УДК 519.62

А.Г. Каграманян[1] , Г.Г. Четвериков[2], В.В. Шляхов[3]
[1] ХНУ, г. Харьков, Украина
[2,3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, chetvergg@gmail.com

МУЛЬТИАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НОСИТЕЛЯ. СООБЩЕНИЕ 1

Известно, что любое n-арное отношение индуцирует процедуру факторизации на своем носителе. Это происходит в силу того, что некоторые элементы носителя отношением “нераспознаются”. Таким образом возникают классы эквивалентностей. Частным случаем *n*-арных отношений являются бинарные и тернарные. Работа посвящена изучению условий, при которых бинарные и тернарные отношения на классах эквивалентностей индуцируют алгебраическую структуру в виде линейного пространства.

ПРЕДИКАТ, ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА, КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Введение

Во многих практических ситуациях множество входных сигналов исследуемого объекта представляет собой некоторую алгебраическую структуру. Объясняется это тем, что, как правило, между элементами этого множества существуют определенные связи, которые можно интерпретировать как алгебраические операции [1]. Как уже говорилось выше, правильное распознавание соответствующей структуры во многом определяет адекватность математической модели в целом [2]. В рамках компараторной идентификации это распознавание должно вестись на языке экспериментально проверяемых свойств отношений или предикатов. В любом объекте совокупность его свойств выступает как структурно организованная система взаимосвязанных элементов, что говорит о многолинейности масштабной деформации. Заметим, что областью определения операторов, в данной статье, является линейное пространство.

Не останавливаясь на экспериментальной части, что выходит за рамки статьи, дадим теоретическое решение данной задачи для такой алгебраической структуры, как линейное пространство над некоторым полем. Подобная структура широко распространена на практике [3-7].

При этом в качестве принципиального основания всякого моделирования, как интуитивного аналогизирования, выступает отношение тождества [7]. Известно, что существует несколько типов отношения тождества в плане его формальных характеристик (например, изоморфизм, гомоморфизм). Предварительным условием классификации моделей по характеру воспроизведения сторон оригинала является выявление типов тождества в плане его содержательных характеристик. По своим содержательным характеристикам тождество модели и оригинала может быть: субстанциональным, функциональным и структурным. Последнее, а именно, конкретный вид алгебраической структуры в виде линейного (гильбертового) пространства и является квинтэссенцией данной статьи.

1. Постановка задачи

Будем предполагать, что система обработки входных сигналов реализует своим поведением четыре предиката, заданных на соответствующей декартовой степени множества M (входные сигналы): один одноместный $P(x)$, один двуместный $E(x,y)$ и два трехместных $S(x,y,z), T(x,y,z)$. Символами x,y,z обозначены входные сигналы системы. Выходными сигналами системы служат элементы 0 и 1, которые являются значениями перечисленных предикатов.

2. Предикатная модель данных в виде линейного пространства

Предикат $P(x)$ формирует классы прообразов коэффициентов, которые могут быть приняты в качестве самих коэффициентов. Предикат $E(x,y)$ — это предикат эквивалентности, заданный на $M \times M$. Он формирует классы прообразов векторов, которые могут быть приняты в качестве самих векторов. Предикат $S(x,y,z)$ задан на P^3, он определяет операцию сложения коэффициентов. Предикат $T(x,y,z)$ задан на $P \times M \times M$, он определяет операцию умножения коэффициентов на вектор. Рассмотрим множество M, на котором заданы отношения $E(x,y)$, $S(x,y,z)$, $P(x)$, $T(x,y,z)$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) $E(x,x)=1;$
2) $E(x,y)=1 \Rightarrow E(y,x)=1;$
3) $E(x,y)=1, E(y,z)=1 \Rightarrow E(x,z)=1;$
4) $\forall x,y \exists\ z : S(x,y,z)=1;$
5) $S(x,y,z)=1, S(x,y,z')=1 \Rightarrow E(z,z')=1;$
6) $S(x,y,z)=1, S(x,y',z)=1 \Rightarrow E(y,y')=1;$

7) $S(x,y,z)=1, S(x',y,z)=1 \Rightarrow E(x,x')=1;$

8) $S(x,y,z)=1 \Rightarrow S(y,x,z)=1;$

9) $S(x,y,z)=1, E(z,z')=1 \Rightarrow S(x,y,z')=1;$

10) $S(x,y,z)=1, E(y,y')=1 \Rightarrow S(x,y',z)=1;$

11) $S(x,y,z)=1, E(x,x')=1 \Rightarrow S(x',y,z)=1;$

12) $S(x,y,z)=1, S(z,t,r)=1, S(y,t,p)=1 \Rightarrow \Rightarrow S(x,p,r)=1;$

13) $\exists 0 : S(x,y,x)=1 \Rightarrow E(y,o)=1;$

14) $\forall x \exists \ (-x) : S(x,-x,y)=1 \Rightarrow E(y,0)=1;$

15) $P(0)=1;$

16) $P(x)=1, P(y)=1, S(x,y,z)=1 \Rightarrow P(z)=1;$

17) $P(x)=1, E(x,y)=1 \Rightarrow P(y)=1;$

18) $\forall x,y \exists \ z : P(x)=1 \Rightarrow T(x,y,z)=1;$

19) $P(x)=0, P(y)=0 \Rightarrow T(x,y,z)=0;$

20) $P(x)=1, P(y)=1, T(x,y,z)=1 \Rightarrow P(z)=1;$

21) $T(x,y,z)=1 \Rightarrow T(x,y,z)=1;$

22) $T(x,y,z)=1, T(x,y,z')=1 \Rightarrow E(z,z')=1;$

23) $T(x,y,z)=1, T(x,y',z)=1 \Rightarrow E(y,y')=1;$

24) $T(x,y,z)=1, T(x',y,z)=1 \Rightarrow E(x,x')=1;$

25) $T(x,y,z)=1, T(z,z')=1 \Rightarrow T(x,y,z')=1;$

26) $T(x,y,z)=1, T(y,y')=1 \Rightarrow T(x,y',z)=1;$

27) $T(x,y,z)=1, T(x,x')=1 \Rightarrow T(x',y,z)=1;$

28) $T(x,y,z)=1, P(x)=1, E(z,0)=1 \Rightarrow E(x,0)=1;$

29) $E(z,0)=1, T(x,y,z)=1 \Rightarrow E(z,0)=1;$

30) $T(x,y,z)=1, P(x)=1, P(y)=1, T(z,p,r)= =1, T(y,p,t)=1 \Rightarrow T(x,t,r)=1;$

31) $T(x,y,z)=1, T(x',y,z')=1, S(x,x',t)=1, P(x)=P(x')=1, S(z,z',p)=1 \Rightarrow T(t,y,p)=1;$

32) $P(x)=1, T(x,y,z)=1, T(x,y',z')=1, S(z,z',t)=1, S(y,y',p)=1 \Rightarrow T(x,p,t)=1;$

$\exists 1 : P(1)=1, T(y,x,x)=1 \Rightarrow E(1,y)=1;$

33) $P(x)=1 \ \exists x^{-1} : T(x,x^{-1},y)=1 \Rightarrow E(1,y)=1;$

34) $\exists \ \{t_i\}_{i-1}^{n} : \forall x \ \ \exists \{y_i(x)\}_{i=1}^{n} :$

а) $P(y_i(x))=1;$ б) $T(y_i(x),t_i,z_i)=1,$

$S(z_1,z_2,r_1)=1, S(z_1,z_3,r_2)=1, \ldots, S(z_{n-2},z_n,r_{n-1})= =1 \Rightarrow E(x,r_{n-1})=1;$

в) $\forall \{h_i,(x)\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющий а) и б) $\Rightarrow E(h_i,y_i(x))=1.$

35) $P(x)=1, P(z)=1, S(x,y,z)=1 \Rightarrow P(y)=1.$

В этом случае множество M разбивается на классы эквивалентности отношением $E(x,y)$. Классы эквивалентности будем обозначать $A, B, C, R, T, \ldots$, а все множество классов N. Тогда, как показано в работе [3], $E(x,y)$ представим в виде

$$E(x,y)=D(Fx,Fy),$$

где D — предикат равенства на $N \times N$, а $F: M \to N$ (причем $Fx = Fy \Leftrightarrow E(x,y)=1$).

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что заданные отношения индуцируют структуру n-мерного линейного пространства на классах эквивалентности.

Утверждение 1. Если на классах эквивалентности ввести операцию (сложения) по правилу $A+B=C$ тогда и только тогда, когда $\forall x,y,z:$

$$x \in A, y \in B, z \in C, S(x,y,z)=1,$$

то определение будет корректным и относительно данной операции N образует абелеву группу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем корректность определения. Выделим произвольным образом два класса эквивалентности $A, B \in N$ и два представителя каждого класса $x \in A, y \in B$. Тогда из свойства 4) вытекает, что найдется $z \in C$, для которого $S(x,y,z)=1$. Это означает, что $A+B=C$ Таким образом, операция определена на любых парах $A, B \in N$, более того, единственным образом. Действительно, пусть $C' \neq C$, и

$$A+B=C, A+B=C'.$$

Тогда для произвольного $z' \in C'$ имеем $S(x,y,z')=1$. С учетом того, что $S(x,y,z)=1$, из свойства 5) получим $E(z,z')=1$ или $z' \in C$. Значит, $C \cap C' \neq \varnothing$, а поскольку различные классы имеют пустое пересечение, то $C \in C'$. Получили противоречие. Теперь покажем, что класс Z не зависит от выбора $x \in A$ и $y \in B$. Допустим, $x, x' \in A$ и $y, y' \in B$. Тогда, так как $S(x,y,z)=1$ и $E(x',x)=1$, то на основании свойства 11) получим $S(x',y,z)=1$. Далее, учитывая свойство 10) и равенство $E(y',y)=1$, будем иметь, что $S(x',y',z)=1$, но это и означает, что операция сложения не зависит от выбора элементов в классах A и B. Следовательно, операция, введенная нами, корректна.

Покажем, что относительно этой операции N образует абелеву группу.

Допустим, $A+B=C$. Тогда для любых $x \in A, y \in B, z \in C$ выполняется $S(x,y,z)=1$. В этом случае из свойства 8) вытекает $S(x,y,z)=1$ или $A+B=C$. Таким образом,

$$A+B=B+A,$$

следовательно, операция коммутативна.

Она также и ассоциативна. Пусть $(A+B)+C=R, A+B=T, B+C=G.$. Тогда для представителей классов выполняются равенства $S(x,y,t)=1, S(y,z,g)=1, S(t,z,r)=1$. С учетом свойства 12) получим $S(x,g,r)=1$. Это означает $A+G=R$ или $A+(B+C)=R$, т.е.

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

значит, операция ассоциативна.

Рассмотрим свойство 13). В нем утверждается, что существует $O\in M$ такой, что для любого x выполняется $S(x,O,x)=1$. Следовательно, $A+O=A$ (O — класс эквивалентности, которому принадлежит O). Причем O — единственен, поскольку, если найдется $O'\neq O$, то для $y\in O'$ получим $S(x,y,z)=1$ и из второй части свойства 13) будет вытекать $E(y,O)=1$, то есть $O'=O$. Таким образом, среди N найдется единственный элемент O, который выполняет роль нуля относительно данной операции.

Наконец, остановимся на существовании обратного элемента. Выберем произвольный класс A и его представитель $x\in A$. Тогда по свойству 14) имеем: найдется $-x$, для которого из $S(x,-x,y)=1$ вытекает $E(y,0)=1$. Пусть $-x\in -A$, тогда $A+(-A)=B$, где $y\in B$, но с учетом $E(y,0)=1$ получим $y\in 0$ или $B=0$. Таким образом,

$$A+(-A)=0\ ,$$

причем $-A$ единственен. Поскольку, если равенство выполняется для какого-то другого класса C, то $S(x,z,0)=1, S(x,-x,y)=1$ и $E(y,0)=1$. Тогда из свойства 9) получим $S(x,-x,0)=1$, а из свойства 6) $-E(-x,z)=1$, т.е. $-x\in C$ или $-A=C$.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Отношение $P(x)$, заданное на M, определяет его подмножество M', являющееся объединением классов эквивалентности, причем множество классов, входящих в M', образуют подгруппу группы всех классов относительно введенной операции сложения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать первую часть утверждения леммы, нужно показать, что для любого класса эквивалентности S выполняется: $A\cap M'$ равно либо пустому множеству, либо A. Действительно, пусть $x\in A$, тогда, если $P(x)=1$ и $E(x,y)=1$, то из свойства 17) вытекает $P(y)=1$, т.е. $A\subset M'$. Если $P(x)=0$, то для любого $y\in A: P(y)=0$, так как в противном случае при $P(y)=1, E(x,y)=1$ из свойства 17) получим $P(x)=1$. Противоречие. Значит, если $P(x)=0$, то $A\cap M'=\varnothing$. Таким образом, $M`=\{x:P(x)=1\}$ является объединением классов эквивалентности. Набор этих классов обозначим через N'. Докажем, что $N'\subset N$ представляет собой подгруппу относительно операции сложения классов. Пусть $A,B\in N'$ и $A+B=C$. $P(x)=1, P(y)=1$ и $S(x,y,z)=1$. Свойство 16) утверждает, что $P(z)=1$, следовательно, $z\in N'$. Значит операция сложения не выводит за пределы N'. Свойство 15), утверждающее, что $P(0)=1$, означает, что $0\in N'$. Остается показать, что обратный элемент принадлежит N'. Для этого рассмотрим $A\in N'$ и $-A$. Допустим $-A$ не принадлежит $N`$. Тогда $P(-x)=0, P(x)=1, P(0)=1$ и $S(x,-x,0)=1$. Но последний набор равенств противоречит свойству 36). Утверждение доказано.

Утверждение 3. Если на классах эквивалентности, принадлежащих N', ввести операцию (умножения) по правилу: $AB=C$, тогда и только тогда, когда $T(x,y,z)=1$, для $\forall x\in A, y\in B, z\in C$, то это определение будет корректным, и относительно данных операций сложения и умножения классы эквивалентности $N`$ образуют поле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Корректность определения введенной операции выясняется следующим образом. Из свойств 18) и 20) вытекает, что для любых $A,B\in N'$ и их произвольных элементов $x\in A$ и $y\in B$ найдется z, для которого $T(x,y,z)=1$ и $P(z)=1$. Следовательно, в силу данного определения операции умножения, существует класс $C\subset N'$, для которого $AB=C$, и $y\in B$. Действительно, пусть для какого-то z' выполняется равенство $T(x,y,z')=1$, но тогда из свойства 22) и равенства $T(x,y,z)=1$ вытекает $E(z,z')=1$, то есть $z'\in C$. С другой стороны, если первоначально мы выбрали $x\neq x'\in A$ и $y\neq y'\in B$, то из равенства $E(x,x')=1, E(y,y')=1$ и $T(x,y,z)=1$ и свойств 26), 27) получим $T(x',y',z)=1$. Таким образом, класс С не зависит от первоначального выбора элементов классов А и В. Следовательно, введенное определение операции умножения корректно. Покажем теперь, что относительно операций сложения и умножения множество классов N' образует поле. Из утверждения 7.2 вытекает, что N' — абелева группа по сложению. Докажем, что по умножению N' — тоже абелева группа. Рассмотрим два произвольных класса $A,B\in N'$ и пусть $AB\in C$. Последнее равенство означает, что $T(x,y,z)=1$ для $x\in A, y\in B, z\in C$, но из свойства 21) в этом случае вытекает $T(x,y,z)=1$, то есть $BA=C$. Значит, операция коммутативна. Из свойства 30) следует ее ассоциативность. Действительно, рассмотрим $(AB)C$ и пусть $AB=R, RC=T$ и $BC=P$. Тогда для представителей этих классов будут выполняться равенства $T(x,y,z)=1, T(r,z,t)=1, T(y,z,p)=1$, но по свойству 30) получим $T(x,p,t)=1$, т.е. $(AB)C=A(BC)$.

Рассмотрим свойство 33). Оно утверждает, что для $\forall x\in A\subset N'$ найдется $x^{-1}\in A^{-1}\subset N'$ такой, что для любого $z\in C$ имеет место $T(x,x^{-1},y)=1$

и $T(y,z,z)=1$. Если $z \in M'$, последние два равенства означают, что $(AA^{-1})C=C$, а $AA^{-1}=B \in N'$ по свойству 20). Покажем, что A^{-1} не зависит от самого класса A Действительно, пусть $x_1 \neq x$ и $x, x_1 \in A$, тогда

$$E(x_1,x)=1, T(x,x^{-1},y)=1, T(x_1,x_1^{-1},y_1)=1, T(y,z,z)= =1, T(y_1,z,z)=1.$$

Из этих равенств на основании свойств 25), 27), 24) получим

$$E(y,y_1)=1, T(x_1,x^{-1},y)=1, T(x_1,x^{-1},y)= =1, T(x_1,x^{-1},y_1)=1$$

и $E(x_1^{-1},x^{-1})=1$, то есть $x_1^{-1} \in A^{-1}$. Допустим, $A_1=A_2$ и $A_1A_1^{-1}=B_1$ и $A_2A_2^{-1}=B_2$. Тогда $T(x_1,x_1^{-1},y_1)=1$, $T(x_2,x_2^{-1},y_2)=1$, и с учетом свойства 32) получим для $\forall z: T(y_1,z,z)=T(y_2,z,z)=1$. Теперь воспользуемся свойством 24), тогда $E(y_1,y_2)=1$, следовательно $B_1=B_2$. Таким образом, для любого $A \subset N': AA^{-1}=B$ не зависит от A и поскольку для $\forall z \in N'$ имеем $(AA^{-1})C=C$, то AA^{-1} играет роль единицы относительно умножения. Поэтому в дальнейшем будем обозначать $AA^{-1}=E$.

Окончательно можем сделать вывод, что относительно операции умножения и сложения множества классов N' образуют группы. Эти операции еще связаны между собой так, что N' является полем. Покажем это. Фактически нами проверены все аксиомы поля, кроме дистрибутивности. А эта аксиома вытекает из свойства 31), так как для произвольных классов $A, A', B, C, C', T, P \subset N'$ из равенств $AB=C, A'B= =C, A+A'=T, C=C=P$ вытекает для их представителей $T(x,y,y)=T(x',y,z')=S(x,x',t)=S(z,z',p)=1$ и из 31) имеем $T(t,y,p)=1$, то есть $TB=P$, следовательно $AB+A'B=(A+A')B$. Значит, дистрибутивность выполняется, что завершает доказательство утверждения.

Суммируем результаты доказанных нами утверждений. Заданные отношения:

1) разбивают исходное множество на классы эквивалентности;

2) эти классы эквивалентности образуют множество N, на котором индуцируется операция сложения и относительно нее множество N является группой;

3) во множестве N может быть выделено подмножество, $N' \subset N$, на котором исходные отношения индуцируют операцию умножения, относительно операций умножения и сложения множество N' является полем.

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему, являющуюся целью настоящего подраздела.

Теорема 1. Множество классов эквивалентности N является конечномерным линейным пространством над полем N' с операцией сложения векторов, определенной в утверждении 1 и с операцией умножения вектора на элемент поля, определенное в утверждении 3.

Доказательство. Для начала заметим, что операция умножения, индуцированная отношением T и введенная нами для элементов поля N', аналогично тому, как это сделано в утверждении 7.3, может быть корректно определена для элементов N, то есть умножение векторов на элементы поля N`. Доказательство этого факта повторяет соответствующие рассуждения в доказательстве утверждения 3. Приступим к доказательству теоремы.

Нами уже показано, что относительно операции сложения множество элементов (в дальнейшем будем называть их векторами, но обозначать большими буквами, так как это классы эквивалентности) N образуют группу. Есть также поле N и операция умножения элементов поля на вектор. Покажем, что эта операция обладает следующими свойствами:

1) если $A \in N', B, C \in N$, то $A(B+C)=AB+AC$;

2) если $A, B \in N', C \in N$, то $(AB)C=A(BC)$;

3) если $A, B \in N', C \in N$, то $(A+B)C=AC+BC$;

4) для $O, E \in N'$ имеет место $OA=O$ и $EA=A$ для произвольного $A \in N$.

Первое из выше перечисленных свойств вытекает из свойства отношений 32), аналогично тому, как это сделано в утверждении 3. Третье свойство и второе по сути дела нами доказаны в утверждении 3, когда речь шла об ассоциативности и дистрибутивности операций сложения и умножения. Остановимся на свойстве 4). То, что $EA=A$ вытекает из свойства отношений 33). Для обоснования второго равенства можно использовать свойство 29), из которого следует: если рассмотреть, $OA=C$, то для элементов будет $y' \in O$ и $S(z,-z,y)=1$ вытекает $E(y',y)=1$, тогда, $T(y',x,t)=1$, то есть $OA=T$ и $E(y,t)=1$ или $T=O$. Значит, $OA=O$.

Таким образом, мы показали, что множество N является линейным пространством над полем N'. Докажем его конечномерность. Она записана в свойстве 34). Из него следует, что найдутся такие элементы $t_1 \in T_1, \ldots, t_n \in T_n$ такие, что для любого $x \in A$ существуют единственные $y_1(x) \in B_1(A), \ldots, y_n(A) \in B_n(A)$, для которых (справа мы будем писать то, что выполняется для классов)

А) $P(y_i)=1$, то есть $B_i(A) \in N$ — элементы поля;

Б) $T(y_i(x),t_i,z_i)=1$, то есть $B_i(A)T_i=Z_i$;
$S(z_1,z_2,r_1)=1$, то есть $C_1+C_2=R_1$ и т.д.;

$S(r_{n-2}, z_n, r_{n-1}) = 1$, т.е. $R_{n-2} + C_n = R_{n-1}$ или $C_1 + C_2 + \ldots + C_n = R_{n-1}$.

Тогда по свойству 35) вытекает, что $E(x, r_{n-1}) = 1$, следовательно, $R_{n-1} = A$. Окончательно получаем разложение по базису $T_1, \ldots, T_n$

$$A = B_1(A)T_1 + \ldots + B_n(A)T_n.$$

Единственность классов $B_i(A)$ (в отличие от элементов $y_i(x)$, о которых говорится в свойстве 35)) вытекает из пункта в) свойства 34). Теорема доказана.

Выводы

Найдена аксиоматика существования мульти-алгебраической системы в виде линейного пространства. Фактически получены необходимые и достаточные условия, выполнение которых для бинарных и тернарных отношений индуцирует структуру линейного пространства, элементами которого являются классы эквивалентности над произвольным полем.

Список литературы:

1. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с. **2.** *Четвериков Г.Г., Дударь З.В., Вечирская И.Д.* Дискретные структуры. – Харьков: НУРЭ, 2015. – 322 с. **3.** *Машталир В.П., Шляхов В.В., Яковлев С.В.* Групповые структуры на фактор-множествах в задачах классификации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №4. – с. 27–42. **4.** *Герасин С.Н., Шляхов В.В.* О внешней и внутренней согласованности произвольных n-арных отношений // Доп. НАН Украины. – 2006. – №1. – с. 77–82. **5.** *Бондаренко Н.Ф., Машталир В.П., Шляхов В.В.* Мультигруппы, индуцируемые произвольным отношением // Доп. НАН Украины. – 2012. – №4. – с. 39-42. **6.** *Каграманян А.Г., Машталир В.П., Шляхов В.В.* Условия существования тернарной мультисистемы с единым носителем // Вісник національного університету. – Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технологі. – 2011. – №960, Вип. 16. – Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна. – с. 148-158. **7.** *Четвериков Г.Г.* Формальні моделі та прицципи побудови універсальних *k*-значних стуктур мовних систем штучного інтелекту // Доповіді НАН Украины – 2001. – №1(41). – с. 76-79.

Поступила в редколлегию 24.10.2016