



ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КОНЕЧНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

ТЕВЯШЕВ А.Д., ГИБКИНА Н.В., СИДОРОВ М.В.

Рассматривается применение метода R -функций в сочетании с методом последовательных приближений для решения задачи расчета плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях. Доказывается сходимость построенного итерационного процесса в норме пространства $W_2^3(\Omega)$ к обобщенному решению исходной задачи. Получены оценки скорости сходимости. Предложенный метод протестирован на модельных областях, полученные приближенные решения сравнены с решениями, полученными другими авторами.

Введение

Актуальность задачи. Изучение законов движения жидкости играет важную роль в развитии техники и естествознания. Исследования в этой области стимулируются потребностями авиации, кораблестроения, теплоэнергетики, геофизики, биологии и пр. За последние десятилетия сфера исследования и применения явлений, связанных с движением жидкости, постоянно расширяется и охватывает ведущие направления промышленности (химические технологии, нефте- и газоразработка, металлургия и т.д.) и ряд естественных наук (биология, физика атмосферы и океана и др.). Во многих практически важных случаях жидкость можно с большой достоверностью считать вязкой несжимаемой ньютоновской средой, и происходящие в ней процессы могут быть промоделированы с помощью уравнений Навье-Стокса [1, 2]. Различные задачи, возникающие при изучении динамики вязкой жидкости, могут быть исследованы теоретическим путем или с помощью физического эксперимента. Однако с развитием ЭВМ все активнее используется математическое моделирование. Существует множество численных методов, применяемых при расчете вязких течений. Литература по этому направлению обширна [3-5 и др.]. В основном эти численные методы используют метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они просты в реализации,

но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых. Точно учесть геометрию области можно воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R -функций, разрабатываемой акад. В.Л. Рвачевым и его учениками [6, 7 и др.]. Задачи гидродинамики решались в работах С.В. Колосовой, К.В. Максименко-Шейко, И.Г. Суворовой, Т.И. Шейко и др. [8-11], однако в основном рассматривались задачи динамики идеальной жидкости или вязкой для случаев, когда можно построить решение за счет удачного выбора координат (осесимметрические течения, течения, обладающие винтовой симметрией, и т.п.). Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования динамики вязкой жидкости на основе метода R -функций является актуальной научной проблемой.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является создание современного и эффективного метода математического моделирования плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных областях неклассической геометрии с кусочно-гладкой границей. Основные результаты по теоретическому обоснованию корректности начально-краевых и краевых задач для уравнений Навье-Стокса получены О.А. Ладыженской [12], Ж.-Л. Лионсом [13], Р. Темаммом [14]. В данной же работе не обсуждается степень строгости, условия применимости используемых уравнений движения жидкости. Они рассматриваются как математические модели, подлежащие численной алгоритмизации. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: разработать и обосновать метод расчета течений Навье-Стокса в односвязных областях в переменной «функция тока»; в целях обоснования эффективности разработанного метода решения задачи расчета течения вязкой жидкости применить его для решения модельных задач при различных числах Рейнольдса.

1. Постановка задачи

Плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в переменных «скорость – давление» описывается известной системой уравнений Навье-Стокса [1, 2]:

$$\nu \Delta V_1 = V_1 \frac{\partial V_1}{\partial X} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - f_1, \quad (1)$$

$$\nu \Delta V_2 = V_1 \frac{\partial V_2}{\partial X} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} - f_2 \quad (2)$$

и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{V} = \{V_1, V_2\}$ – вектор скорости жидкости, p – давление, $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ – вектор массовых сил, ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ – плотность жидкости.

Далее будем рассматривать безразмерные переменные $v_1 = \frac{V_1}{U_0}$, $v_2 = \frac{V_2}{U_0}$, $x = \frac{X}{L}$, $y = \frac{Y}{L}$, где U_0 – характерная скорость, L – характерная длина. В двумерном плоскопараллельном течении уравнение неразрывности (3) интегрируется с помощью функции тока $\psi(x, y)$, определяемой соотношениями

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Тогда, введя завихренность

$$\zeta = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad (5)$$

систему (1) – (3) в случае, когда вектор массовых сил потенциален, можно свести к системе

$$-\Delta \zeta + \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

$$-\Delta \psi = \zeta, \quad (7)$$

где $\text{Re} = \frac{U_0 L}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Система (6) – (7) уже не содержит давление, однако в общем случае не удастся корректно задать граничные условия для завихренности ζ на твердых стенках и при решении задач эти условия приходится задавать приближенно [2]. Этого можно избежать, перейдя к эквивалентному нелинейному уравнению четвертого порядка для функции тока

$$\Delta^2 \psi + \text{Re} \left(\frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (8)$$

Граничные условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор \mathbf{v} . Если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращается нормальная и тангенциальная составляющие скорости (условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки. Таким образом, на границе области течения можно задать значение функции тока ψ и ее нормальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$.

2. Выбор и обоснование метода решения

Рассмотрим плоскую стационарную задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Такое течение может быть описано краевой задачей для одного нелинейного уравнения четвертого порядка относительно функции тока $\psi(x, y)$:

$$\Delta^2 \psi = \text{Re} J(\Delta \psi, \psi) \quad \text{в } \Omega, \quad (9)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Здесь Re – число Рейнольдса;

$$J(\Delta \psi, \psi) = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$\frac{d\tilde{f}}{ds}$, \tilde{g} – некоторые распределения нормальной и касательной составляющих скорости потока соответственно; \mathbf{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Предполагаем, что $\tilde{f} \in W_2^1(\partial\Omega)$, $\tilde{g} \in L_2(\partial\Omega)$.

Для решения задачи (9), (10) построим процесс последовательных приближений.

Обозначим через $u_0(x, y)$ решение следующей задачи:

$$\Delta^2 u_0 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (11)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (12)$$

Задача (11), (12) в сделанных предположениях может быть решена с помощью метода, базирующегося на методе R-функций [15-17], при этом $u_0(x, y) \in W_2^4(\Omega)$.

В задаче (9), (10) сделаем замену $\psi = u_0 + u$, где u – новая неизвестная функция. Это приводит к задаче

$$\Delta^2 u = \text{Re} J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u) \quad \text{в } \Omega, \quad (13)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (14)$$

Последовательные приближения к решению задачи (13), (14) будем строить следующим образом. Пусть начальное приближение $u^{(0)}$ задано. Тогда при известном значении $u^{(k)}$ функции u на k -й итерации следующее $(k+1)$ -е приближение находится как решение линейной задачи

$$\Delta^2 u^{(k+1)} = \text{Re} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \quad \text{в } \Omega, \quad (15)$$

$$u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые свойства якобианов.

Лемма. Пусть $u, v, w \in W_2^1(\Omega)$, тогда

- 1) $J(u, v) = -J(v, u)$;
- 2) $J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2) = J(u_2, v_1 - v_2) + J(u_1 - u_2, v_2)$;
- 3) если $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то $\int_{\Omega} J(u, v) dx dy = 0$;
- 4) если $w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то

$$\int_{\Omega} J(u, v) w dx dy = \int_{\Omega} J(v, w) u dx dy;$$

- 5) если $u \in W_2^1(\Omega)$, $v \in W_2^3(\Omega)$, то

$$\|J(u, v)\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^3(\Omega)}. \quad (17)$$

Доказательство леммы основывается на теоремах вложения [18].

Изучим вопрос сходимости итерационного процесса (15), (16). На каждом шаге этого процесса нужно найти функцию $u^{(k+1)} \in W_2^3(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$. Предположим,

что $\|u^{(j)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq M$ для всех $j=1, 2, \dots, k$.

Выясним, при каких ограничениях на число Рейнольдса Re итерационный процесс (15), (16) будет давать ограниченное в норме $W_2^3(\Omega)$ решение $u^{(k+1)}$. Имеем

$$\|u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq c_1 Re \|J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)})\|_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя неравенство (17), получаем

$$\begin{aligned} \|u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} &\leq c_1 c_2 Re \|\Delta(u_0 + u^{(k)})\|_{W_2^1(\Omega)} \|u_0 + u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \\ &\leq c_1 c_2 Re \left(\|u_0\|_{W_2^3(\Omega)} + \|u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} \right)^2. \end{aligned}$$

Пусть $\|u_0\|_{W_2^3(\Omega)} \leq M_0$, тогда

$$\|u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq c_1 c_2 Re (M_0 + M)^2.$$

Условие ограниченности $\|u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq M$ будет выполнено, если

$$Re \leq \frac{M}{c_1 c_2 (M_0 + M)^2}. \quad (18)$$

Таким образом, при соответствующем выборе начального приближения $u^{(0)}$ и при выполнении условия (18) решение $u^{(k+1)}$ на каждом шаге итерационного процесса (15), (16) ограничено в норме пространства $W_2^3(\Omega)$.

Докажем сходимость последовательности $u^{(k)}$, $k=0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим разности $\delta u^{(k+1)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$. Они удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \Delta^2 \delta u^{(k+1)} &= Re [J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - \\ &- J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)})] \text{ в } \Omega \end{aligned}$$

и краевым условиям

$$\delta u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \delta u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\delta u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} &\leq c_1 Re \|J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - \\ &- J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)})\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Используя свойство 2 из леммы, получаем

$$\begin{aligned} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) - J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), u_0 + u^{(k-1)}) &= \\ = J(\Delta(u_0 + u^{(k-1)}), \delta u^{(k)}) + J(\Delta \delta u^{(k)}, u_0 + u^{(k-1)}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\delta u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} &\leq c_1 c_2 Re \left(\|\Delta(u_0 + u^{(k-1)})\|_{W_2^1(\Omega)} \|\delta u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} + \right. \\ &+ \left. \|\Delta \delta u^{(k)}\|_{W_2^1(\Omega)} \|u_0 + u^{(k-1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \right) \leq \\ &\leq 2c_1 c_2 Re \|u_0 + u^{(k-1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \|\delta u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)}. \quad (19) \end{aligned}$$

В силу ограниченности u_0 и $u^{(k-1)}$ из (19) получаем

$$\|\delta u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq 2c_1 c_2 Re (M_0 + M) \|\delta u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)}.$$

Пусть $2c_1 c_2 Re (M_0 + M) \leq \alpha < 1$, т.е.

$$Re \leq \frac{\alpha}{2c_1 c_2 (M_0 + M)}. \quad (20)$$

Тогда

$$\|\delta u^{(2)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \alpha \|\delta u^{(1)}\|_{W_2^3(\Omega)},$$

$$\|\delta u^{(3)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \alpha \|\delta u^{(2)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \alpha^2 \|\delta u^{(1)}\|_{W_2^3(\Omega)}, \dots$$

$$\|\delta u^{(k+1)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \alpha \|\delta u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \dots \leq \alpha^k \|\delta u^{(1)}\|_{W_2^3(\Omega)}.$$

Далее

$$\|u^{(k+p)} - u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_{W_2^3(\Omega)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| u^{(k+2)} - u^{(k+1)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} + \dots + \left\| u^{(k+p)} - u^{(k+p-1)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} = \\
& = \left\| \delta u^{(k+1)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} + \left\| \delta u^{(k+2)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} + \dots + \left\| \delta u^{(k+p)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \\
& \leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{k+p-1}) \left\| \delta u^{(1)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} \gamma,
\end{aligned} \tag{21}$$

где обозначено $\gamma = \left\| \delta u^{(1)} \right\|_{W_2^3(\Omega)}$. Поскольку $\alpha < 1$, то

$$\left\| u^{(k+p)} - u^{(k)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty, \text{ т.е. последовательность } \{u^{(k)}\}$$

является фундаментальной. В силу полноты пространства $W_2^3(\Omega)$ это означает, что последовательность $\{u^{(k)}\}$ сходится (с геометрической скоростью), т.е. существует функция

$$u^* \in W_2^3(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \text{ такая, что } \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u^*.$$

Устремив в неравенстве (21) $p \rightarrow \infty$, получим оценку для k -го приближения:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\|_{W_2^3(\Omega)} \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \gamma. \tag{22}$$

Проведя сходные рассуждения, можно доказать, что предельная функция u^* удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению (13) и является его единственным ограниченным решением при

$$\text{Re} < \frac{1}{2c_1c_2(M_0 + M)}. \tag{23}$$

Объединяя условия (18), (20) и (23), для числа Рейнольдса получаем оценку

$$\text{Re} < \min \left\{ \frac{M}{c_1c_2(M + M_0)^2}, \frac{\alpha}{2c_1c_2(M + M_0)} \right\}, \tag{24}$$

причем константы c_1, c_2 зависят только от области Ω .

Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема. При достаточно малом числе Рейнольдса Re последовательные приближения, формируемые по схеме (15), (16), сходятся к единственному обобщенному решению $u^* \in W_2^3(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ задачи (13), (14). Условие малости для Re формулируется в виде неравенства (24).

При реализации этого итерационного процесса возникает вопрос, как решать задачу (15), (16)? При известном $u^{(k)}$ задачу (15), (16) можно решить методом Ритца, используя для построения координатной по-

следовательности и описания геометрии области метод R-функций. Задача (15), (16) эквивалентна задаче нахождения в $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ минимума функционала [19]

$$\Pi[u] = \int_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2u \text{Re} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)})] dx dy. \tag{25}$$

Выбирая систему координатных функций $\{\varphi_i\}$, функцию $u^{(k+1)}$, доставляющую минимум функционалу (25), будем искать в виде

$$u_N^{(k+1)} = \sum_{i=1}^N c_i^{(k+1)} \varphi_i. \tag{26}$$

Согласно методу Ритца, задача нахождения коэффициентов $c_i^{(k+1)}$ $i=1, 2, \dots, N$, приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$A \mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k+1)}, \tag{27}$$

где

$$A = [a_{ij}]_{N \times N}, \mathbf{b}^{(k+1)} = [b_i^{(k+1)}]_{N \times 1}, \mathbf{c}^{(k+1)} = [c_i^{(k+1)}]_{N \times 1},$$

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \Delta \varphi_i \Delta \varphi_j dx dy, \tag{28}$$

$$b_i^{(k+1)} = \text{Re} \int_{\Omega} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \varphi_i dx dy =$$

$$= \text{Re} \int_{\Omega} J(u_0 + u^{(k)}, \varphi_i) \Delta(u_0 + u^{(k)}) dx dy. \tag{29}$$

Отметим, что матрица A системы (27) симметрична, не изменяется от итерации к итерации, вычисляется лишь один раз при решении задачи (11), (12) для функции u_0 , а на каждой итерации лишь пересчитывается столбец $\mathbf{b}^{(k+1)}$. Таким образом, на $(k+1)$ -й итерации нужно вычислить лишь N интегралов вида (29).

Из теорем сходимости метода Ритца [19] и теоремы следует, что при числах Рейнольдса, удовлетворяющих соотношению (24), при $N \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$ последовательность $u_0 + u_N^{(k)}$ сходится в $W_2^2(\Omega)$ к функции $u_0 + u^* = \psi^*$, являющейся решением (вообще говоря, обобщенным) задачи (9), (10).

3. Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент был проведен для областей трех типов: прямоугольная, имеющая форму полуэллипса, и трапециевидная. Везде предполагалось, что массовые силы \mathbf{f} потенциальны, т.е. $\text{rot} \mathbf{f} = 0$, а значит, $F(x, y) \equiv 0$. В качестве базисных функций выбирались степенные полиномы, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра, кубические сплайны Шенберга. Сплайны показали большую вычислительную устойчивость и им было отдано предпочтение. Шаг сетки сплайнов выбран $h_x = h_y = 0,1$. При вычислении интегралов в системах Ритца исполь-

зовалась формула Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате $0,1 \times 0,1$. Предполагается, что стенки области твердые, непроницаемые, неподвижные, кроме верхней, которая движется влево со скоростью 1. Итерационный процесс был построен для чисел Рейнольдса $Re = 50, 100, 200, 300, 400$.

Область А. Прямоугольник

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\}.$$

Математическая модель течения имеет вид

$$\Delta^2 \psi = Re \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \text{ в } \Omega, \quad (30)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -1, & y = b; \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = b\}. \end{cases} \quad (31)$$

Итерационный процесс последовательных приближений для задачи (30), (31) строим следующим образом. Задаем начальное приближение $\psi^{(0)}(x, y)$. Его можно задать произвольно или взять решение, сошедшееся при меньших числах Рейнольдса. Итерационный процесс имеет вид

$$\Delta^2 \psi^{(k+1)} = Re \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \psi^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} \right) \right) \text{ в } \Omega, \quad (32)$$

$$\psi^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} = \begin{cases} -1, & y = b; \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = b\}, \end{cases} \quad (33)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Структура решения задачи (32), (33) на каждой итерации имеет вид

$$\psi^{(k+1)}(x, y) = \frac{\omega(x, y)\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y) + \omega_2(x, y)} + \omega^2(x, y)\Phi^{(k+1)}(x, y), \quad (34)$$

где $\Phi^{(k+1)}$ – неопределенная компонента структуры,

$$\omega(x, y) = \left[\frac{1}{a} x(a-x) \right] \wedge_{\alpha} \left[\frac{1}{b} y(b-y) \right];$$

$$\omega_1(x, y) = b - y, \quad \omega_2(x, y) = \left[\frac{1}{a} x(a-x) \right] \wedge_{\alpha} y,$$

\wedge_{α} – знак R-конъюнкции.

Неопределенная компонента $\Phi^{(k+1)}$ в (34) на каждой итерации аппроксимировалась кубическими сплайнами Шенберга [20, 21]:

$$\Phi^{(k+1)}(x, y) = \sum_{i=-1}^{N_x+1} \sum_{j=-1}^{N_y+1} c_{ij}^{(k+1)} B_3 \left(\frac{N_x x}{a} - i \right) B_3 \left(\frac{N_y y}{b} - j \right) = \sum_{i=-1}^{N_x+1} \sum_{j=-1}^{N_y+1} c_{ij}^{(k+1)} \varphi_{ij}(x, y).$$

Условие окончания итерационного процесса выбрано

$$\text{в виде } \left\| \psi^{(k+1)} - \psi^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Вычислительный эксперимент был проведен при $a = b = 1$. Было выбрано $N_x = N_y = 10$, $\varepsilon = 10^{-5}$. На рис. 1 показаны графики сходимости

$$\left\| \psi^{(k+1)} - \psi^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}, \quad \left\| v_x^{(k+1)} - v_x^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left\| v_y^{(k+1)} - v_y^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}, \quad \left\| \zeta^{(k+1)} - \zeta^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}$$

к нулю при $Re = 200$. В таблице приведены координаты “вихревого центра” (точки, в которой скорости равны нулю: $v_x = v_y = 0$), а также соответствующие ему значения функции тока и завихренности в зависимости от числа Рейнольдса.

| Re | Число итераций | $x_{v.c.}$ | $y_{v.c.}$ | $\Psi_{v.c.}$ | $\zeta_{v.c.}$ |
|-----|----------------|------------|------------|---------------|----------------|
| 0 | | 0,5000 | 0,7646 | 0,1001 | 3,3374 |
| 50 | 9 | 0,4230 | 0,7599 | 0,1009 | 3,2379 |
| 100 | 14 | 0,3789 | 0,7417 | 0,1035 | 2,8224 |
| 200 | 20 | 0,3945 | 0,6620 | 0,1093 | 2,5493 |
| 300 | 25 | 0,4206 | 0,6265 | 0,1127 | 2,4887 |
| 400 | 36 | 0,4351 | 0,6163 | 0,1143 | 1,9096 |

Как видно, имеет место сходимость в $W_2^2(\Omega)$, но с ростом порядка производной скорость сходимости уменьшается. С ростом числа Рейнольдса сходимость итерационного процесса замедляется. В качестве начального приближения выбиралось течение Стокса, а также приближения, полученные при меньших числах Рейнольдса. С ростом числа Рейнольдса для повышения устойчивости итерационного процесса использовалась процедура взвешивания двух приближений.

С ростом числа Рейнольдса увеличивается зона циркуляционного течения в центре каверны (растет скорость циркуляционного движения от значения 0,205 при $Re = 0$ до значения 0,349 при $Re = 0$), растут угловые вихри, а при $Re = 300$ появляется третий пристеночный вихрь, вихревой центр смещается ко дну каверны, а ψ_{max} увеличивается.

Область Б. Область, имеющая форму полуэллипса:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid 0 < y < b, b^2 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} (y - b)^2 < \frac{a^2 b^2}{4} \right\}.$$

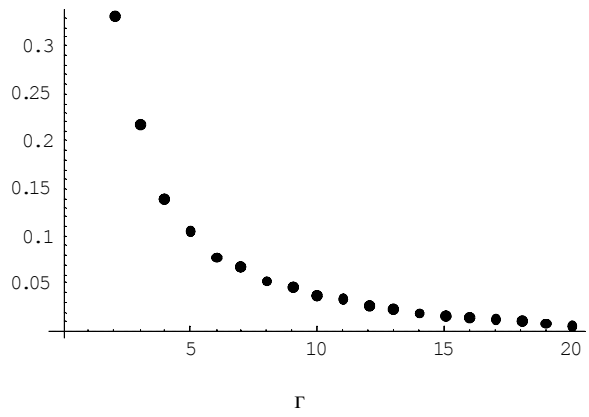
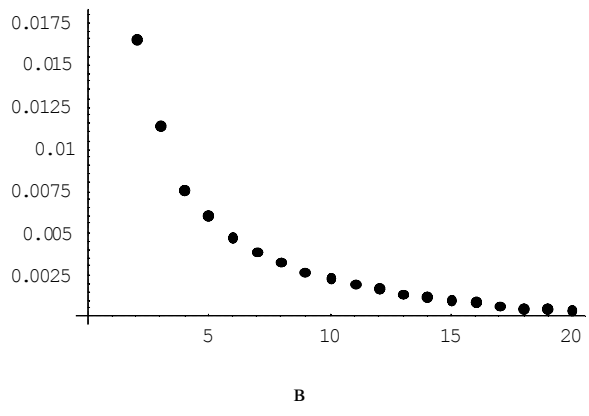
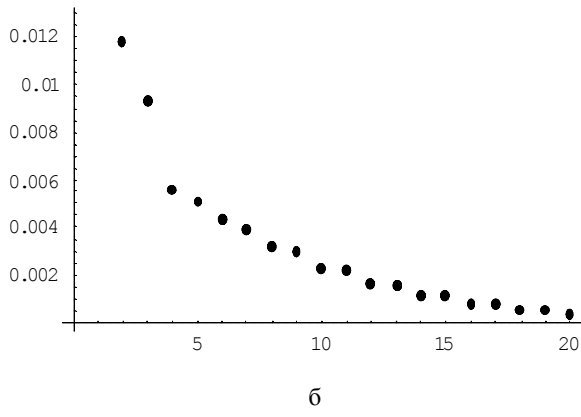
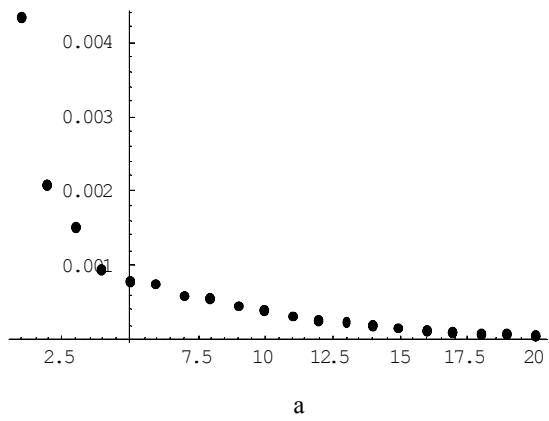


Рис. 1. Графики сходимости к нулю при $Re = 200$:

$$\left\| \Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)} \text{ (а)}, \left\| v_x^{(k+1)} - v_x^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)} \text{ (б)},$$

$$\left\| v_y^{(k+1)} - v_y^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)} \text{ (в)}, \left\| \zeta^{(k+1)} - \zeta^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)} \text{ (г)}$$

Математическая модель течения имеет вид (30), (31). Итерационный процесс последовательных приближений строится, как и для области А, и имеет вид (32), (33). В случае области Б

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_2(x, y), \quad \omega_1(x, y) = b - y,$$

$$\omega_2(x, y) = \frac{\frac{a^2 b^2}{4} - b^2 \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} (y - b)^2}{\frac{a^2 b^2}{4} + b^2 \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} (y - b)^2}.$$

Вычислительный эксперимент был проведен при $a = b = 1$ и для $Re = 50, 100, 200, 300, 400$. Рассмотрим результаты для $Re = 100$. В качестве начального приближения было выбрано решение Стокса. Итерационный процесс сошелся с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ за 23 итерации. Вихревой центр находится в точке $(0,388347, 0,758544)$, а $\psi_{max} = 0,0948827$.

Область В. Область, имеющая форму трапеции с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,b)$, $(a_1,0)$, (a_1,b) :

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid 0 < y < b, 0 < x < \frac{a - a_1}{b} y + a_1, a_1 < a \right\}.$$

Математическая модель течения имеет вид (30), (31). Итерационный процесс последовательных приближений строится, как и для области А, и имеет вид (32), (33). В случае области В

$$\omega_1(x, y) = b - y,$$

$$\omega_2(x, y) = y \wedge_{\alpha} x \wedge_{\alpha} \frac{y - \frac{b}{a - a_1} x + \frac{a_1 b}{a - a_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a - a_1}\right)^2}},$$

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_2(x, y).$$

Вычислительный эксперимент был проведен при $a = b = 1, a_1 = \frac{2}{3}$ и для $Re = 50, 100, 200, 300, 400$.

Рассмотрим результаты для $Re = 50, 100$. В качестве начального приближения при $Re = 50$ было выбрано решение Стокса, а при $Re = 100$ – решение Стокса и решение для $Re = 50$. Итерационный процесс для $Re = 50$ сошелся с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ за 7 итераций, а для $Re = 100$ – за 19 итераций, если в качестве начального приближения выбиралось течение Стокса, и за 8 итераций, если в качестве начального приближения выбиралось решение для $Re = 50$. На рис. 2 приведены линии уровня функции тока и завихренности. Графики сходимости

$$\left\| \Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}, \left\| v_x^{(k+1)} - v_x^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left\| v_y^{(k+1)} - v_y^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}, \left\| \zeta^{(k+1)} - \zeta^{(k)} \right\|_{L_2(\Omega)}$$

к нулю имеют характер, аналогичный показанным на рис. 1. Вихревой центр для $Re = 50$ находится в точке $(0,370542, 0,787655)$, а $\psi_{max} = 0,0896502$, а для $Re = 100$ – в точке $(0,329752, 0,773602)$, а $\psi_{max} = 0,090799$.

Как показывает анализ результатов, для непрямоугольной области с изменением числа Рейнольдса течение изменяется аналогично: увеличивается зона циркуляционного течения в центре каверны, растут угловые вихри, вихревой центр смещается ко дну каверны, а ψ_{max} увеличивается.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов [1, 2] и результатами, полученными методом фиктивных областей [22, 23] и методом конечных элементов [4, 5].

Выводы

Предлагаемый метод показал свою эффективность на модельной задаче и, по мнению авторов, обладает рядом преимуществ. Матрица системы (27) является симметричной (это следует из (28)) и не изменяется от итерации к итерации, т.е. становится универсальной. Это дает возможность использовать одну и ту же матрицу при различных числах Рейнольдса и на каждой итерации пересчитывать только правую часть системы, что снижает вычислительные затраты по сравнению с другими методами. Кроме того, исходные уравнения не заменяются приближенными, в отличие от метода, предложенного в [8] (линеаризация по методу Ньютона-Канторовича), что повышает надежность метода и позволяет избежать громоздких выкладок. В отличие от сеточных методов решение получается в явном аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование. Например, зная функцию тока, можно по формулам (4) построить поле скоростей; по формуле (7) найти завихренность; решив соответствующую задачу Неймана для уравнения Пуассона, найти давление. Предложенный в работе подход с некоторыми изменениями может быть распространен на случай многосвязной области и на системы уравнений, например, на уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска в переменных «функция тока – температура».

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что впервые разработан итерационный метод решения нелинейного уравнения для функции тока в односвязных областях неклассической геометрии с кусочно-гладкой границей, основанный на совместном применении метода R-функций и метода последовательных приближений, отличающийся от известных методов более простым вычислительным алгоритмом (решение нелинейной задачи сводится к решению последовательности задач с одним и тем же линейным оператором) и универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области), что позволило получить приближенное решение задачи расчета этого класса течений в областях неклассической геометрии. Получены условия и оценки

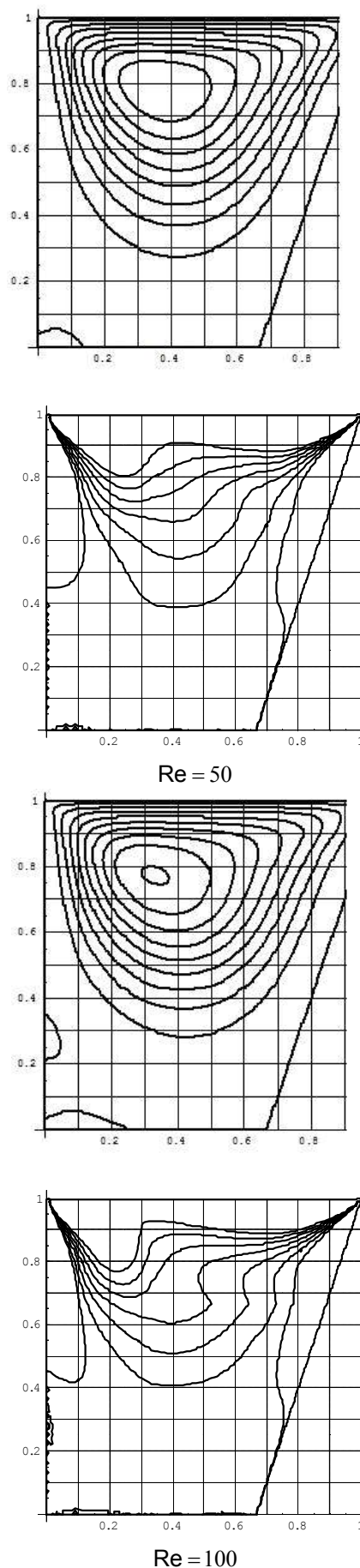


Рис. 2. Линии уровня функции тока ψ и завихренности $\zeta = -\Delta\psi$

скорости сходимости в норме пространств $W_2^3(\Omega)$ к обобщенному решению задачи расчета стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в односвязной области с кусочно-гладкой границей.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанные методы расчета плоских течений вязкой жидкости в односвязных областях являются простыми в алгоритмизации и более универсальными, чем используемые в данное время, поскольку при переходе от одной области к другой требуется лишь изменить уравнение границы. Разработанный метод математического моделирования вязких течений позволяет проводить многовариантный вычислительный эксперимент при математическом моделировании различных физико-механических, биологических течений (течения в инжекторах, форсунках, соплах, кровеносных сосудах, обтекание подводных тел, течения газа и нефти в трубах и пр.).

Литература: 1. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с. 2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. 3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с. 4. Donea J., Huerta A. Finite Element Methods for flow Problems. London: Wiley, 2003. 350 p. 5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dynamics. Oxford: BH, 2000. 334 p. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 7. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач: Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр. Харьков, 1975. 75 с. 8. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141 – 148. 9. Колосова С.В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе // Прикл. мех., 1971. № 7. В. 10. С. 100 – 105. 10. Максименко-Шейко К.В. Исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом R-функций // Проблемы машиностроения, 2001. Т. 4, № 3 – 4. С. 108 – 116. 11. Рвачев В.Л., Корсунский А.Л., Шейко Т.И. Метод R-функций в задаче о течении Гартмана // Магнитная гидродинамика. 1982. № 2. С. 64 – 69. 12. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. 13. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с. 14. Теман Р. Уравне-

ния Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с. 15. Сидоров М.В. О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика, №3, 2002. С. 52 – 54. 16. Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №4. С. 77 – 78. 17. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вестн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. № 602, 2003. С. 61 – 67. 18. Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1958, Т. 197. С. 54 – 112. 19. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. 20. Федотова Е.А. Атомарная и сплайн-аппроксимация решений краевых задач математической физики: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Харьков, 1985. 170 с. 21. Федотова Е.А. Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программирующих системах серии "Поле": Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр., 202. Харьков, 1984. 60 с. 22. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 156 с. 23. Вабищевич П.Н., Вабищевич Т.Н. Численное решение стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости на основе метода фиктивных областей // Вычислительная математика и математическое обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 255 – 262.

Поступила в редколлегию 20.05.2007

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дорошенко В.А.

Тевяшев Андрей Дмитриевич, д-р техн. наук, проф., зав. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, оптимальное стохастическое управление. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 702-14-36.

Гибкина Надежда Валентиновна, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: экономический риск, актуарная математика, математическая физика, оптимальное управление динамическими объектами. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 702-14-36.

Сидоров Максим Викторович, ассистент каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 702-14-36.

УДК658.012

ТЕКУЩИЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ С УЛЬТРАКОРОТКИМ СКОЛЬЗЯЩИМ ОКНОМ

ЯКУНИН А.В.

Предлагается модификация UDU^T -факторизованной схемы рекуррентного алгоритма ТРА для задачи параметрической идентификации линейной регрессионной модели по матрице неполного ранга.

1. Введение

Пусть идентифицируемый объект представлен линейно-параметризованной регрессионной моделью

$$y_n = c^T x_n + \xi_n,$$

где $x_n \in R^N$ – вектор входных сигналов; $y_n \in R^1$ – выходной сигнал; $c \in R^N$ – вектор оцениваемых параметров; $\xi_n \in R^1$ – помеха измерения выходного сигнала; $n = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время. Если параметры объекта изменяются во времени, то для отслеживания их динамики применяются алгоритмы теку-