УДК 621.37:621.391

О. В. СЫТНИК, канд. техн. наук

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СВОЙСТВ ФАЗОВОГО ШУМА АППАРАТУРЫ НА РАЗРЕШЕНИЕ РАДИОЛОКАТОРА С СИНТЕЗИРОВАНИЕМ АПЕРТУРЫ

Одна из основных проблем при разработке радиолокатора с синтезированием апертуры (РСА) — учет фазовых ошибок, возникающих в различных блоках аппаратуры. В реальной аппаратуре фазовые ошибки обусловлены рядом факторов. Генераторы и другие электронные элементы РЛС имеют нестабильность параметров, что приводит к появлению фазового шума, вызывающего ухудшение качества радиолокационных изображений РСА.

Для решения этой проблемы необходимо установить аналитическую взаимосвязь статистических характеристик фазового шума аппаратуры и потенциальных характеристик РСА, что позволит на этапе ее проектирования, во-первых, дать статистически достоверные оценки качества радиолокационных изображений разрабатываемой системы, во-вторых, сформулировать требования к стабильности отдельных узлов и блоков аппаратуры.

Влияние фазового шума на характеристики РСА наиболее удобно рассматривать с использованием обобщенной функции неопределенности [1]:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t+\tau) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{1}$$

Представим фазовый шум аппаратуры в виде действительного стационарного процесса $\alpha(t)$ с известными статистическими характеристиками. Функцию неопределенности (1) РСА с учетом этих шумов можно записать в виде

$$\bar{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t+\tau)\, e^{i\alpha(t)} e^{-i\omega t}\, dt. \tag{2}$$

Функцию $f(t)$, входящую в соотношения (1), (2) и зависящую от вида применяемого в локаторе сигнала, для общности изложения не конкретизируем.

Ошибка положения цели вдоль направления полета на результирующем изображении РСА, определяемая алгоритмом фокусирования, характеристиками системы стабилизации носителя, фазовым шумом $\alpha(t)$ аппаратуры и другими факторами, может быть найдена как

$$m_{X'}(\alpha) = \frac{\int X' \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}{\int \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}, \tag{3}$$

где X' — координата вдоль направления полета носителя РСА.

Протяженность области ошибок, соответствующая основанию прямоугольника, высота которого совпадает с максимумом функции $\bar{\psi}$, а площадь равна площади под кривой $\bar{\psi}$ при фиксированном τ, запишется в виде

$$\sigma_{X'}(\alpha) = \left[\frac{\int (X')^2 \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}{\int \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'} - \frac{\int X' \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}{\int \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Для отыскания аналитической взаимосвязи статистических характеристик процесса $\alpha(t)$ и потенциальных характеристик РСА найдем усредненные по α оценки $m^2_{X'}$ и $\sigma^2_{X'}$, т. е.

$$m^2_{X'} = E\{m^2_{X'}(\alpha)\}; \tag{5}$$

$$\sigma^2_{X'} = E\left\{\frac{\int (X')^2 \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}{\int \operatorname{mod}^2\{\bar{\psi}\}\, dX'}\right\} - m^2_{X'}. \tag{6}$$

Прежде чем перейти к вычислению $m^2_{X'}$ по формуле (5), покажем, что знаменатель выражения (3) не зависит от α. Согласно (2), функция $\tilde{\psi}$ есть преобразование Фурье от функции $f(t) f^*(t+\tau) e^{j\alpha(t)}$. В соответствии с теоремой Парсеваля [2]

$$\int \mathrm{mod}^2 \{\tilde{\psi}\} \, \mathrm{d}X' = \int \mathrm{mod}^2 \{f(t) f^*(t+\tau) e^{j\alpha(t)}\} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int f(t) f^*(t) f^*(t+\tau) f(t+\tau) e^{-j\alpha(t)} e^{j\alpha(t)} \, \mathrm{d}t = \int \mathrm{mod}^2 \{\psi\} \, \mathrm{d}X' = D. \quad (7)$$

С учетом (7) выражение (3) перепишется в виде

$$m_{X'}(\alpha) = D^{-1} \int X' \, \mathrm{mod}^2 \{\tilde{\psi}\} \, \mathrm{d}X'. \quad (8)$$

Среднее по α $m^2_{X'}$ найдем, подставив (8) в (5):

$$m^2_{X'} = E\{m^2_{X'}(\alpha)\} = D^{-2} \iint \xi\beta E \{\mathrm{mod}^2 \{\tilde{\psi}(\xi, \tau)\} \, \mathrm{mod}^2 \{\tilde{\psi}(\beta, \tau)\}\} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\beta. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$B(\xi, \beta) = E\{\mathrm{mod}^2 \{\tilde{\psi}(\xi; \tau)\} \, \mathrm{mod}^2 \{\tilde{\psi}(\beta, \tau)\}\},$$

тогда

$$m^2_{X'} = D^{-2} \iint \xi\beta B(\xi, \beta) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\beta = \frac{\iint \xi\beta B(\xi, \beta) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\beta}{\iint B(\xi, \beta) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\beta}. \quad (10)$$

Расписывая функцию B, входящую в (10), имеем

$$B(\xi, \beta) = \iiiint f(X) f^*(X+\tau) e^{j\alpha(X)} e^{-j\xi u} f^*(X-u) \times$$
$$\times f(X-u+\tau) e^{-j\alpha(X-u)} f(y) f^*(y+\tau) e^{j\alpha(y)} f^*(y-u) \times$$
$$\times f(y-v+\tau) e^{-j\alpha(y-v)} e^{-j\beta v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iiiint g(X) g^*(X-u) \times$$
$$\times g(y) g^*(y-v) E\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(X-u)+\alpha(y)-\alpha(y-v)]}\} e^{-j\xi u} e^{-j\beta v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \quad (11)$$

Здесь

$$g(t) = f(t) f^*(t+\tau).$$

Обозначим подынтегральную функцию в (11) как

$$G(u, v) = \iint g(X) g^*(X-u) g(y) g^*(y-v) \times$$
$$\times E\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(X-u)+\alpha(y)-\alpha(y-v)]}\} \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}y. \quad (12)$$

Тогда в соответствии с (11) запишем

$$B(\xi, \beta) = \iint G(u, v) e^{-j\xi u} e^{-j\beta v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \quad (13)$$

По форме записи функция $B(\xi, \beta)$ в (13) является двумерным преобразованием Фурье от $G(u, v)$, т. е., записав обратное преобразование Фурье, получим

$$G(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint B(\xi, \beta) e^{j\xi u} e^{j\beta v} \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\beta. \quad (14)$$

В точке с координатами $u=0$; $v=0$ функция $G(0, 0)$ в (14) превращается в

$$G(0,\ 0)=\frac{1}{4\pi^2}\iint B(\xi,\ \beta)\,d\xi\,d\beta.$$

Отсюда находим знаменатель формулы (10)

$$D^2=4\pi^2 G(0,\ 0)=\iint B(\xi,\ \beta)\,d\xi\,dB. \tag{15}$$

Воспользовавшись свойством преобразования Фурье, найдем числитель формулы (10) как производную функции $G(u, v)$ по ее аргументам:

$$\frac{4\pi^2\partial^2 G(u,\ v)}{\partial u\,\partial v}\Big|_{\substack{u=0\\ v=0}}=-\iint \xi\beta B(\xi,\ \beta)\,d\xi\,d\beta, \tag{16}$$

тогда

$$m^2_{X'}=E\{m^2_{X'}(\alpha)\}=\frac{\iint \xi\beta B(\xi,\ \beta)\,d\xi\,d\beta}{\iint B(\xi,\beta)\,d\xi\,d\beta}=\frac{\frac{\partial^2 G(u,v)}{\partial u\,\partial v}\Big|_{\substack{u-0\\ v-0}}}{G(0,\ 0)}. \tag{17}$$

Подставляя (12) в числитель формулы (17), получаем

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\iint g(X)\,g(y)\,E\left\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(X-u)+\alpha(y)-\alpha(y-v)]}\right\}dX\,dy=$$

$$=\iint \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}g^*(X-u)\,g^*(y-v)\,dX\,dy+ \tag{18}$$

$$+\iint g(X)\,g(y)\,g^*(X-u)\,g^*(y-v)\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}E\left\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(X-u)+\alpha(y)-\alpha(y-v)]}\right\}\times$$

$$\times\,dX\,dy+\iint g(X)\,g(y)\frac{\partial}{\partial u}g^*(X-u)\,g^*(y-v)\frac{\partial}{\partial v}\times$$

$$\times\,E\left\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(X-u)+\alpha(y)-\alpha(y-v)]}\right\}dX\,dy+$$

$$+\iint g(X)\,g(y)\frac{\partial}{\partial v}g^*(X-u)\,g^*(y-v)\frac{\partial}{\partial u}\times$$

$$\times\,E\left\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(X-u)}+\alpha(y)-\alpha(y-v)]\right\}dX\,dy.$$

Вычисляя производные в (18) в точках $u=0$; $v=0$, раскрывая функцию $g(t)$ и подставляя результат в (17), имеем

$$m^2_{X'}=\frac{\iint \bmod^2\{f(X)\,f^*(X+\tau)\}\bmod^2\{f(y)f^*(y+\tau)\}\,R_{\alpha'}(X-y)\,dX\,dy}{\left[\int \bmod^2\{f(t)\}\bmod^2\{f(t+\tau)\}\,dt\right]^2}, \tag{19}$$

где $R_{\alpha'}(X-y)$ — корреляционная функция производной процесса $\alpha(t)$.

Соотношение (19) устанавливает искомую связь между корреляционной функцией производной процесса $\alpha(t)$ и математическим ожиданием квадрата ошибок положения $m^2_{X'}$.

Для количественной оценки влияния процесса $\alpha(t)$ на характеристики РСА представим модуль идеальной (неискаженной) функции неопределенности РСА как [1]

$$\bmod^2\{\psi\}=\frac{\sin^2\gamma\tau(2R/C-2R'/C)\sin^2[(N+1)(2\pi X'vT)/\lambda R_0]}{[\gamma(2R/C-2R'/C]^2\sin^2(2\pi X'vT/\lambda R_0)},$$

где γ — удвоенная скорость изменения частоты при частотной модуляции излучаемого импульса; λ — длина волны колебаний; C — скорость распространения электромагнитных колебаний; v — путевая скорость носителя РЛС; T — период повторения зондирующих сигналов; R — наклонная дальность до точки с координатами $(0, y_0, 0)$; R' — наклонная дальность до точки с координатами $(X', y_0, 0)$.

Анализ соотношения (19) с учетом последнего выражения для различных законов распределений вероятностей процесса $\alpha(t)$ позволяет сделать вывод об инвариантности величины $m^2_{X'}$ относительно всех симметричных распределений, т. е. для распределений, у которых коэффициент ассимметрии $K_a = m_3^0/\sigma_\alpha^3 = 0$ (m_3^0 — центральный момент третьего порядка). В таблице приведены значения $m^2_{X'}$ и K_a для некоторых распределений.

$m^2_{X'}$, м²	K_a	Закон распределения
0	0	Равномерный
0	0	Нормальный
$\sim 0{,}4 \cdot 10^{-3} R'^2$	$(\pi-3)\sqrt{\pi/2}$	Релея
$3{,}8 \cdot 10^{-3} R'^2$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	Лапласа
$\sim 10^{-3} R'^2$ при $\alpha = 3$; $\sim 4 \cdot 10^{-3} R'^2$ при $\alpha = 0{,}1$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}$	Гамма распределения

Одним из наиболее сильных источников фазовой нестабильности среди электронных блоков РСА являются гетеродины преобразователей частоты приемника, охваченные кольцами фазовой подстройки частоты (ФАПЧ). Как показано в работе [3], распределение мгновенных значений отклонений частоты генератора в петле ФАПЧ имеет симметричное распределение.

С целью вывода аналогичной соотношению (19) зависимости для $\sigma^2_{X'}$ в соотношении (4) перепишем формулу (6) с учетом обозначения (7):

$$\sigma^2_{X'} = \frac{E\left\{\int (X')^2 \operatorname{mod}^2\{\tilde{\psi}\}\, dX'\right\}}{D} - m^2_{X'}; \tag{20}$$

$$E\{\operatorname{mod}^2\{\tilde{\psi}\}\} = E\left\{\iint g(X)\, g^*(y)\, e^{-jX'(X-y)} e^{j(\alpha(X)-\alpha(y))}\, dX\, dy\right\}. \tag{21}$$

Обозначим $E\{e^{j[\alpha(X)-\alpha(y)]}\} = \varphi(X-y)$.

Тогда, делая замену переменных в (21), записываем

$$E\{\operatorname{mod}^2\{\tilde{\psi}\}\} = \iint g(X)\, g^*(X-Z)\, \varphi(Z)\, e^{-jX'Z}\, dX\, dZ. \tag{22}$$

Обозначив $B(X') = E\{\operatorname{mod}^2\{\tilde{\psi}\}\}$ и $G(Z) = \int \varphi(Z)\, g(X)\, g^*(X-Z) dX$, видим, что функции $G(Z)$ и $B(X')$ связаны друг с другом преобразованием Фурье

$$G(Z) = \frac{1}{2\pi}\int B(X')\, e^{jX'Z}\, dX'.$$

Легко показать, что интеграл $\int (X')^2 B(X')\,dX'$ эквивалентен производной $2\pi\partial^2 G/\partial Z^2_{|Z=0}$, т. е.

$$\frac{\partial G(Z)}{\partial Z}=\int\frac{\partial\varphi(Z)}{\partial Z}g(X)g^*(X-Z)\,\mathrm{d}X+\int\varphi(Z)g(X)\frac{\partial}{\partial Z}g^*(X-Z)\,\mathrm{d}X,$$

$$\frac{\partial^2 G(Z)}{\partial Z^2}=\int\frac{\partial^2\varphi(Z)}{\partial Z^2}g(X)g^*(X-Z)\,\mathrm{d}X-2\int\frac{\partial\varphi(Z)}{\partial Z}g(X)\frac{\partial}{\partial Z}\times$$
$$\times g^*(X-Z)\,\mathrm{d}X+\int\varphi(Z)g(X)\frac{\partial^2}{\partial Z^2}g^*(X-Z)\,\mathrm{d}X.$$

Очевидно, что если $E\{\alpha'\}=0$, то и функция $\frac{\partial\varphi(0)}{\partial Z}=0$, тогда

$$\frac{\partial^2 G(0)}{\partial Z^2}=\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial z^2}\int\mathrm{mod}^2\{g(X)\}\,\mathrm{d}X+\int g(X)\frac{\partial^2}{\partial Z^2}g^*(X-Z)\,\mathrm{d}X,$$

$$-\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial Z^2}=E\left\{\mathrm{mod}^2\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Z^2}e^{j\alpha(Z)}\right\}\right\}=E\left\{\left[\frac{\partial\alpha(Z)}{\partial Z}\right]^2\right\},$$

так как $\mathrm{mod}^2\{e^{j\alpha(Z)}\}\equiv 1$.

Откуда

$$-\frac{\partial^2 G(0)}{\partial Z^2}=\frac{1}{2\pi}E\left\{\left[\frac{\partial\alpha(Z)}{\partial Z}\right]^2\right\}\int\mathrm{mod}^2\{f(Z)f(Z+\tau)\,\mathrm{d}Z+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int(X')^2\,\mathrm{mod}^2\{\psi(X',\tau)\}\,dX'. \tag{23}$$

Разделив левую и правую части (23) на $\int\mathrm{mod}^2\{f(t)f^*(t+\tau)\}\,dt$ и вычтя из правой части $m^2_{X'}$, получаем развернутое выражение для квадрата протяженности области ошибок (20)

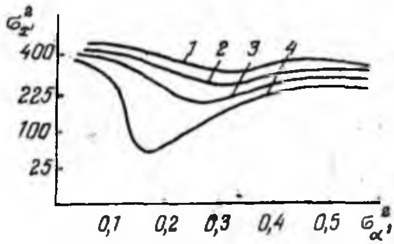
$$\sigma^2_{X'}=E\left\{\left[\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}\right]^2\right\}+\frac{\int(X')^2\,\mathrm{mod}^2\{\psi(X',\tau)\}\,\mathrm{d}X'}{\int\mathrm{mod}^2\{f(t)f^*(t+\tau)\}\,\mathrm{d}t}-m^2_{X'}. \tag{24}$$

Второй член в правой части соотношения (24) не зависит от фазового шума $\alpha(t)$ и определяет идеальное разрешение РСА. Первое слагаемое формулы (24) полностью определяется фазовыми нестабильностями гетеродинов, ошибками округления на разрядной сетке ограниченной длины цифровых блоков обработки и нестабильностями других блоков РСА.

Подставив в соотнощение (24) значение модуля неискаженной функции неопределенности и считая шум гауссовским, можно найти зависимости $\sigma^2_{X'}$ от дисперсии шума $\sigma^2_{\alpha'}$ при различных параметрах РСА. Зависимости, приведенные на рисунке, получены при следующих параметрах: $v=7500$ м/с; $T=10^{-3}$с; $\lambda=0{,}23$ м; $R_0=734300$ м; кривая *1* получена при $N=289$; *2* — 352; *3* — 423; *4* — 512.

Характер кривых свидетельствует о наличии явно выраженного экстремума. С уменьшением требований к потенциальному разрешению вдоль линии полета носителя РЛС (что эквивалентно снижению размера эффективной синтезированнной апертуры $L_{\text{эфф}}=(N+1)vT$) значение минимума функции $\sigma^2_{X'}=f(\sigma^2_{\alpha'})$ смещается в область больших значений σ_α^2, и наблюдается размытие экстремума. Последний эффект объясняется расширением главного лепестка идеальной функции неопределенности.

Таким образом, анализируя соотношения (19) и (24), которые устанавливают взаимосвязь между статистическими характеристиками шума аппаратуры и интегральными тактико-техническими характеристиками РСА, сформулируем задачу оптимизации структуры РСА. В частности, фиксируя параметры шума $\alpha(t)$, что, в свою очередь, эквивалентно заданию технических требований электронным блокам РСА, можно путем выбора параметров функции $f(t)$ минимизировать $\sigma_{X'}^2$. Причем оптимизационную процедуру можно организовать итеративно. Например, выбрав параметры функции $f(t)$, обеспечивающие min $\sigma_{X'}^2$ при фиксированных параметрах процесса $\alpha(t)$, оценивают затраты на техническую реализацию РСА в целом. Затем изменяют технические требования к отдельным блокам РСА (что эквивалентно выбору новых параметров процесса $\alpha(t)$) и вновь осуществляют минимизацию $\sigma_{X'}^2$ и так до тех пор, пока не будет достигнут разумный компромисс между стоимостью и технической сложностью отдельных узлов аппаратуры и стоимостью устройств обработки сигналов при реализации заданных тактико-технических параметров РСА.



Список литературы: 1. *Справочник* по радиолокации / Под ред. М. Сколника / Пер. с англ., под ред. К. Н. Трофимова Т. 2. М., 1977. 408 с. 2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров М., 1984. 831 с. 3. *Манассевич В.* Синтезаторы частот (Теория и проектирование): Пер. с англ. / Под ред. А. С. Галина. М., 1979. 384 с.

Поступила в редколлегию 05.07.88