УДК 681.51.007

МОДЕЛИ ПОКРЫТИЙ В ЗАДАЧАХ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ РЕКВАНТОВАНИЕМ

МАШТАЛИР В.П., ЧУПИКОВ А.Н.

Рассматривается взаимосвязь покрытий яркостного диапазона и носителей изображений объектов в поле зрения. Вводятся и изучаются отношения, обеспечивающие автоматизацию синтеза классов толерантности и их трансформацию в классы эквивалентности для тематической интерпретации.

1. Введение

Методы сегментации изображений имеют достаточно долгую историю развития и уже традиционно представляют собой одну из фундаментальных (еще окончательно нерешенных) задач, поскольку любая интерпретация видеоданных так или иначе связана с выделением полезной (применительно к конкретной предметной области) информации [1,2]. В самом общем виде сегментация – это кластеризация изображения, т.е. построение разбиения носителя изображения [2–5]. При этом основную проблему составляет выбор парадигмы кластеризации (фактически выбор критериев или признаков, на основе которых выполняется группообразование) и адекватного числа выделенных и индексированных областей изображения, соответствующих объектам сцены.

Многообразие входной информации, индуцируемое вариациями условий регистрации изображений, их возможными искажениями естественной или искусственной природы и собственно различием трактовки одних и тех же данных в различных ситуациях, зачастую приводит к необходимости увеличения объемов априорных сведений или же к разработке узкоспециализированных алгоритмов, ориентированных на фиксированные прикладные задачи. При этом результат синтеза формальных описаний наблюдаемых сцен существенно зависит от конкретных свойств алгоритмов или условий их применения. Таким образом, в настоящее время ощущается потребность в разработке моделей, обеспечивающих теоретическую основу хотя бы для некоторого обобщения методов сегментации изображений с тем, чтобы создать предпосылки для унификации этапов кластеризации изображений и интеллектуального анализа, предшествующего тематической интерпретации. В этом плане определенный интерес представляет исследование свойств частичной сегментации, когда результаты поиска носителей изображений тех или иных объектов могут пересекаться. Подобные ситуации возникают при совмещении результатов работы нескольких алгоритмов сегментации или при квантовании изображений с многозначным преобразованием яркостей. Частным случаем является реквантование изображений, что приводит к анализу конечных покрытий диапазона изменения функций яркостей.

Целью работы является синтез новых методов сегментации на основе свойств толерантностей, что позволяет создавать эффективные мультипороговые алгоритмы, а также использовать их при реквантовании визуальной информации в процессе ее обработки и интерпретации.

2. Современное состояние методов сегментации и постановка задачи

К настоящему времени сформировалось три базовых подхода к сегментации: методы, основанные на анализе границ [2, 6, 7], методы построения (поиска, наращивания, дробления) областей [2, 8–12] и так называемые глобальные методы, фактически оперирующие в различных признаковых пространствах [2, 13–20].

Первый подход основан на использовании градиентных процедур, аппроксимации перепадов яркостей, высокочастотной фильтрации с последующей привязкой выделенных компонентов к положению в поле зрения, статистическом обнаружении перепадов. Как правило, алгоритмы связаны с поиском или заданием пороговых ограничений, часто приводят к необходимости утончения контурных препаратов и устранения разрывов. При этом имеется высокая вероятность возникновения ошибок из-за высокой чувствительности по сути дифференциальных алгоритмов.

Второй подход в противоположность первому использует различные дефиниции однородности областей изображения или понятия текстуры. Он менее чувствителен к шуму, но и точность кластеризации часто оставляет желать лучшего, обеспечивая требуемое качество лишь на высококонтрастных изображениях.

Третий подход – сегментация в признаковых пространствах представлен наиболее широко в литературе по обработке изображений [2, 13–20]. Данный подход, обеспечивая высокую степень универсальности, позволяет в должной мере легко учитывать и специфику предметной области. Следует отметить, что во всех трех подходах активно используются статистические методы [21–25], в частности, хорошо себя зарекомендовали алгоритмы, основанные на представлении изображений марковскими процессами [22–25].

Каждый из подходов в конкретных ситуациях имеет свои преимущества, но и их недостатки достаточно очевидны. Так, при выделении границ нет никаких гарантий получения замкнутых связных областей. При формировании областей наряду с высокой вычислительной сложностью следует отметить вопросы «сходимости» процессов синтеза областей в том плане, что трудно искать компромисс между излишне детальным или очень огрубленным представлением требуемых носителей изображений объектов. Наконец, при работе с признаками трудно в достаточной степени учесть пространственную информацию, являющуюся принципиально важной при получении разбиений. В связи с этим, а также исходя из высоких требований (практически во всех прикладных задачах) к точности сегментации, развитие получают различные комбинированные схемы [26, 27]. Среди комбинированных методов особое место занимает сегментация на базе обработки и трансформаций яркостного диапазона изображений [21, 27–29], которая в достаточно полной мере позволяет учитывать извлекаемую из особенностей распределения яркостей информацию. В подобных алгоритмах возникает переход от разбиений к покрытиям поля зрения, который требует углубленного изучения. Таким образом, постановка задачи данной работы состоит в следующем.

Рассмотрим поле зрения видеодатчика, т.е. плоскую прямоугольную финитную область D. Будем анализировать цифровые формы представления изображений, т.е. функция распределения яркостей $B(x, y)$ принимает на D только целочисленные значения в узлах сетки размера $N \times M$. Для простоты записи (с учетом построчной развертки) носитель изображения можно представлять множеством $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, где $n = NM$. Тогда собственно изображение $B(A)$ при произвольном законе квантования с m уровнями определяется множеством

$$C = \operatorname{Im} B(A) = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}.$$

Подчеркнем, что многозначное реквантование на цифровом уровне (в том числе в неявной форме в алгоритмах преобразований изображений) задает, вообще говоря, покрытие диапазона значений функции распределения яркостей, т.е. $\Pi_C = \{\Pi_1^C, \Pi_2^C, \ldots, \Pi_s^C\}$, где $C = \bigcup_{i=1}^{s} \Pi_i^C,\ \Pi_i^C \subset C,\ \Pi_i^C \neq \Pi_j^C,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, s}$.

Задача заключается в изучении взаимосвязей покрытий Π_C и разбиений множества A, которые фактически представляют собой варианты частичной, избыточной или правильной с точки зрения применения в предметной области сегментации, тем самым подготовить основу для создания принципиально новых алгоритмов сегментации.

3. Модели покрытий в задачах сегментации

Функция B и покрытие Π_C индуцируют на A бинарное отношение

$$\Upsilon(a', a'') = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists \Pi_i^C \subset \Pi_C : B(a'), B(a'') \in \Pi_i^C; \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (1)$$

где $a', a'' \in A, \Pi_i^C \subset C, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, которое в качестве области определения имеет декартов квадрат поля зрения ($\operatorname{Dom} \Upsilon = A \times A$) и обладает свойствами рефлексивности $(\forall a \in A \Rightarrow \Upsilon(a, a) = 1)$ и симметричности $(\forall a', a'' \in A \Rightarrow \Upsilon(a', a'') = \Upsilon(a'', a'))$, т.е. является отношением толерантности.

С другой стороны, отношение Υ реализует многозначное отображение из A в A, которое продуцирует классы образов и прообразов (левые и правые смежные классы): $\Upsilon_a = \{x \in A : \Upsilon(a, x) = 1\}$ – класс образов элемента $a \in A$; $\Upsilon_a^{-1} = \{x \in A : \Upsilon(x, a) = 1\}$ – класс прообразов элемента $a \in A$.

Подчеркнем, что в данном случае классы образов и прообразов в силу симметричности совпадают. Действительно, $\forall a \in \Upsilon_a \Rightarrow \Upsilon(a, x) = 1 \Rightarrow \Upsilon(x, a) = 1 \Rightarrow x \in \Upsilon_a^{-1}$.

Эта цепочка импликаций справедлива и в обратном направлении, тогда получаем, что $\Upsilon_a \subset \Upsilon_a^{-1}$ и $\Upsilon_a^{-1} \subset \Upsilon_a$, т.е. $\Upsilon_a^{-1} = \Upsilon_a$. Система этих классов порождает покрытие $\Pi_A = \{\Pi_1^A, \Pi_2^A, \ldots, \Pi_q^A\}$, так как вследствие рефлексивности $\Upsilon(a, a) = 1$ произвольный элемент $a \in A$ также принадлежит Υ_a. С другой стороны, любое отношение толерантности индуцирует так называемые предклассы и классы толерантности. Остановимся подробнее на изучении их взаимосвязей с введенными покрытиями.

Напомним, что множество $E \subset A$ называется предклассом толерантности, если любые его два элемента x и y толерантны, т.е. для них справедливо выполнение соотношения $\Upsilon(x, y) = 1$. В частном случае и одноэлементное множество $E = \{a\}$ для любого элемента из A есть предкласс толерантности, поскольку имеет место рефлексивность. Далее, множество $G \subset A$ называется классом толерантности, если G есть максимальный предкласс в том смысле, что для всякого элемента $z \in A$, не входящего в G, существует элемент $x \in G$, не толерантный z, т.е. $\Upsilon(x, z) = 0$.

Отметим, что если A – конечное множество что соответствует нашей постановке, то всякий предкласс содержится хотя бы в одном классе толерантности. Действительно, пусть E – предкласс толерантности, но не класс толерантности. Следовательно, он не является максимальным, т.е. найдется элемент $z \in A \backslash E$, толерантный ко всякому элементу из E. Присоединим его к множеству E, продолжая его, т.е. рассмотрим множество $E_1 = E \cup \{z\}$. Ясно, что $E_1 \subset E$ и E_1 – по-прежнему предкласс толерантности. Если множество E_1 еще не трансформировалось в класс толерантности, то процесс расширения может быть продолжен до получения класса толерантности. Поскольку $\operatorname{card} A < \infty$, за конечное число шагов построим класс толерантности, содержащий исходный предкласс, что и требовалось показать. Отсюда следует, что любой элемент $a \in A$ содержится в некотором классе толерантности, поскольку одноэлементное подмножество A является предклассом толерантности, а вся система классов толерантности образует покрытие множества A, которое будем обозначать

$$G_A = \{G_1^A, G_2^A, \ldots, G_r^A\}.$$

Определение 1. Произвольное покрытие Π назовем правильным, если и только если для любых его двух элементов Π' и Π'' выполняются соотношения $\Pi' \setminus \Pi'' \neq \varnothing$ и $\Pi'' \setminus \Pi' \neq \varnothing$.

В противном случае, т.е. если произвольный элемент покрытия вложен в какой-либо другой его элемент, будем называть такое покрытие неправильным.

Утверждение 1. Классы толерантности образуют правильное покрытие множества A.

Доказательство. На вербальном уровне правильное покрытие трактуется так: в нем не существует пары элементов, один из которых является собственным подмножеством второго, т.е. для $\Pi', \Pi'' \in \Pi$ выполняется, например, $\Pi' \subset \Pi''$. Если бы для классов толерантности $G', G'' \subset A$ выполнялось условие $G' \subset G''$, то G' не удовлетворяет свойству максимальности, т.е. множество G' – предкласс, а не класс толерантности, что противоречит исходной посылке.

Определение 2. Произвольное покрытие Π конечного множества C будем называть упорядоченно связным, если существует индексация, при которой в любом представителе покрытия содержатся только занумерованные подряд (без пропусков) элементы, т.е. $\forall \Pi_i \in \Pi_C \quad \Pi_i = \{c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{i+k}\}$,

$$c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{i+k} \in C, \quad \operatorname{card} \Pi_i = k+1.$$

Укажем пример множества, не являющегося упорядоченно связным. Пусть C состоит из трех элементов, т.е. $C = \{1,2,3\}$, а $\Pi_C = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$. Тогда при любой перенумерации элементов (перестановке чисел 1,2,3) всегда будет присутствовать несвязный элемент покрытия с номерами 1 и 3 (с пропущенным номером 2).

Определение 3. Произвольную тройку различных элементов $T = \langle c', c'', c''' \rangle$ из множества C с заданным на нем покрытием Π_C назовем транзитивным триплетом, если любая пара точек лежит хотя бы в одном элементе покрытия.

Рассмотренный выше пример представляет собой транзитивный триплет. Нетранзитивный триплет будем обозначать $T^* = \langle c', c'', c''' \rangle$.

Следует указать, что в общем случае любая пара $\langle C, \Pi_C \rangle$ совершенно аналогично соотношению (1) индуцирует на множестве C отношение толерантности, а именно

$$\Theta_{\Pi C}(c', c'') = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists \Pi_i^C : c', c'' \in \Pi_i^C \in \Pi_C; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда добавление любого элемента c''', транзитивного относительно этого отношения, образует транзитивный триплет. При этом толерантность $\Theta_{\Pi C}$ на транзитивном триплете как на множестве переходит в случай тривиальной эквивалентности, поскольку $\Theta_{\Pi C}(c_i, c_j) \equiv 1$ для любых $c_i, c_j \in \{c', c'', c'''\}$.

Изучим теперь важные в дальнейшем свойства правильных и упорядоченно связных покрытий.

Свойство 1. Для любой пары элементов упорядоченно связного, правильного покрытия существует хотя бы один принадлежащий их объединению нетранзитивный триплет $T^* = \langle c', c'', c''' \rangle$, два элемента которого не принадлежат одному элементу покрытия, т.е.

$$\forall \Pi', \Pi'' \in \Pi_C \; \exists T^* \in C : \{c', c'', c'''\} \in \Pi' \cup \Pi'',$$
$$\exists c^* \in \Pi' \setminus \Pi'', \; \exists c^{**} \in \Pi'' \setminus \Pi', \; c^*, c^{**} \in T^*.$$

Доказательство. Отметим, что если Π' и Π'' одноэлементные множества, то эта ситуация представляет собой вырожденный случай: множество $\Pi' \cup \Pi''$ содержит только два элемента, поэтому транзитивный триплет как таковой не существует. Поэтому без ограничения общности можно полагать, что $\operatorname{card}\{\Pi' \cup \Pi''\} \geq 3$.

Возможны две ситуации: $\Pi' \cap \Pi'' = \varnothing$ или $\Pi' \cap \Pi'' \neq \varnothing$. При этом из условия утверждения 1 покрытие является упорядоченно связным, т.е. можно считать, что

$$\Pi' = \{c_{i'}, c_{i'+1}, \ldots, c_{i'+k'}\}, \; \Pi'' = \{c_{i''}, c_{i''+1}, \ldots, c_{i''+k''}\}, \quad (3)$$

где $c_{i'}, c_{i'+1}, \ldots, c_{i'+k'}, c_{i''}, c_{i''+1}, \ldots, c_{i''+k''} \in C$.

Индексы в (3) удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} \Pi' \cap \Pi'' = \varnothing \Rightarrow i' + k' < i''; \\ \Pi' \cap \Pi'' \neq \varnothing \Rightarrow \exists s : s \leq k', i' + s = i''. \end{cases}$$

Первая составляющая иллюстрируется рис. 1, вторая – рис. 2.

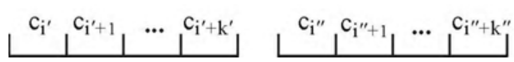

Рис. 1. К доказательству свойства 1: $\Pi' \cap \Pi'' = \varnothing$

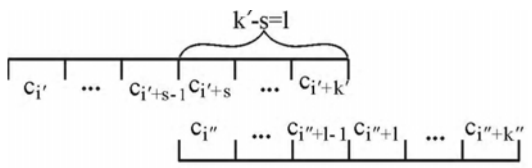

Рис. 2. К доказательству свойства 1: $\Pi' \cap \Pi'' \neq \varnothing$

Принимая во внимание, что

$$c_{i'+s} = c_{i''}, \; c_{i'+s+1} = c_{i''+1}, \ldots, c_{i'+k'} = c_{i''+l-1}$$

являются общими элементы множеств Π' и Π'', можно утверждать, что в любом случае два элемента $c_{i'}$ и $c_{i''+k''}$, принадлежащие C, не могут быть толерантными в смысле отношения $\Theta_{\Pi C}$, т.е.

$$\Theta_{\Pi C}(c_{i'}, c_{i''+k''}) = 0.$$

Действительно, в противном случае (а именно, при $\Theta_{\Pi_C}(c_{i'}, c_{i''+k''}) = 1$) найдется элемент покрытия Π''', который бы их содержал, т.е. $c_{i'}, c_{i''+k''} \in \Pi'''$. Но в этом случае Π''' содержит и все промежуточные по номерам элементы множества C в силу условия связности. Отсюда следует, что $\Pi' \cup \Pi'' \subseteq \Pi'''$, но это противоречит правильности покрытия Π_C. Добавляя к этим двум элементам произвольный элемент из множества $\Pi' \cup \Pi'' / \{c_{i'}, c_{i''+k''}\} \neq \varnothing$, получаем нетранзитивный триплет, принадлежащий объединению двух произвольных элементов покрытия Π_C, для которого верны два следующих включения $c_{i'} \in \Pi' \setminus \Pi''$, $c_{i''+k''} \in \Pi'' \setminus \Pi'$, что и требовалось.

Свойство 2. Если для любой пары элементов Π', Π'' произвольного покрытия Π_C существует нетранзитивный триплет $T^* = \langle c', c'', c''' \rangle$, лежащий в их объединении, то это покрытие – правильное.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существование неправильного элемента Π' покрытия Π_C. Это означает, что он является собственным подмножеством другого элемента покрытия Π'', т.е. $\Pi', \Pi'' \in \Pi_C$ и $\Pi' \subseteq \Pi''$. Тогда их объединение имеет вид $\Pi' \cup \Pi'' = \Pi''$, и любые три элемента c', c'', c''' множества C попадают в один элемент покрытия, т.е. по определению 3 эти элементы образуют транзитивный триплет, что противоречит исходной посылке. Свойство доказано.

Свойство 3. Произвольное разбиение конечного множества C является упорядоченно связным покрытием.

Доказательство. Свойство можно доказать по индукции относительно количества элементов множества C. Очевидно, что база индукции присутствует: если множество C состоит из одного или двух элементов, и разбиения состоят из одного или двух элементов, являясь связными при любой нумерации.

Допустим теперь, что для всех конечных множеств мощности n указанное свойство выполняется. Рассмотрим далее множество C, для которого $\operatorname{card} C = n+1$. Пусть c^* – элемент, которым отличаются множество и его собственное подмножество C^* мощности n. Прежде всего, при переходе к C разбиение остается разбиением, покрывающим множество $C^* = C \setminus \{c^*\}$. Предположим, что $c^* \in \Pi'$ (Π' – элемент первоначального разбиения Π_C). Изменим Π', исключив из него c^*. Тогда по предположению индукции новое разбиение будет покрывать C^*, так как $\operatorname{card} C^* = n$, и более того, оно – упорядоченно связное. Это означает, что существует нумерация элементов множества C^*, при которой $C \setminus \{c^*\}$ является связным в смысле определения 2, т.е.

$$C \setminus \{c^*\} = \{c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{i+s}\}.$$

Присвоим элементу c^* номер $i+s+1$, а у всех элементов с номерами после $i+s$ сдвинем индексацию на 1. Таким образом, связность любого элемента разбиения не меняется, но оно уже покрывает множество C, мощность которого $n+1$, т.е. индуктивный переход справедлив. Доказательство завершено.

Определение 4. Произвольное бинарное отношение F_Π, заданное на множестве A, будем называть функциональным, если задана некоторая функция $f: A \to C$, на C задано покрытие Π и

$$F_\Pi(a', a'') = 1 \Leftrightarrow \exists\, \Pi' \in \Pi : f(a'), f(a'') \in \Pi',$$

где $a', a'' \in A$, $f(a'), f(a'') \in C$.

Подчеркнем, что из определения 4 непосредственно следует: функциональное отношение является отношением толерантности, поскольку автоматически выполняются свойства рефлексивности и симметричности. При этом наше исходное отношение (1) – функциональное.

Утверждение 2. Функциональное отношение не изменится, если из индуцирующего его покрытия будут удалены все неправильные элементы.

Доказательство. Рассмотрим произвольный неправильный элемент Π' покрытия Π. Если таковой существует (в противном случае утверждение справедливо), то найдется по крайней мере один элемент $\Pi'' \in \Pi$, для которого имеет место вложение $\Pi' \subset \Pi''$. Допустим, после удаления из покрытия Π элемента Π' для некоторой пары a', a'' элементов из A отношение F изменится, т.е. $F_\Pi(a', a'') \neq F_{\Pi \setminus \Pi'}(a', a'')$.

Перехода от 0 к 1 произойти не может, поскольку значения $f(a'), f(a'') \in C$ изначально принадлежали бы разным элементам покрытия Π и после исключения любого элемента покрытия (в том числе и Π') ничего измениться не может. Изменение $1 \to 0$ может произойти, только лишь при добавлении некоторого элемента, содержащего $f(a')$ и $f(a'')$. Таким образом, изменения могут коснуться только толерантных элементов отношения F_Π. Значит, существует элемент $\Pi''' \in \Pi$, для которого $f(a'), f(a'') \in \Pi'''$. Тогда если $\Pi' \cap \Pi''' = \varnothing$, то изъятие Π' ничего не меняет, так как $f(a'), f(a'') \not\in \Pi'$. Если же $\Pi' \cap \Pi''' \neq \varnothing$, то изменение может произойти только тогда, когда хотя бы один из элементов $f(a'), f(a'') \in C$ попадает в пересечение $\Pi' \cap \Pi'''$. В силу симметрии отношения толерантности это приводит к трем возможным ситуациям:

$$f(a'), f(a'') \in \Pi' \cap \Pi'' \cap \Pi''',$$

$$f(a'), f(a'') \in \Pi'' \cap \Pi''', f(a') \in \Pi' \cap \Pi'' \cap \Pi''',$$

$$f(a'), f(a'') \in \Pi''', f(a') \in \Pi' \cap \Pi'' \cap \Pi'''.$$

Нетрудно заметить, что отбрасывание элемента Π' из покрытия Π все равно сохраняет элемент Π''', содержащий $f(a')$ и $f(a'')$. Таким образом, получаем $F_{\Pi\backslash\Pi'}(a', a'') = 1$, т.е. изменение $1 \to 0$ тоже не может происходить, что доказывает утверждение 2.

В общем случае функциональные классы образов (прообразов) и классы толерантности не совпадают. Рассмотрим пример, доказывающий это: в качестве множеств A и C выберем наборы натуральных чисел

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad C = \{7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Зададим функцию $B : A \to C$ в виде $B(1) = 7, B(2) = 8$, $B(3) = 9, B(4) = 10, B(5) = B(6) = 11$, а покрытие, определяющее реквантование, в виде $\Pi_C = \{\Pi_1^C, \Pi_2^C, \Pi_3^C\}$, где $\Pi_1^C = \{7, 8\}$, $\Pi_2^C = \{8, 9, 10\}$, $\Pi_3^C = \{9, 10, 11\}$. Отметим, что используем только правильное покрытие, поскольку из утверждения 2 следует, что без ограничения общности любое покрытие всегда можно таковым сделать. Функция $B : A \to C$ и покрытие Π_C индуцируют функциональное отношение (таблица).

Функциональное отношение

$\Upsilon_{\Pi C}(i, j)$		A					
		1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	0	0	0	0
	2	1	1	1	1	0	0
	3	0	1	1	1	1	1
	4	0	1	1	1	1	1
	5	0	0	1	1	1	1
	6	0	0	1	1	1	1

Укажем в явном виде совпадающие классы образов и прообразов:

$$\Upsilon_{\Pi C1} = \Upsilon^{-1}_{\Pi C1} = \{1, 2\}, \ \Upsilon_{\Pi C2} = \Upsilon^{-1}_{\Pi C2} = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$\Upsilon_{\Pi C3} = \Upsilon^{-1}_{\Pi C3} = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$\Upsilon_{\Pi C4} = \Upsilon^{-1}_{\Pi C4} = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$\Upsilon_{\Pi C5} = \Upsilon^{-1}_{\Pi C5} = \{3, 4, 5, 6\}, \Upsilon_{\Pi C6} = \Upsilon^{-1}_{\Pi C6} = \{3, 4, 5, 6\},$$

а также классы толерантности:

$$G_1 = \{1, 2\}, \ G_2 = \{2, 3, 4\}, \ G_3 = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Сравнивая их, можем отметить их частичное совпадение. Таким образом, возникает вопрос: когда смежные классы и классы толерантности совпадают? Для функциональных отношений, как установлено, определяемых (1), ответ дает.

Утверждение 3. Классы образов и прообразов заданного на произвольном множестве A функционального отношения $F_{\Pi C}$, индуцированного функцией $B : A \to C$ и некоторым упорядоченно связным покрытием Π_C, являются классами толерантности тогда и только тогда, когда Π_C – разбиение.

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть покрытие Π_C представляет собой разбиение. Рассмотрим класс образов $F_{\Pi Ca}$ произвольного элемента $a \in A$ и два принадлежащих ему элемента $a', a'' \in F_{\Pi Ca}$. Тогда $F_{\Pi C}(a, a') = F_{\Pi C}(a, a'') = 1$.

Из этих равенств и функциональности отношения $F_{\Pi C}$ вытекает, что найдутся два элемента – допустим, это Π_i^C и Π_j^C – покрытия Π_C, для которых

$$B(a), B(a') \in \Pi_i^C, \ B(a), B(a'') \in \Pi_j^C. \qquad (4)$$

Принимая во внимание, что B – всюду определенная на A функция, из (4) непосредственно следует: $B(a)$ принадлежит множеству $\Pi_i^C \cap \Pi_j^C$. С другой стороны, два элемента разбиения пересекаются только в случае их совпадения, т.е. $\Pi_i^C = \Pi_j^C$, но тогда $B(a'), B(a'') \in \Pi_i^C$. Принадлежность одному элементу покрытия свидетельствует о толерантности a' и a'', что равносильно тому, что $F_{\Pi Ca}$ является предклассом толерантности. Очевидно, что этот предкласс является максимальным, так как класс образов $F_{\Pi Ca}$ содержит все элементы, толерантные к a. Иначе, любое множество, включающее его, имеет хотя бы один элемент, не толерантный к a, т.е. не является предклассом. Итак, произвольный класс образов – класс толерантности. Достаточность доказана.

Необходимость докажем от противного. Пусть для произвольного элемента $a \in A$ класс образов $F_{\Pi Ca}$ – класс толерантности, тогда надо показать, что Π_C является разбиением. Предположим, что это не так. Следовательно, найдутся два несовпадающие элемента Π_i^C и Π_j^C покрытия Π_C, для пересечения которых справедливо выполнение $\Pi_i^C \cap \Pi_j^C \neq \varnothing$, что равносильно существованию элемента $c^* \in C$ такого, что $c^* \in \Pi_i^C \cap \Pi_j^C$. Но с другой стороны, B – всюду определенная на A функция, т.е. найдется элемент $a \in A$, для которого $B(a) = c^*$, откуда следует справедливость включения $B(a) \in \Pi_i^C \cap \Pi_j^C$.

Учитывая, что $\Pi_i^C \neq \Pi_j^C$ и покрытие Π_C является правильным и упорядоченно связным, из свойства 1 вытекает, что для элементов покрытия Π_i^C и Π_j^C найдется нетранзитивный триплет $T^* = \langle c', c'', c''' \rangle$. При соответствующей нумерации ($c^* = c'$) свойства элементов триплета состоят в следующем. Один элемент лежит в пересечении элементов покрытия, а два других – в различных элементах (не существует элемента покрытия, которому они бы принадлежали), т.е.

$$c' \in \Pi_i^C \cap \Pi_j^C, \ c', c'' \in \Pi_i^C, \ c', c''' \in \Pi_j^C. \qquad (5)$$

Пусть $a'', a''' \in A$ – прообразы элементов нетранзитивного триплета $c'', c''' \in C$, т.е. для них выполняются равенства $B(a'') = c''$, $B(a''') = c'''$. Тогда из них с учетом (5) получаем

$$F_{\Pi\,C}(a'', a') = F_{\Pi\,C}(a''', a') = 1\,,\ F_{\Pi\,C}(a'', a''') = 0\,,$$

но этого не может быть, поскольку $F_{\Pi\,Ca}$ – класс прообразов, содержащий a'' и a''', который является классом толерантности, что означает $F_{\Pi\,Ca}(a'', a''') = 1$.

Таким образом, получено противоречие, т.е. необходимость доказана.

Интерпретация доказанного утверждения 3 достаточно прозрачна: при рациональном разбиении диапазона изменения функции распределения яркостей можно получить «области сходства» на носителе изображения в виде естественным образом трактуемых классов толерантности.

Доказанное утверждение имеет очевидное

Следствие. Для любого функционального отношения покрытие Π_C (из смежных классов) совпадает с G_C (их классов толерантности) тогда и только тогда, когда оно индуцировано разбиением.

Необходимо подчеркнуть, что использование упорядоченной связности покрытия Π_C является принципиальным, так как если его исключить из рассмотрения, то совпадение классов образов и классов толерантности не гарантирует, что Π_C представляет собой разбиение. В качестве обоснования этого тезиса рассмотрим пример. Допустим, на множестве $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ задано покрытие Π_C, не являющееся упорядоченно связным (рис. 3). Элементы этого покрытия представляют собой двухэлементные подмножества

$$\Pi_C = \{\{c_1,c_2\},\{c_1,c_3\},\{c_1,c_4\},\{c_2,c_3\},\{c_2,c_4\},\{c_3,c_4\}\}.$$

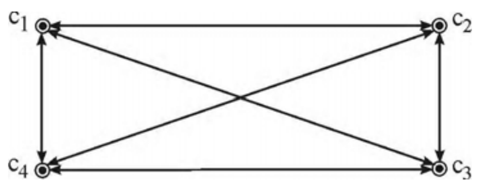

Рис. 3. Покрытие Π_C

Ясно, что оно не является упорядоченно связным, поскольку при любой нумерации элементов множества C соединение вершин графа по диагонали или по вертикали будет соответствовать элементу покрытия Π_C, содержащему два элемента с разрывом в их нумерации минимум на единицу. Нетрудно заметить, что это свойство сохранится и для произвольного конечного множества, если покрытие представляет собой полный граф, т.е. элемент покрытия – это любая пара $\{c_i, c_j\} \in \Pi_C$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$, $m = \operatorname{card} C$, а общее число элементов разбиения равно C_m^2 (рис. 4). Естественно, что покрытие Π_C не является разбиением. Однако смежные классы при любой функции $B: A \to C$ будут совпадать, более того, этих классов будет по одному, и они будут совпадать с C, поскольку толерантность (1) трансформируется в универсальное отношение. Действительно, если зафиксировать два произвольных элемента $a', a'' \in A$ и при любой функции B рассмотреть $B(a') = c_i \in C$, $B(a'') = c_j \in C$, то найдется элемент покрытия $\{c_i, c_j\} \in \Pi_C$. Тогда из (1) получаем $\Upsilon(a', a'')=1$, т.е. $\Upsilon \equiv 1$, что и объясняет существенность в утверждении 3. свойства упорядоченной связности покрытия Π_C.

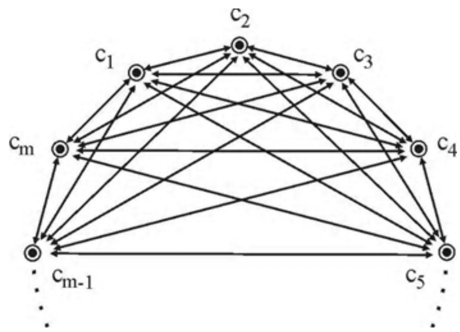

Рис. 4. Число элементов разбиения

На вопрос о связи классов толерантности и смежных классов отвечает следующее утверждение.

Утверждение 4. Любой смежный класс произвольного толерантного отношения содержит подмножество – класс толерантности, которому принадлежит элемент, порождающий данный смежный класс.

Доказательство. Действительно, зафиксируем произвольный элемент $a \in A$ и рассмотрим смежный класс H_a, ему соответствующий. Допустим, этот элемент принадлежит классу толерантности G_i^A, и $a' \in G_i^A$ – его произвольный элемент. Тогда, очевидно, $H(a, a') = 1$, поскольку это два элемента из одного класса толерантности. С другой стороны, $a' \in G_i^A$ как один из образов элемента a. В результате произвольный элемент $a' \in G_i^A$ лежит H_a, т.е. $G_i^A \subseteq H_a$, что и требовалось доказать.

4. Результаты и выводы

В работе изучены свойства отношений толерантности, возникающих при сегментации изображений с использованием реквантования. Необходимо подчеркнуть, что в качестве исходных данных следует использовать не столько входное изображение, сколько результаты его предварительной обработки в целях сокращения количества областей, покрывающих поле зрения. Так, для упрощения выбора покрытий диапазона изменения яркостей и исключения на первом этапе несущественных (мелких) деталей следует проводить фильтрацию изображений. На рис. 5 приведен пример медианной фильтрации (с окном 5×5). С одной стороны, ясно, что число классов эквивалентностей или толерантностей существенно сократится. С другой – очевидно, что результаты сегментации будут более достоверны, если их комбинировать (путем теоретико-множественных операций) с препаратом, полученным в результате подчеркивания контуров. На рис. 6 приведен пример результата сегментации (центральный фрагмент изображения, представленного на рис. 5). Анализ результатов сегментации показывает, что целесообразно применять итерационные процедуры сегментации, в частности, необходимо использовать пирамидальные представления изображений в целях уточнения требуемых в конечном итоге классов эквивалентности.

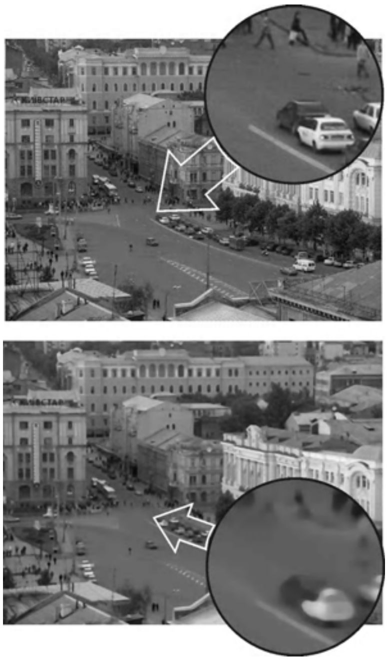

Рис. 5. Пример предварительной обработки

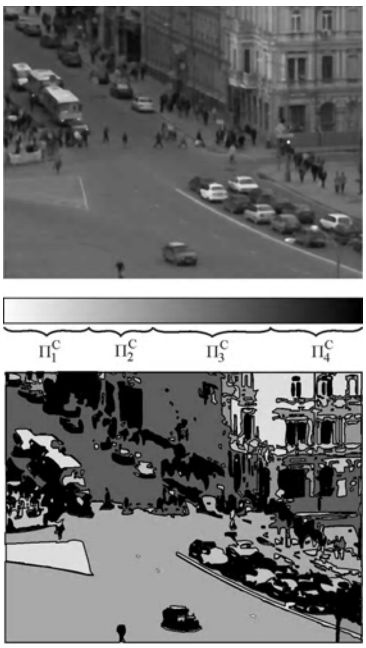

Рис. 6. Пример сегментации

Научная новизна работы состоит в том, что впервые установлены связи между покрытиями диапазона изменения яркостей и разбиениями поля зрения.

Практическая ценность заключается в том, что полученные в работе результаты позволяют синтезировать принципиально новые высокоэффективные алгоритмы сегментации с учетом реквантования изображений, что обеспечивает их различные варианты преобразований и интерпретации.

В качестве направления дальнейшего развития исследований следует указать необходимость изучения наборов операций с результатами частичной сегментации, базисных наборов отношений, что в результате создаст основу для рационального принятия решения об адекватности результатов кластеризации реальным объектам в поле зрения.

Литература: 1. *Путятин Е.П., Аверин С.И.* Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990. 320 с. **2.** *Форсайт Д., Понс Ж.* Компьютерное зрение. Современный подход. М.-СПб.-К.: Вильямс, 2004. 928 с. **3.** *Cinque L., Foresti G., Lombardi L.* A Clustering Fuzzy Approach for Image Segmentation // Pattern Recognition. 2004. Vol. 37, No 9. P. 1797-1807. **4.** *Ohkura K., Nishizawa H., Obi T., Hasegawa A., Yamaguchi M., Ohyama N.* Unsupervised Image Segmentation Using Hierarchical Clustering // Optical Review. 2000. Vol. 7, No. 3 P. 193-198. **5.** *Hermes L., Zųller T., Buhmann J.M.* Parametric Distributional Clustering for Image Segmentation // Computer Vision / *A. Heyden, G. Sparr, M. Nielsen, P. Johansen* (eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2002. Vol. 2352. P. 577-591. **6.** *Appleton B., Talbot H.* Globally Optimal Geodesic Active Contours // Journal of Mathematical Imaging and Vision. 2005. Vol. 23, No 1. P. 67-86. **7.** *Marfil R., Rodrнguez J.A., Bandera A., Sandoval F.* Bounded Irregular Pyramid: a New Structure for Color Image Segmentation // Pattern Recognition. 2004. Vol. 37, No 3. P. 623-626. **8.** *Bleau A., Leon L.J.* Watershed-Based Segmentation and Region Merging // Computer Vision and Image Understanding. 2000. Vol. 77, No 3. P. 317-370. **9.** *Haris K., Efstratiadis S.H., Maglaveras N.* Hybrid Image Segmentation Using Watersheds and Fast Region Merging // IEEE Transactions on Image Processing. 1998. Vol. 7, No 12. P. 1684-1699. **10.** *Carson C., Belongie B., Greenspan H., Malik J.* Blobworld: Image Segmentation Using Expectation-Maximization and its Application to Image Querying // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2002. Vol. 24, No 8. P. 1026-1038. **11.** *Wan S.Y., Higgins W.E.* Symmetric region growing // IEEE Transactions on Image Processing. 2003. Vol. 12, No 9. P. 1007-1015. **12.** *Liu L., Sclaroff S.* Deformable Model-Guided Region Split and Merge of Image Regions // Image and Vision Computing. 2004. Vol. 22, No 4. P. 343-354. **13.** *Shi J., Malik J.* Normalized Cuts and Image Segmentation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2000. Vol. 22, No. 8. P. 888-995. **14.** *Cheng H.D., Jiang X.H., Sun Y., Wang J.* Color Image Segmentation: Advances and Prospects // Pattern Recognition. 2001. Vol. 34, No 12 . P. 2259–2281. **15.** *Dai X.Y., Maeda J.* Unsupervised Segmentation of Natural Images // Optical Review. 2002. Vol. 9, No 5. P. 197-201. **16.** *Kukielka G., Woznicki J.* Hierarchical Method of Digital Image Segmentation Using Multidimensional Mathematical Morphology // Computer Analysis of Images and Patterns / *W. Skarbek* (ed.). Lecture Notes in Computer Science. 2001. Vol. 2124. P. 581-588. **17.** *Nikolaev D.P., Nikolayev P.P.* Linear Color Segmentation and its Implementation // Computer Vision and Image Understanding. 2004. Vol. 94, No 1-3. P. 115-139. **18.** *Zouagui T., Benoit-Cattin, Odet C.* Image Segmentation Functional

Model // Pattern Recognition. 2004. Vol. 37, No 9. P. 1785-1795. **19.** *Frucci M., Ramella G., Sanniti di Baja G.* Oversegmentation Reduction Via Multiresolution Image Representation // Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications / A. Sanfeliu, M.L. Cortйs (eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3773. P. 989-996. **20.** *Yang X., Krishnan S.M.* Image Segmentation Using Finite Mixtures and Spatial Information // Image and Vision Computing. 2004. Vol. 22, No 9. P. 735-745. **21.** *Sifakis E., Garcia C., Tziritas G.* Bayesian Level Sets for Image Segmentation / / Journal of Visual Communication and Image Representation. 2002. Vol. 13, No 1-2. P. 44-64. **22.** *Deng H., Clausi D.A.* Unsupervised Image Segmentation Using a Simple MRF Model with a New Implementation Scheme // Pattern Recognition. 2004. Vol. 37, No 12. P. 2323-2335. **23.** *Hafiane A., Zavidovique B.* FCM with Spatial and Multiresolution Constraints for Image Segmentation // Image Analysis and Recognition / M. Kamel, A. Campilho (eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3656. P.17–24. **24.** *Celeux G., Forbes F., Peyrard N.* EM Procedures Using Mean Field-Like Approximations for Markov Model-Based Image Segmentation // Pattern Recognition. 2003. Vol. 36, No 1. P. 131-144. **25.** *Choi H., Baraniuk R.* Multiscale Image Segmentation Using Wavelet-Domain Hidden Markov Models // IEEE Transactions on Image Processing. 2001. Vol. 10, No 9. P. 1309-1321. **26.** *Kermad C.D., Chehdi K.* Automatic Image Segmentation System Through Iterative Edge–Region Co-operation // Image and Vision Computing. 2002. Vol. 20, No 8. P. 541-555. **27.** *Brox T., Weicker J.* Level Set Based Image Segmentation with Multiple Regions // Pattern Recognition / *C.-E. Rasmussen, H. Bьlthoff, M. Giese, B. Schцlkopf* (eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2004. Vol. 3175. P. 415-423. **28.** *Cremers D.* A Multiphase Level Set Framework for Variational Motion Segmentation // Scale Space Methods in Computer Vision / *L.D. Griffin, M. Lillholm* (eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2003. Vol. 2695. P. 599-614. **29** .*Saha P.K., Udupa J.K., Odhner D.* Scale-Based Fuzzy Connected Image Segmentation: Theory, Algorithms, and Validation // Computer Vision and Image Understanding. 2000. Vol. 77, No 2. P. 145-174.

Поступила в редколлегию 13.06.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Бодянский Е.В.

Машталир Владимир Петрович, д-р техн. наук, проф. кафедры информатики ХНУРЭ. Научные интересы: распознавание изображений. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 7021–419, e-mail: Mashtalir@kture.kharkov.ua

Чупиков Андрей Николаевич, аспирант кафедры информатики ХНУРЭ. Научные интересы: обработка изображений. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 7021–419, e-mail: AndrewChupikov@rambler.ru.

УДК 519.85

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ЗАДАЧАХ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЗАЩИТЫ

НОВОЖИЛОВА М.В., ОВЕЧКО К.А.

Рассматривается применение методики теории игр для решения задач защиты информации. Использование такой теории позволяет ответить на множество вопросов, связанных с антагонистической структурой данной проблемы, и предоставить обоснованные решения.

Введение

Современное развитие информационных технологий создало ряд проблем, связанных с информационной безопасностью. Резкий рост компьютерной преступности [8] ставит под угрозу не только выгоду от использования информационных систем (ИС), но и может привести к значительным потерям.

На сегодняшний день защита информации является острой проблемой как для отдельных организаций, так и для государства в целом. Серьезность этой проблемы нашла отражение во многих публикациях и исследованиях ученых [1,5,7,9], многие предприятия и организации вопрос ее решения определяют как наиболее приоритетный.

Несмотря на огромные усилия, направленные на решение данной проблемы, использование новейших разработок в подходах и технологиях защиты информации, она остается актуальной и не теряет своей остроты [2,6].

Как отмечает специализированная литература [1], сложность задачи защиты информации продиктована трудностью её формализации и антагонистической природой самой проблемы. К сожалению, большинство разработанных и рассматриваемых в литературе методов [1,4,7] не учитывают антагонистические особенности задач защиты информации и поэтому могут привести к низкой эффективности в их использовании.

Целью работы является повышение эффективности решений вопросов защиты информации путем применения адаптированных методов теории игр.

В предлагаемой статье авторы ставят перед собой следующие задачи: 1) сформулировать проблемы, возникающие в процессе защиты информации; 2) подобрать методы теории игр [3,10,11,12], которые предоставят решения для отобранных проблем, и выполнить адаптацию этих методов; 3) предложить решение сформулированных проблем на конкретных примерах.

1. Классическая задача противодействия двух сторон «Предприниматель – Злоумышленник»

Наиболее распространенные постановки задач защиты информационной системы включают два субъекта: владелец информации (предприятие, государство) и злоумышленник (конкурент, иностранная служба разведки), пытающийся получить несанкционированный доступ к ресурсам информации. Формулировка задачи в контексте теории игр может выглядеть следующим образом.

Предприниматель имеет возможность: О – поставить систему защиты своего предприятия или Х – сэкономить на охране. Злоумышленник наблюда-