

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

### 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

#### Введение

В настоящее время метод конечных разностей (МКР) является наиболее распространенным численным методом моделирования электромагнитных явлений. Основные теоретические положения данного метода известны (см, напр., [1-3]). Однако практическая реализация МКР стала возможна только с появлением ЭВМ, обладающих высоким быстродействием и большой оперативной памятью. Первой такой попыткой стала работа Yee, в которой рассматривалась задача распространения электромагнитного импульса в однородной и изотропной среде в двумерном приближении [4]. Дальнейшее развитие МКР связано с работами Holland [5], Tumolillo [6], Merewether [7], Taflove [8]. В работе [9] было реализовано трехмерное решение однородной системы уравнений Максвелла с использованием численной схемы «leapfrog», ее интегрирования во времени. Необходимо отметить, что с момента появления данных работ методология МКР значительно расширилась и обогатилась. Появились различные модификации данного метода: гибридный метод, объединяющий метод конечных разностей с методом конечных элементов [10], PSTD – [11], ADI – [12], MRTD – методы [13]. Каждый такой подход позволяет улучшить традиционную разностную схему численного решения системы уравнений Максвелла. В последующих рассуждениях будем отталкиваться от положений, развитых в работах [4, 9].

В данной работе рассматриваются методология численного решения системы уравнений Максвелла для общего случая возбуждения электромагнитной волны заданным током (ток проводимости, конвекционный ток зарядов, движущихся в свободном пространстве) при соответствующих граничных условиях.

#### Постановка задачи

Для описания электромагнитных явлений в произвольной среде воспользуемся системой уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4)$$

где  $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля;  $\vec{H}$  – вектор напряженности магнитного поля;  $\vec{J} = \vec{J}_{\text{пров}} + \vec{J}_{\text{конв}} = \sigma \vec{E} + \rho \vec{v}$  – вектор плотности полного тока;  $\sigma$  – удельная проводимость среды;  $\vec{v}$  – вектор скорости движения заряженных частиц;  $\rho$  – объемная плотность заряда.

Уравнения (1) – (4) дополняются материальными уравнениями, описывающими среду, в которой распространяется электромагнитная волна. В общем случае эти уравнения для произвольной среды имеют вид:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная постоянные;  $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$  и  $\mu = \mu(x, y, z, t)$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для упрощения рассмотрения задачи возбуждения электромагнитной волны в произвольной среде полагаем, что в качестве среды выступает однородная и изотропная среда, свойства которой неизменны во времени и в пространстве, т.е.  $\varepsilon(x, y, z, t) = const$  и  $\mu(x, y, z, t) = const$ .

Для понимания логики построения конечно-разностной схемы распишем подробно систему уравнений в частных производных (1) – (4) с учетом материальных уравнений (5) и (6) в декартовой системе координат. По аналогии все проводимые далее рассуждения будут также справедливы и для других систем координат (например, цилиндрической и сферической). Имеем:

$$\vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = J_x\vec{i} + J_y\vec{j} + J_z\vec{k} + \frac{\partial D_x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial D_y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial D_z}{\partial t}\vec{k}, \quad (7)$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i}\right) + \left(-\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j}\right) + \left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}\right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$D_x\vec{i} + D_y\vec{j} + D_z\vec{k} = \varepsilon\varepsilon_0(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}), \quad (11)$$

$$B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} = \mu\mu_0(H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}), \quad (12)$$

где  $x, y, z$  – компоненты векторов напряженностей ( $\vec{E}, \vec{H}$ ) и индукций ( $\vec{D}, \vec{B}$ ) электрического и магнитного полей, соответственно, а также вектора полного тока  $\vec{J}$  по осям  $x, y, z$ . В результате имеем шесть дифференциальных уравнений для шести компонент электромагнитного поля, зависящих как от пространственных координат  $x, y$  и  $z$ , так и от времени  $t$ . Для перехода от непрерывного континуума по пространству и времени к дискретному воспользуемся пространственно-временной дискретизацией. Это означает, что все пространство вычисления вдоль координат  $x, y$  и  $z$  в произвольный текущий момент времени  $t_n$  покрывается равномерной сеткой  $(M, N, K)$ , где  $M, N$  и  $K$  – максимальный размер сетки разбиения соответственно вдоль осей  $x, y$  и  $z$ . В этом случае в узлах сетки разбиения в момент времени  $t_n$  значение любой физической величины  $A = f(x, y, z, t)$  трансформируется в  $A = f(i, j, k, t_n)$ . В результате получается следующее преобразование:  $f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \Rightarrow \Rightarrow f^n(i, j, k)$ , где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и  $\Delta t$  – шаги дискретизации соответственно по осям координат  $x, y, z$  и по оси времени  $t$ . Для определения значений пространственных производных в каждом узле сетки используем информацию о значениях искомой компоненты поля в соседних узлах сетки разбиения. При этом рассматриваются двухточечная и трехточечная разностные аппроксимации производных [14]. С учетом минимизации вычислительной неустойчивости более предпочтительной оказывается трехточечная аппроксимация производных или применение шаблона типа «крест» [15], который и будет использоваться в дальнейших рассуждениях.

На рис. 1 показаны шаблоны типа «крест», применение которых позволяет осуществить переход по пространственным координатам  $x, y$  и  $z$  от системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений.

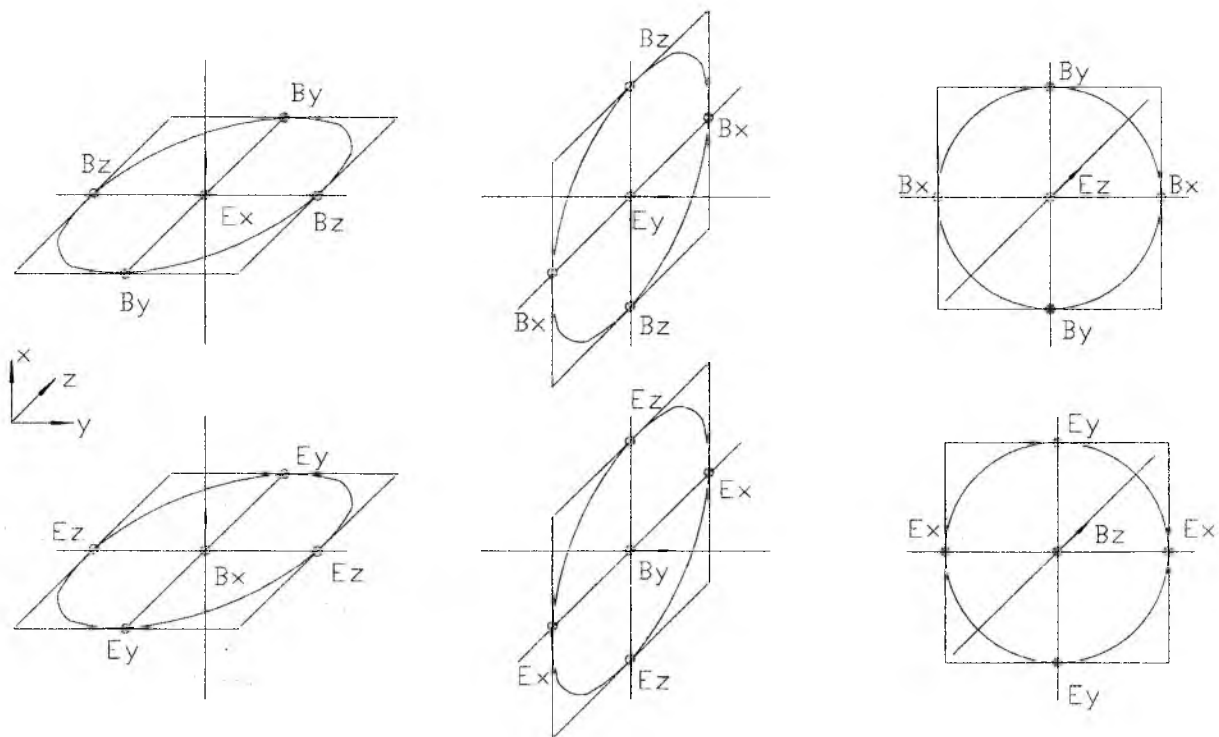


Рис. 1

Разбивая исследуемое пространство сеткой и фиксируя ее узел  $(i, j, k)$ , вычисляем  $x$ -компоненту электрического поля  $E_x$ . Для этого используем соответствующие компоненты индукции магнитного поля в соседних узлах сетки разбиения. Затем сделаем аналогичные действия для других компонент как электрического, так и магнитного полей.

На рис. 2 показан результат вышеприведенных действий – трехмерный шаблон, который используется для вычисления  $E_x$ . Аналогичный вид имеют трехмерные шаблоны для вычисления других компонент электрического поля.

После многократного повторения этой процедуры можно заметить следующую закономерность: каждому узлу пространственной сетки соответствует не более одной компоненты поля, и каждая компонента поля образует свою пространственную сетку с шагом, который в два раза превышает глобальный пространственный шаг  $\Delta x, \Delta y$  или  $\Delta z$ . На рис. 3 показана полученная таким образом сетка с пространственно разнесенными компонентами поля. Такой пространственный сдвиг компонент удобно использовать при задании граничных условий. Для этого необходимо определять значения величин поля не в каждом узле глобальной пространственной сетки, а на локальных решетках, соответствующих различным компонентам поля. Отсюда следует, что шаг вычисления по пространству должен быть равен двойному шагу глобальной пространственной сетки.

Для построения разностной схемы, которая соответствует такому шаблону, необходимо использовать узел привязки таким образом, чтобы при задании граничных условий соответствующие компоненты поля попадали на границы раздела. В качестве такого узла выбираем узел  $(i, j, k)$  сетки разбиения (рис. 3).

На рис. 4 показан результат построения шаблона разностной схемы по пространству для фиксированного момента времени (элементарная ячейка). Отметим, что такой шаблон

накладывает ограничения на граничные условия: граница области вычисления должна быть плоскостью, которая параллельна одной из осей координат.

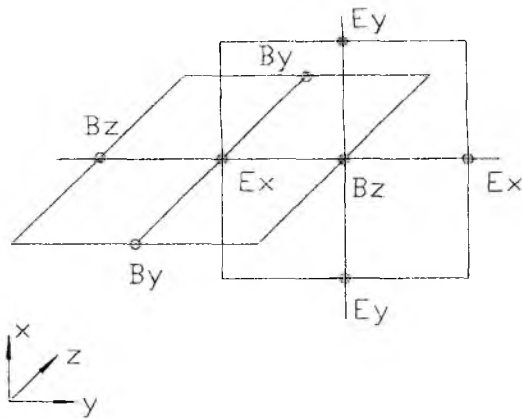


Рис. 2

Для конечно-разностной аппроксимации системы уравнений Максвелла во временной области используется трехточечная схема [14]. При этом электрические и магнитные составляющие электромагнитного поля определяются на разных временных шагах, а глобальный шаг вычисления становится равным  $2\Delta t$ . В этом случае обеспечивается значительная экономия вычислительных ресурсов, а также – снижается количество данных, необходимых для задания начальных условий ( $H^n, E^{n-1}$ , где  $n$  – текущий номер шага по времени).

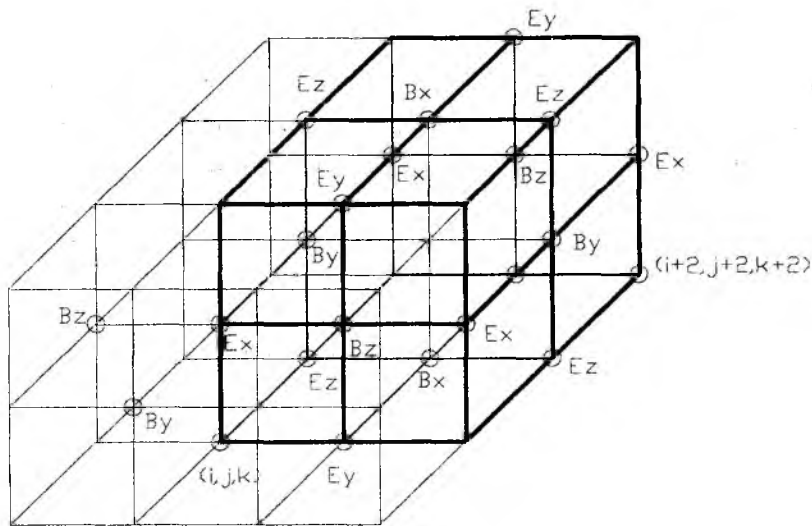


Рис. 3

Используя вышеуказанные соображения и уравнения (7) – (12), запишем их конечно-разностное представление в виде следующих выражений:

$$\frac{Hz_{(i+1,j+1,k)}^n - Hz_{(i+1,j-1,k)}^n}{2\Delta y} - \frac{Hy_{(i+1,j,k+1)}^n - Hy_{(i+1,j,k-1)}^n}{2\Delta z} = Jx_{(i+1,j,k)}^n + \epsilon_{(i+1,j,k)}^n \epsilon_0 \frac{Ex_{(j+1,j,k)}^{n+1} - Ex_{(i+1,j,k)}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (13)$$

$$\frac{Hx_{(i,j+1,k+1)}^n - Hx_{(i,j+1,k-1)}^n}{2\Delta z} - \frac{Hz_{(i+1,j+1,k)}^n - Hz_{(i-1,j+1,k)}^n}{2\Delta x} = Jy_{(i,j+1,k)}^n + \epsilon_{(i,j+1,k)}^n \epsilon_0 \frac{Ey_{(i,j+1,k)}^{n+1} - Ey_{(i,j+1,k)}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (14)$$

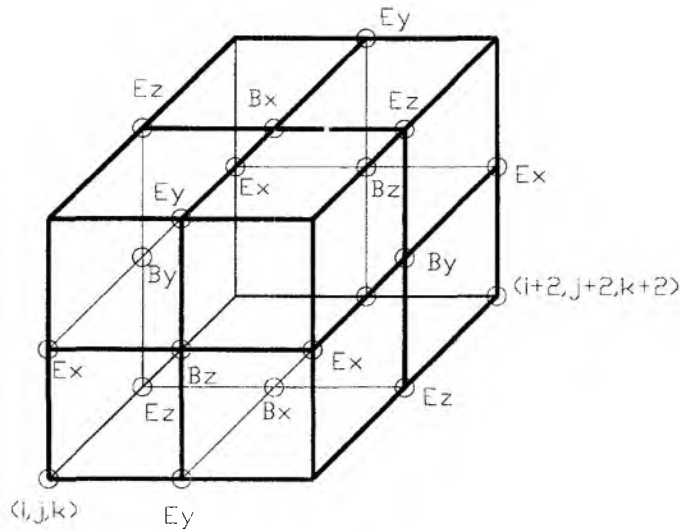


Рис. 4

$$\frac{Hy_{(i+1,j,k+1)}^n - Hy_{(i-1,j,k+1)}^n}{2\Delta x} - \frac{Hx_{(i,j+1,k+1)}^n - Hx_{(i,j-1,k+1)}^n}{2\Delta y} = Jz_{(i,j,k+1)}^n + \varepsilon_{(i,j,k+1)}^n \varepsilon_0 \frac{Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1)}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (15)$$

$$\frac{Ez_{(i,j+2,k+1)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1}}{2\Delta y} - \frac{Ey_{(i,j+1,k+2)}^{n+1} - Ey_{(i,j+1,k)}^{n+1}}{2\Delta z} = \mu_{(i,j+1,k+1)}^n \mu_0 \frac{Hx_{(i,j+1,k+1)}^{n+2} - Hx_{(i,j+1,k+1)}^n}{2\Delta t}, \quad (16)$$

$$\frac{Ex_{(i+1,j,k+2)}^{n+1} - Ex_{(i+1,j,k)}^{n+1}}{2\Delta z} - \frac{Ez_{(i+2,j,k+1)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1}}{2\Delta x} = \mu_{(i+1,j,k+1)}^n \mu_0 \frac{Hy_{(i+1,j,k+1)}^{n+2} - Hy_{(i+1,j,k+1)}^n}{2\Delta t}, \quad (17)$$

$$\frac{Ey_{(i+1,j,k+2)}^{n+1} - Ey_{(i+1,j,k)}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{Ez_{(i+2,j,k+1)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1}}{2\Delta x} = \mu_{(i+1,j,k+1)}^n \mu_0 \frac{Hx_{(i+1,j,k+1)}^{n+2} - Hx_{(i+1,j,k+1)}^n}{2\Delta t}. \quad (18)$$

Таким образом полученные выражения (13) – (18) представляют собой конечно-разностную систему алгебраических уравнений, соответствующих системе уравнений Максвелла в декартовой системе координат. Окончательно выражения для составляющих напряженностей электрического и магнитного полей, записанные в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат приведены в Приложении.

### Критерий стабильности Куранта

Разбивая область вычисления равномерной конечно-разностной сеткой, необходимо учитывать, что размеры ячеек сетки не должны быть определенного размера, такого, чтобы как можно больше учесть информацию между узлами сетки. Очевидно, что пространственные приращения (инкременты)  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  должны быть лишь некоторой малой частью волны. С точки зрения процесса вычисления это означает необходимость обеспечения связи между пространственным шагом и шагом по времени [2]. Такая связь выражается критерием стабильности Куранта и математически записывается в следующем виде

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} > c\Delta t, \quad (19)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

С учетом возможной дисперсии среды выражение (19) можно записать в более приемлемом виде

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} > v_\phi \Delta t, \quad (20)$$

где  $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  – фазовая скорость электромагнитной волны в данной среде.

С одной стороны соотношение (20) налагает ограничения на вариации значений  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  в зависимости от значения  $\Delta t$  и, с другой стороны, позволяет привести в соответствие значение этих параметров.

Таким образом, получены основные конечно-разностные уравнения для электромагнитного поля в наиболее распространенных на практике системах координат: декартовой, цилиндрической и сферической. Для выбора пространственного и временного шагов аппроксимации сформулировано условие Куранта, определяющее связь между пространственными и временными параметрами дискретизации пространства и времени.

**Список литературы:** 1. *Kron G.* // Proceedings IRE. 1944, № 32, p. 289. 2. *Вазов В., Форсайт Дж.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1963. 365 с. 3. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1974. 616 с. 4. *Yee K. S.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. // IEEE Transactions Antennas and Propagation. 1966. N 14. P. 302 – 307. 5. *Holland R.* IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24 (1977), 2416. 6. *Tumolillo T. A. and Wondra J.P.* IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24 (1977), 82. 7. *Merewether D. E. and Fisher R.* EMA Final Report, EMA-79-R-4, 1980. 8. *Taflove A., Brodwin M. E.* IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-23 (1975). 623. 9. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 637 с. 10. *Yee K. S., Chen J. S.* Conformal hybrid finite difference time domain and finite volume time domain. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 42, NO. 10, October 1994. 11. *Liu Q. H.* The pseudospectral time-domain (PSTD) method: A new algorithm for solution of Maxwell's equations. // IEEE Antennas and Propagation Society Ink, vol. 1, pp. 122-125, 1997. 12. *Smith G. D.* Numerical solution of partial differential equations. Oxford, U.K.: Oxford Univ. Press, 1965. 13. *Krumpholz M., Kateni L. P. B.* MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 44, pp. 555 – 571, Apr. 1996. 14. *Помтпер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 391 с. 15. *Турчак Л. И.* Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.

## Приложение

### Декартова система координат

$$E_{x(i+1,j,k)}^{n+1} = E_{x(i+1,j,k)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_{(i+1,j,k)}} \times \\ \times \left[ -J_{x(i+1,j,k)}^n + \frac{1}{2\Delta y} (H_z^n_{(i+1,j+1,k)} - H_z^n_{(i+1,j-1,k)}) - \frac{1}{2\Delta z} (H_y^n_{(i+1,j,k+1)} - H_y^n_{(i+1,j,k-1)}) \right],$$

$$E_{y(i,j+1,k)}^{n+1} = E_{y(i,j+1,k)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_{(i,j+1,k)}} \times \\ \times \left[ -J_{y(i,j+1,k)}^n + \frac{1}{2\Delta z} (H_x^n_{(i+1,j+1,k+1)} - H_x^n_{(i+1,j+1,k-1)}) - \frac{1}{2\Delta x} (H_z^n_{(i+1,j,k)} - H_z^n_{(i-1,j,k)}) \right],$$

$$E_{z(i,j,k+1)}^{n+1} = E_{z(i,j,k+1)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_{(i,j,k+1)}} \times \\ \times \left[ -J_z^n_{(i,j,k+1)} + \frac{1}{2\Delta x} (H_y^n_{(i+1,j,k+1)} - H_y^n_{(i-1,j,k+1)}) - \frac{1}{2\Delta y} (H_x^n_{(i,j+1,k+1)} - H_x^n_{(i,j-1,k+1)}) \right],$$

$$Hx_{(i,j+1,k+1)}^{n+2} = Hx_{(i,j+1,k+1)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \mu_{(i,j+1,k+1)}^n} \left[ \frac{1}{2\Delta y} (Ez_{(i,j+2,k+1)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta z} (Ey_{(i,j+1,k+2)}^n - Ey_{(i,j+1,k)}^n) \right],$$

$$Hy_{(i+1,j,k+1)}^{n+2} = Hy_{(i+1,j,k+1)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \mu_{(i+1,j,k-1)}^{n+1}} \left[ \frac{1}{2\Delta z} (Ex_{(i+1,j,k+2)}^{n+1} - Ex_{(i+1,j,k)}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (Ez_{(i+2,j,k+1)}^n - Ez_{(i,j,k+1)}^n) \right],$$

$$Hz_{(i+1,j+1,k)}^{n+2} = Hz_{(i+1,j+1,k)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \mu_{(i+1,j+1,k)}^{n+1}} \left[ \frac{1}{2\Delta x} (Ey_{(i+2,j+1,k)}^{n+1} - Ey_{(i,j+1,k)}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta y} (Ex_{(i+1,j+2,k)}^n - Ex_{(i+1,j,k)}^n) \right],$$

### Цилиндрическая система координат

$$Er_{(i+1,j,k)}^{n+1} = Er_{(i+1,j,k)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{(i+1,j,k)}^n} \times \\ \times \left[ -Jr_{(i+1,j,k)}^n + \frac{1}{2\Delta \varphi} \frac{1}{\Delta r(i+1)} (Hz_{(i+1,j+1,k)}^n - Hz_{(i+1,j-1,k)}^n) - \frac{1}{2\Delta z} (H\varphi_{(i+1,j,k+1)}^n - H\varphi_{(i+1,j,k-1)}^n) \right],$$

$$E\varphi_{(i,j+1,k)}^{n+1} = E\varphi_{(i,j+1,k)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{(i,j+1,k)}^n} i\Delta r \times \\ \times \left[ -J\varphi_{(i,j+1,k)}^n i\Delta r + \frac{1}{2\Delta z} (Hr_{(i,j+1,k+1)}^n - Hr_{(i,j+1,k-1)}^n) - \frac{1}{2\Delta r} (Hz_{(i+1,j+1,k)}^n - Hz_{(i-1,j+1,k)}^n) \right],$$

$$Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1} = Ez_{(i,j,k+1)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{(i,j,k+1)}^n} \times \\ \times \left[ -Jz_{(i,j,k+1)}^n + \frac{1}{2\Delta r} \frac{1}{i\Delta r} (H\varphi_{(i+1,j,k+1)}^n (i+1)\Delta r - H\varphi_{(i-1,j,k+1)}^n (i-1)\Delta r) - \frac{1}{2\Delta \varphi} (Hr_{(i,j+1,k+1)}^n - Hr_{(i,j-1,k+1)}^n) \right],$$

$$Hr_{(i,j+1,k+1)}^{n+2} = Hr_{(i,j+1,k+1)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \mu_{(i,j+1,k+1)}^{n+1}} \times \\ \times \left[ \frac{1}{2\Delta \varphi} \frac{1}{i\Delta r} (Ez_{(i,j+2,k+1)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1)}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta z} (E\varphi_{(i,j+1,k+2)}^n - E\varphi_{(i,j+1,k)}^n) \right],$$

$$H\varphi_{(i+1,j,k+1)}^{n+2} = H\varphi_{(i+1,j,k+1)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \mu_{(i+1,j,k+1)}^{n+1}} (i+1)\Delta r \times \\ \times \left[ \frac{1}{2\Delta z} (Er_{(i+1,j,k+2)}^{n+1} - Er_{(i+1,j,k)}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta r} (Ez_{(i+2,j,k+1)}^n - Ez_{(i,j,k+1)}^n) \right],$$

$$Hz_{(i+1,j+1,k)}^{n+2} = Hz_{(i+1,j+1,k)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \mu_{(i+1,j+1,k)}^{n+1}} \times \\ \times \left[ \frac{1}{2\Delta r} \frac{1}{(i+1)\Delta r} (E\varphi_{(i+2,j+1,k)}^{n+1} (i+2)\Delta r - E\varphi_{(i,j+1,k)}^{n+1} i\Delta r) - \frac{1}{2\Delta \varphi} (Er_{(i+1,j+2,k)}^n - Er_{(i+1,j,k)}^n) \right].$$

Сферическая система координат

$$Er_{(i+1,j,k)}^{n+1} = Er_{(i+1,j,k)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_{(i+1,j,k)}^n} \frac{1}{(i+1)\Delta r \cdot \sin(j\Delta\theta)} \times$$

$$\times \left[ -Jr_{(i+1,j,k)}^n (i+1)\Delta r \cdot \sin(j\Delta\theta) + \frac{1}{2\Delta\theta} \left( \frac{H\varphi_{(i+1,j+1,k)}^n \sin((j+1)\Delta\theta) -}{-H\varphi_{(i+1,j-1,k)}^n \sin((j-1)\Delta\theta)} \right) - \frac{1}{2\Delta\varphi} (H\theta_{(i+1,j,k+1)}^n - H\theta_{(i+1,j,k-1)}^n) \right],$$

$$E\theta_{(i,j+1,k)}^{n+1} = E\theta_{(i,j+1,k)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_{(i,j+1,k)}^n} \frac{1}{i^2 (\Delta r)^2} \times$$

$$\times \left[ -J\theta_{(i,j+1,k)}^n i^2 (\Delta r)^2 + \frac{1}{2\Delta\varphi \sin((j+1)\Delta\theta)} (Hr_{(i,j+1,k+1)}^n - Hr_{(i,j+1,k-1)}^n) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\Delta r} (H\varphi_{(i+1,j+1,k)}^n (i+1)\Delta r - H\varphi_{(i-1,j+1,k)}^n (i-1)\Delta r) \right],$$

$$E\varphi_{(i,j,k+1)}^{n+1} = E\varphi_{(i,j,k+1)}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_{(i,j,k+1)}^n} \frac{1}{i^2 (\Delta r)^2 \cdot \sin(j\Delta\theta)} \times$$

$$\times \left[ -J\varphi_{(i,j,k+1)}^n i^2 (\Delta r)^2 \cdot \sin(j\Delta\theta) + \frac{1}{2\Delta r} (H\theta_{(i+1,j,k+1)}^n (i+1)\Delta r - H\theta_{(i-1,j,k+1)}^n (i-1)\Delta r) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\Delta\theta} (Hr_{(i,j+1,k+1)}^n - Hr_{(i,j+1,k-1)}^n) \right],$$

$$Hr_{(i,j+1,k+1)}^{n+2} = Hr_{(i,j+1,k+1)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_o \mu_{(i,j+1,k+1)}^{n+1}} \frac{1}{i\Delta r \cdot \sin((j+1)\Delta\theta)} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2\Delta\theta} \left( \frac{E\varphi_{(i,j+2,k+1)}^{n+1} \sin((j+2)\Delta\theta) -}{-E\varphi_{(i,j,k+1)}^{n+1} \sin(j\Delta\theta)} \right) - \frac{1}{2\Delta\varphi} (E\theta_{(i,j+1,k+2)}^n - E\theta_{(i,j+1,k)}^n) \right],$$

$$H\theta_{(i+1,j,k+1)}^{n+2} = H\theta_{(i+1,j,k+1)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_o \mu_{(i+1,j,k+1)}^{n+1}} \frac{1}{(i+1)^2 (\Delta r)^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2\Delta\varphi \sin(j\Delta\theta)} (Er_{(i+1,j,k+2)}^{n+1} - Er_{(i+1,j,k)}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta r} (E\varphi_{(i+2,j,k+1)}^n (i+2)\Delta r - E\varphi_{(i,j,k+1)}^n i\Delta r) \right],$$

$$H\varphi_{(i+1,j+1,k)}^{n+2} = H\varphi_{(i+1,j+1,k)}^n + \frac{2\Delta t}{\mu_o \mu_{(i+1,j+1,k)}^{n+1}} \frac{1}{(i+1)^2 (\Delta r)^2 \cdot \sin((j+1)\Delta\theta)} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{E\theta_{(i+2,j+1,k)}^{n+1} (i+2)\Delta r -}{-E\theta_{(i,j+1,k)}^{n+1} i\Delta r} \right) - \frac{1}{2\Delta\theta} (Er_{(i+1,j+2,k)}^n - Er_{(i+1,j,k)}^n) \right].$$