrt{n}$ и

$$J^{(1),(2)}\left(u,u_1,\psi,\varphi,\psi_1,\varphi_1\right)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{2uu_1}{c_n^2}\cos\left(\varphi'-\varphi_1'\right)} e^{i\left[u\psi\cos(\varphi-\varphi')\mp u_1\psi_1\cos(\varphi_1-\varphi_1')\right]}d\varphi' d\varphi_1' . \quad (\text{П.2})$$

Введем ряд переменных: $\eta'=\varphi-\varphi'$, $\eta_1'=\varphi-\varphi_1'$, $\theta=\varphi_1'-\varphi'$, $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi$, и заметим, что $\eta_1'-\eta_1=\theta+\Delta\varphi$.

С учётом новых переменных экспоненциальные множители в (П.2) запишутся следующим образом:

$$e^{\frac{2uu_1}{c_n^2}\cos(\varphi'-\varphi_1')}=e^{x\cos\theta}, \qquad e^{i\psi u\cos(\varphi-\varphi')}=e^{iy\cos\eta'}, \qquad e^{\mp i\psi_1 u_1\cos(\varphi_1-\varphi_1')}=e^{\mp iy_1\cos\eta_1'} .$$

Воспользуемся формулами Якоби-Ангера для производящих функций [5]:

$$e^{\mp iz\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\mp i)^n e^{in\varphi}J_n(z), \qquad e^{z\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}I_n(z) . \quad (\text{П.3})$$

где $J_n(z)$ и $I_n(z)$ – функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя n-го порядка соответственно.

С учетом (П.3) и введенных обозначений будем иметь:

$$e^{i\psi u\cos\eta'}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^n J_n(\psi u), \; e^{\mp i\psi_1 u_1\cos\eta_1'}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\mp 1)^n i^n e^{in\eta_1'}J_n(\psi_1 u_1),$$

$$e^{i\left[\psi u\cos(\varphi-\varphi_1')\mp\psi_1 u_1\cos(\varphi_1-\varphi_1')\right]}=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(\mp 1)^n i^{n+m}e^{i(n\eta'+m\eta_1')}J_n(\psi u)J_m(\psi_1 u_1),$$

$$e^{\frac{2uu_1}{c_n^2}\cos(\varphi'-\varphi_1')}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\theta}I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right).$$

Тогда (П.2) принимает вид

$$J^{(1),(2)}\left(u,u_1,\psi,\varphi,\psi_1,\varphi_1\right)=\sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty}(\mp 1)^m i^{n+m}I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_n(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{ik\theta}e^{i(n\eta'+m\eta_1')}d\eta' d\eta_1' \quad (\text{П.4})$$

Интегрирование по η' и η_1' дает следующий результат:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{ik\theta}e^{i(m\eta'+m\eta_1')}d\eta' d\eta_1'=4\pi^2\delta_{n,k}\delta_{n,(-m)}, \quad (\text{П.5})$$

где $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера.

Подставив (П.5) в (П.6), после ряда преобразований получим:

$$J^{(1),(2)}\left(u,u_1,\psi,\psi_1,\Delta\varphi\right)=4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(2-\delta_{0m}\right)(\mp 1)^m\cos(m\Delta\varphi)I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1), \quad (\text{П.6})$$

и имеем для $T_n^{(1),(2)}\left(c,u,u_1,\psi,\psi_1,\Delta\varphi\right)$ соответственно

$$T_n^{(1),(2)}\left(c,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi\right)=4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(2-\delta_{0m}\right)\left(\mp 1\right)^m\cos\left(m\Delta\varphi\right)\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}e^{i2\left(\zeta u^2\mp\zeta_1 u_1^2\right)}I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m\left(\psi u\right)J_m\left(\psi_1 u_1\right)uu_1 du du_1. \qquad (П.7)$$

П.2 Асимптотические выражения для $T_n^{(1),(2)}\left(c,\psi,\psi_1,\Delta\varphi\right)$ при $c<<1$ и $c>>1$

При произвольных c из (П.7), полагая $\zeta=\zeta_1=0$ и опуская нулевые значения из перечня аргументов, имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=4\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm 1)^m\cos(m\Delta\varphi)S_m\left(c_n,\psi,\psi_1\right) \quad . \qquad (П.8)$$

где

$$S_m\left(c_n,\psi,\psi_1\right)=\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}I_m(\frac{2uu_1}{c_n^2})J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)uu_1 du du_1$$

Рассмотрим случай $c<<1$. Введем следующие обозначения:

$$f_m(u,u_1)=e^{-\frac{2uu_1}{c_n^2}}I_m(\frac{2uu_1}{c_n^2})J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)uu_1,\ s(u_1)=-(u-u_1)^2$$

Тогда $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ в (П.8) примет вид:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\int_0^1\int_0^1 e^{\frac{s(u_1)}{c_n^2}}f_m(u,u_1)du_1 du \qquad (П.9)$$

Внутренний интеграл по u_1 в (П.9) является интегралом Лапласа и для вычисления его асимптотического (при $c\to 0$) значения воспользуемся следующим разложением [6]:

$$\int_0^1 e^{\frac{s(u_1)}{c_n^2}}f_m(u,u_1)du_1\approx e^{\frac{s(u=u_1)}{c_n^2}}\sum_{k=0}^{\infty}b_k c^{2(k+\frac{1}{2})},$$

где

$$b_k=\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2k)!}(\frac{d}{du_1})^k\{f_m(u_1,u)[\frac{2(s(u_1=u)-S(u_1,u))}{(u_1-u)^2}]^{-k-\frac{1}{2}}\}\Big|_{u_1=u}.$$

и ограничимся в нем главным членом. Тогда для (П.9) имеем:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=c_n\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-\frac{2u^2}{c_n^2}}I_m(\frac{2u^2}{c_n^2})J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u)u^2 du.$$

При вычислении интеграла при $c\to 0$, используем асимптотическое разложение $\exp\left(-2u^2/c_n^2\right)I_m\left(-2u^2/c_n^2\right)$ при больших значениях аргумента [3] и, ограничившись в нем членами первого порядка малости по c_n, для $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ имеем:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\frac{c_n^2}{2}\frac{\psi J_{m+1}(\psi)J_m(\psi_1)-\psi_1 J_m(\psi)J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2-\psi_1^2}. \qquad (П.10)$$

Подставив (П.10) в (П.8) получим окончательное выражение при $c<<1$

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=2c_n^2\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm 1)^m\cos(m\Delta\phi)\frac{\psi J_{m+1}(\psi u)J_m(\psi_1)-\psi J_m(\psi)J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2-\psi_1^2}. \quad (П.11)$$

Рассмотрим теперь случай $c>>1$. Для получения асимптотического выражения для $T_n^{(1),(2)}(c,0,\psi,0,\psi_1,\Delta\varphi)$ при $c>>1$ воспользуемся разложением $I_m\left(2uu_1/c_n^2\right)$ [6]:

$$I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\frac{u^{2k+m}u_1^{m+2k}}{c_n^{2(m+2k)}}.$$

Тогда $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ в (П.8) запишется в следующем виде:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\frac{1}{c_n^{2(m+2k)}}\cdot\left\{\int_0^1 e^{-\frac{u^2}{c_n^2}}u^{m+2k}J_m(\psi u)udu\int_0^1 e^{-\frac{u_1^2}{c_n^2}}u_1^{m+2k}J_m(\psi_1u_1)u_1du_1\right\}$$

Интегралы в фигурных скобках после разложения $\exp(u^2/c_n^2)$ в степенной ряд сводятся к сумме стандартных интегралов от произведения степенной и бесселевой функций [5]. Опуская простые, но громоздкие преобразования, получим

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\frac{1}{c_n^{2(m+2k)}}F_{m,k}(\psi)F_{m,k}(\psi_1), \quad (П.12)$$

где

$$F_{m,k}(\psi)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(m+p+k)!(p+k)!}{p!c_n^{2p}}\sum_{t=0}^{p+k}(-1)^t\frac{(m+2t+1)}{(m+p+k+t)!(p+k-t)!}\frac{J_{m+2t+1}(\psi)}{\psi}. \quad (П.13)$$

Из выражений (П.12) и (П.13) видно, что если ограничиваться членами не выше второго порядка малости по $(1/c_n)$, то необходимо найти только $S_0(c_n,\psi,\psi_1)$ и $S_1(c_n,\psi,\psi_1)$. Соответствующие выражения имеют вид

$$S_0(c_n,\psi,\psi_1)=\frac{J_1(\psi)J_1(\psi_1)}{\psi\psi_1}\left\{1-\frac{1}{c_n^2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)}-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)}\right]\right\}, \quad (П.14)$$

$$S_1(c_n,\psi,\psi_1)=\frac{1}{c_n^2}\frac{J_2(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi\psi_1}. \quad (П.15)$$

Выражения (П.8), (П.14) и (П.15) позволяют получить в явном виде $T_n^{(1),(2)}$ при $c>>1$.

$$T_n^{(1),(2)}(c,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=4\left\{\frac{J_1(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi\psi_1}\left[1-\frac{1}{c_n^2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)}-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)}\right)\right]\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{2}{c_n^2}\cos(\Delta\varphi)\frac{J_2(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi-\psi_1}\right\}. \quad (П.16)$$

П.3. Асимптотические выражения для $T_n^{(1),(2)}(c,\zeta,\zeta_1)$ при $c<<1$ и $c>>1$

Полагая в (П.7) $\psi=\psi_1=0$ и учитывая, что отличным от нуля будет только слагаемое с $m=0$ имеем:

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\zeta_1)=4\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}e^{i2(\zeta u^2\mp\zeta_1u_1^2)}I_0\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)uu_1dudu_1 \quad (П.17)$$

Пусть радиусы корреляции малы ($c<<1$). При вычислении двойного интеграла воспользуемся тем, что при $c<<1$ наибольший вклад в значение интеграла дает область малых u. Поэтому замена во внутреннем интеграле верхнего предела на бесконечность не внесет значительной ошибки. Выполнив интегрирование, после некоторых преобразований получим:

$$T_n^{(1)}(c_n,\zeta,\zeta_1)=\frac{c_n^2}{2}\frac{2\zeta\zeta_1c_n^2+i(\zeta-\zeta_1)}{4\zeta^2\zeta_1^2c_n^4+(\zeta-\zeta_1)^2}[1-\frac{1}{2}\exp[-\frac{4\zeta_1^2c_n^2}{1+4\zeta_1^2c_n^4}+i2(\zeta-\frac{\zeta_1}{1+4\zeta_1^2c_n^4})]-$$

$$-\frac{1}{2}\exp[-\frac{4\zeta^2c_n^2}{1+4\zeta^2c_n^4}-i2(\zeta_1-\frac{\zeta}{1+4\zeta^2c_n^4})]]$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости по c_n , окончательно имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\zeta_{1,})=c_n^2e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}\frac{\sin(\zeta\mp\zeta_1)}{\zeta\mp\zeta_1}\ . \qquad (\Pi.18)$$

Теперь рассмотрим случай $c>>1$. В этом случае при вычислении двойного интеграла используем следующее разложение для $I_0\left(2uu_1/c_n^2\right)$:

$$I_0(\frac{2uu_1}{c_n^2})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\frac{u^{2k}u_1^{2k}}{c_n^{4k}}\ .$$

Тогда двойной интеграл приводится к виду

$$S_0^{(0)}(c_n,\zeta,\zeta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\frac{1}{c_n^{4k}}\left[\int_0^1 e^{i(2\zeta-\frac{1}{c_n^2})u^2}u^{2k+1}du\right]\left[\int_0^1 e^{-(i2\zeta_1+\frac{1}{c_n^2})u_1^2}u_1^{2k+1}du_1\right].$$

Выполнив интегрирование по u и u_1, после некоторых преобразований получим:

$$S_0^{(0)}(c_n,\zeta,\zeta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4c_n^{4k}}\frac{[(4\zeta\zeta_1+\frac{1}{c_n^4})+\frac{2}{c_n^2}(\zeta-\zeta_1)]^{k+1}}{[(4\zeta\zeta_1+\frac{1}{c_n^4})^2+\frac{2}{c_n^4}(\zeta-\zeta_1)^2]^{k+1}}e^{i2(\zeta-\zeta_1)}\times$$

$$\times[e^{i2\zeta}-e^{-\frac{1}{c_n^2}}\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p}{p!}(i2\zeta-\frac{1}{c_n^2})^p][e^{i2\zeta_1}-e^{-\frac{1}{c_n^2}}\sum_{q=0}^{k}\frac{(-1)^q}{q!}(i2\zeta_1-\frac{1}{c_n^2})^q] \qquad (\Pi.19)$$

Как показали расчеты, это выражение дает погрешность менее 1% при $k=30$ для $c\geq 0.2$. Если $c\geq 1.0$, то достаточно в сумме по k брать не более двух слагаемых.

Ограничиваясь членами второго порядка малости по (c^{-1}), из (П.19) получим, опустив громоздкие вычисления, для $T_n^{(1)}(c,\zeta,0,\zeta_{1,}0)$

$$T_n^{(1)}(c_n,\zeta,\zeta_1)\approx\frac{\sin\zeta\sin\zeta_1}{\zeta\zeta_1}e^{i(\zeta\mp\zeta_1)}\left(1-\frac{1}{c_n^2}\right). \qquad (\Pi.20)$$

Список литературы 1. *Должиков, В.В.* Корреляционные характеристики поля на фокальной сфере круглой сфокусированной апертуры // Радиотехника : Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2011. – Вып. 129. – С. 35 – 43. 2. *Шифрин, Я.С.* Вопросы статистической теории антенн. – М. : Сов. радио, 1970. Y.S. Shifrin. Statistical Antenna Theory. Golem Press, 1971, 370 p. 3. *Абрамовиц, А., Стиган, И.* Справочник по специальным функциям. – М. : Наука, 1979. 4. *Шифрин,Я.С., Должиков,В.В.* Статистика поля антенны с круглой апертурой сфокусированной в зону Френеля. Ч. 2. Флуктуационные характеристики поля // Электромагнитные волны и электронные системы: – 2010. – Т.15. № 10. – С. 6-23. 5. *Ватсон,Г.Н.* Теория бесселевых функций. – М. : ИЛ, 1949. 6. *Федорюк, М.В.* Метод перевала. – М. : Наука, 1977.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.05.2012