

А. И. ЛУЧАНИНОВ, д-р. физ.-мат. наук, А. А. КОНОВАЛЬЦЕВ, канд. техн. наук,
Ю. А. ЛУЧАНИНОВ, М. А. ОМАРОВ, канд. техн. наук, В. М. ШОКАЛО, д-р. техн. наук

АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ЭКВИДИСТАНТНОЙ РЕШЕТКИ ЛЕНТОЧНЫХ МИКРОПОЛОСКОВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, АДАПТИРОВАННЫЙ К РАСЧЕТУ КРУПНОАПЕРТУРНЫХ АНТЕНН С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

3. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

6. Выбор системы базисных функций и формирование матрицы импедансов

Одним из исходных факторов, определяющих эффективность решения системы интегральных уравнений (ИУ) типа (17, [1]) методом Галеркина, является выбор типа ортогонального базиса, по которому выполняется разложение искомой функции тока (1, [2]). При построении универсальных алгоритмов, позволяющих рассчитывать характеристики излучателей произвольной конфигурации, наиболее целесообразно использовать в качестве базисных так называемые функции подобластей [3], определенные на всей длине излучателя, но отличные от нуля только на отдельных его участках. Применение функций такого типа, сохраняющих непрерывность в точках соединения двух и более проводников, автоматически обеспечивает выполнение закона Кирхгофа в узлах. В случае разложения функции, описывающей распределение тока, по функциям полной области в систему уравнений, полученную в соответствии с изложенной в [1] процедурой, необходимо дополнительно включать уравнения, которые устанавливают соотношения между токами входящих в каждый узел излучателя ветвей. Очевидно, что при этом для каждой новой конфигурации излучателя система уравнений будет принимать новый вид, а следовательно, не будет соблюден принцип универсальности разрабатываемого алгоритма.

Достоинством кусочного базиса является также возможность уже на этапе описания модели анализируемого излучателя выделить в нем подпоследовательности базисных функций, характеризующих токи разомкнутых ветвей, а также внутренних и внешних узлов, что, как будет показано ниже, позволит более оптимально организовать процедуру решения исходной системы ИУ и расчета внешних параметров антенны.

Из функций указанного типа наиболее предпочтительными оказываются кусочно-синусоидальные. Использование их позволяет ускорить процесс решения ИУ по сравнению со случаем кусочно-треугольного и кусочно-постоянного базисов соответственно в 3...5 и 6...8 раз. Кроме того, если в качестве базиса выбраны кусочно-синусоидальные функции, на свободных концах проводников излучателя автоматически обеспечивается выполнение условия обращения в нуль протекающих по ним токов. Заметим также, что использование кусочно-синусоидальных базисных функций (БФ) позволяет получить достаточно простые аналитические выражения для спектральных плотностей собственных и взаимных сопротивлений и сократить объем и время вычислений.

Определим n -ую БФ кусочно-синусоидального базиса следующим образом:

$$\bar{\varphi}_n(\xi) = \frac{\sin(\xi_n - l_n)}{\sin l_n} \bar{\xi}_0^{(n)} + \frac{\sin(l_{n+1} - \xi_{n+1})}{\sin l_{n+1}} \bar{\xi}_0^{(n+1)}, \quad (1)$$

где $\bar{\xi}_0^{(n)}$, $\bar{\xi}_0^{(n+1)}$ - ориентированные вдоль оси излучателя единичные векторы, общим началом которых является центр БФ (общая точка соседних сегментов, на которых определена функция $\bar{\varphi}_n$); ξ_n , ξ_{n+1} - координаты, отсчитываемые в местной системе координат, связанной с n -ой БФ, в направлении векторов $\bar{\xi}_0^{(n)}$ и $\bar{\xi}_0^{(n+1)}$ соответственно; l_n , l_{n+1} - длины сегментов, на которых определена n -ая базисная функция тока. При этом очевидно, что в наиболее общем случае для полного формирования матрицы импедансов $[Z]$ уравнения (17, [2]) достаточно определить взаимное сопротивление между двумя элементарными токами, которые характеризуются функциями в виде четверти периода синусоиды (одно из слагаемых в (1)). Для этого подставим выражения для $\bar{\varphi}_k(\xi)$ и $\bar{\varphi}_l(\xi')$ в (3, [2]) и (9, [2]) и выполним соответствующие операции интегрирования и суммирования, в результате чего

получим следующее выражение для спектральной плотности взаимного сопротивления указанных элементов тока:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{kl}(\alpha, \beta) = & \frac{jZ_c^i}{d_p d_q \sin \alpha_r \sin l_k \sin l_l} \times \\ & \times \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\cos(\varphi_k - \varphi_l) - \delta_k^{\nu\mu} \delta_l^{\nu\mu} \right] \cdot Q_{\nu\mu} - \gamma_i^{\nu\mu} \delta_k^{\nu\mu} \delta_l^{\nu\mu} F_{\nu\mu} \right\} \times \\ & \times \frac{\exp(-j\delta_k^{\nu\mu} l_k) - \cos(l_k) + i\delta_k^{\nu\mu} \sin l_k}{1 - (\delta_k^{\nu\mu})^2} \cdot \frac{\exp(i\delta_l^{\nu\mu} l_l) - \cos(l_l) - i\delta_l^{\nu\mu} \sin l_l}{1 - (\delta_l^{\nu\mu})^2} \times \\ & \times \frac{\sin(\Delta_k^{\nu\mu} b_s)}{\Delta_k^{\nu\mu} b_s} \cdot \frac{\sin(\Delta_l^{\nu\mu} b_s)}{\Delta_l^{\nu\mu} b_s} \cdot \exp\left\{ \left[\chi_1^{\nu} (x_k - x_l) + \chi_2^{\nu\mu} (y_k - y_l) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Z_c^i - характеристическое сопротивление материала i -го слоя подложки, в котором находится точка наблюдения; l_k, l_l - длины сегментов, на которых определены функции $\bar{\varphi}_k(\xi)$ и $\bar{\varphi}_l(\xi)$; φ_k, φ_l - углы между осью x , введенной в разделе 1 прямоугольной системы координат, и векторами $\bar{\xi}_0^k$ и $\bar{\xi}_0^l$ соответственно; $Q_{\nu\mu}, F_{\nu\mu}$ - коэффициенты, значения которых определяются геометрией и материальными параметрами подложки AP; x_k, y_k, x_l, y_l - координаты точек, принятых за начало k -ой и l -ой токовых функций;

$$\chi_1^{\nu} = S_x + \frac{2\pi\nu}{d_p}; \quad \chi_2^{\nu\mu} = S_y - \frac{2\pi\nu}{d_p \operatorname{tg} \alpha_r} + \frac{2\pi\mu}{d_p \sin \alpha_r} - \quad (3)$$

коэффициенты распространения в плоскости решетки;

$$\gamma_i^{\nu\mu} = \sqrt{(\chi_1^{\nu})^2 + (\chi_2^{\nu\mu})^2} - 1 - \quad (4)$$

коэффициент распространения в направлении нормали к плоскости решетки в i -ом слое подложки;

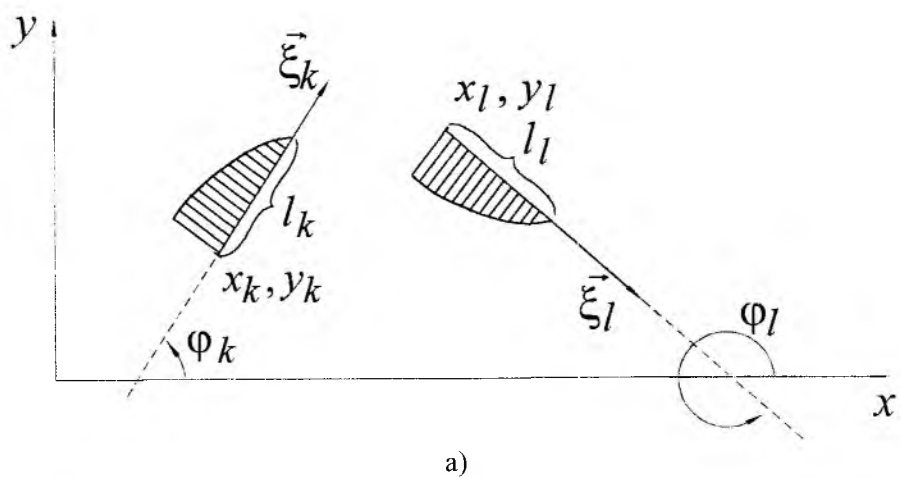
$$\delta_m^{\nu\mu} = \chi_1^{\nu} \cos \varphi_m + \chi_2^{\nu\mu} \sin \varphi_m, \quad m = k, l, \quad (5)$$

$$\Delta_m^{\nu\mu} = \chi_1^{\nu} \sin \varphi_m - \chi_2^{\nu\mu} \cos \varphi_m, \quad m = k, l. \quad (6)$$

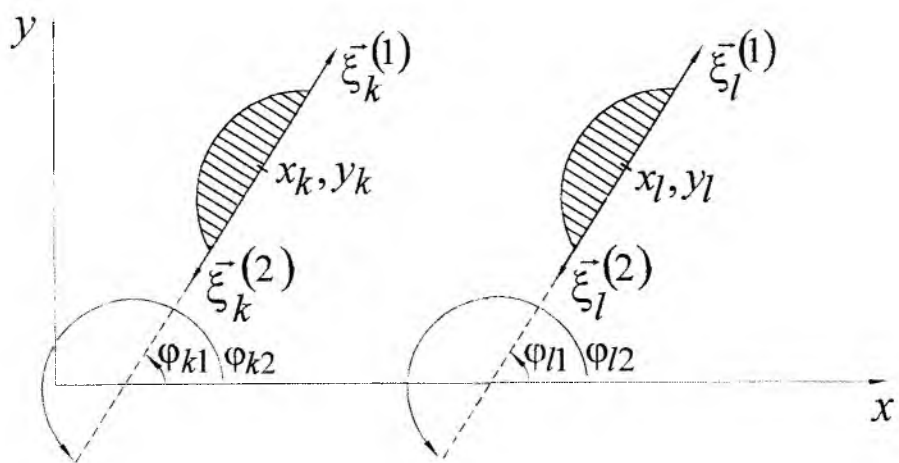
Однако непосредственно по (2) целесообразно рассчитывать только взаимные сопротивления токов в местах соединений проводников излучателя. Для вычисления взаимного сопротивления между элементарными токами, определенными на прямолинейных участках ветвей, целесообразно рассмотреть взаимное сопротивление токов, показанных на рис. 1 б,в. Очевидно, что спектральная плотность их взаимного сопротивления может быть определена как

$$\tilde{Z}_{kl}(\alpha, \beta) = -\tilde{Z}_{kl}^{11}(\alpha, \beta) - \tilde{Z}_{kl}^{22}(\alpha, \beta) + \tilde{Z}_{kl}^{12}(\alpha, \beta) + \tilde{Z}_{kl}^{21}(\alpha, \beta). \quad (7)$$

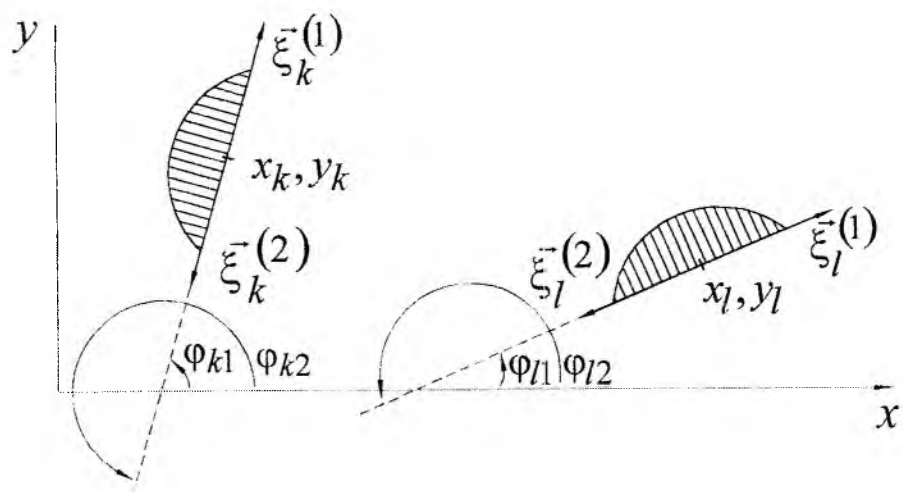
Слагаемые $\tilde{Z}_{kl}^{mn}(\alpha, \beta)$, $m = 1, 2$; $n = 1, 2$ в (7) представляют собой спектральные плотности собственных (при $m = n$) и взаимных (при $m \neq n$) сопротивлений между соответствующими элементами токов $\bar{\varphi}_k(\xi)$ и $\bar{\varphi}_l(\xi)$ и рассчитываются по (2). Выполнив суммирование, получим:



a)



б)



в)

Рис. 1

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{kl}(\alpha, \beta) = & \frac{-iZ_c^i}{d_p d_q \sin \alpha_r \sin l_k \sin l_l} \times \\ & \times \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\cos(\varphi_k - \varphi_l) - \delta_k^{\nu\mu} \delta_l^{\nu\mu} \right] \cdot Q_{\nu\mu} - \gamma_i^{\nu\mu} \delta_k^{\nu\mu} \delta_l^{\nu\mu} F_{\nu\mu} \right\} \times \\ & \times \frac{\cos(\delta_k^{\nu\mu} l_k) - \cos(l_k)}{1 - (\delta_k^{\nu\mu})^2} \cdot \frac{\cos(\delta_l^{\nu\mu} l_l) - \cos(l_l)}{1 - (\delta_l^{\nu\mu})^2} \cdot \frac{\sin(\Delta_k^{\nu\mu} b_s)}{\Delta_k^{\nu\mu} b_s} \cdot \frac{\sin(\Delta_l^{\nu\mu} b_s)}{\Delta_l^{\nu\mu} b_s} \times \\ & \times \exp \left\{ \left[\chi_1^{\nu} (x_k - x_l) + \chi_2^{\nu\mu} (y_k - y_l) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

В частном случае, когда токи $\bar{\varphi}_k(\xi)$ и $\bar{\varphi}_l(\xi)$ имеют одинаковую амплитуду и определены на идентичных параллельных сегментах (рис. 1, б), выражение (8) принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{kl}(\alpha, \beta) = & \frac{-i4Z_c^i}{d_p d_q \sin \alpha_r \sin^2 l} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[1 - \delta_{\nu\mu}^2 \right] \cdot Q_{\nu\mu} - \gamma_i^{\nu\mu} \delta_{\nu\mu}^2 F_{\nu\mu} \right\} \times \\ & \times \left[\frac{\cos(\delta_{\nu\mu} l) - \cos l}{1 - \delta_{\nu\mu}^2} \right]^2 \left[\frac{\sin(\Delta_{\nu\mu} b_s)}{\Delta_{\nu\mu} b_s} \right]^2 \exp \left\{ \left[\chi_1^{\nu} (x_k - x_l) + \chi_2^{\nu\mu} (y_k - y_l) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

При необходимости определения характеристик излучателя на сетке значений α и β (то есть для различных направлений прихода возбуждающей плоской волны) объем, а следовательно и время вычислений, может быть сокращено за счет частичного вычисления сумм в выражениях (2), (8) и (9). В работе [4] приведены данные по расчетам такого типа для решетки излучателей с прямоугольной сеткой. В случае решетки с произвольной ячейкой алгоритм вычисления элементов матрицы обобщенных импедансов (МОИ) на сетке значений α и β имеет особенности, суть которых заключается в необходимости рассчитывать значение границы области суммирования по переменной μ для каждого определенного значения переменной ν .

Суммы в (2), (8) и (9) можно представить в виде нескольких частичных сумм, которые, в свою очередь, объединяются в две подгруппы:

$$S_i(\theta_0, \varphi_0) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-M_{\min}}^{M_{\min}} + \sum_{\nu=-N_{\min}}^{N_{\min}} \sum_{\mu=-\infty}^{-M_{\min}-1} + \sum_{\nu=-N_{\min}}^{\infty} \sum_{\mu=-M_{\min}-1}^{\infty} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} S_2(\theta_0, \varphi_0) = & \sum_{\nu=-\infty}^{-N_{\min}-1} \sum_{\mu=M_{\min}+1}^{\infty} + \sum_{\nu=N_{\min}+1}^{\infty} \sum_{\mu=M_{\min}+1}^{\infty} + \\ & + \sum_{\nu=-\infty}^{-N_{\min}-1} \sum_{\mu=-\infty}^{-M_{\min}-1} + \sum_{\nu=N_{\min}+1}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{-M_{\min}-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения под знаками сумм опущены для краткости записей.

Таким образом, в $S_2(\theta_0, \varphi_0)$ группируются слагаемые с индексами $|\nu| > N_{\min}$ и $|\mu| > M_{\min}$, а в $S_1(\theta_0, \varphi_0)$ - все остальные. Поскольку зависимость элементов МОИ $\tilde{z}_{kl}(\alpha, \beta)$ от θ_0 и φ_0 определяется через параметры χ_1^{ν} и $\chi_2^{\nu\mu}$ (см. выражения (3)), значения N_{\min} и M_{\min} можно выбрать такими, что будут справедливы соотношения

$$1 \ll \frac{2\pi\nu}{d_p}, \quad (12)$$

$$1 \ll \left| \frac{2\pi\mu}{d_q \operatorname{tg}\alpha_r} - \frac{2\pi\nu}{d_p \operatorname{tg}\alpha_r} \right|. \quad (13)$$

При записи (12) и (13) учтено, что максимальное значение параметров S_x и S_y не может быть больше единицы. Кроме того, условие (13) может выполняться при любых μ и ν , если $d_q \sin \alpha_r \neq d_x \operatorname{tg} \alpha_r$. В противном случае может иметь место ситуация, когда правая часть этого неравенства обращается в нуль. Следовательно, элементы с индексами $\nu = (d_p/d_q \cos \alpha_r)$ также должны быть включены в сумму $S_1(\theta_0, \varphi_0)$.

Если выполняются условия (12) и (13), изменение значений S_x и S_y не оказывает существенно-го влияния на величину параметров χ_1^ν и $\chi_2^{\nu\mu}$. Очевидно, что при этом сумму $S_2(\theta_0, \varphi_0)$ достаточно вычислить только один раз при $\theta_0 = \varphi_0 = 0$, а приближенные значения элементов матрицы импедансов определять по формуле

$$\tilde{z}_{kl}(\alpha, \beta) = S_1(\theta_0, \varphi_0) + S_2(0, 0).$$

Численные эксперименты по оценке точности такого алгоритма вычисления элементов матрицы импедансов показали, что погрешность расчета не превышает 1%, если значения N_{\min} и M_{\min} составляют 20% от числа слагаемых по μ и ν , учитываемых при точном определении элементов $\tilde{z}_{kl}(\alpha, \beta)$. При этом время вычислений может быть уменьшено до 2,5 раз.

7. Определение тензорной функции Грина плоскостройной диэлектрической среды

Одним из существенных моментов при расчете микрополосковых антенн является определение тензорной функции Грина (ТФГ) многослойной плоскопараллельной диэлектрической среды, в виде которой моделируется их подложка. Скалярные элементы ТФГ могут быть представлены различными способами [5, 6, 7 и др.], в частности – как соответствующие компоненты электрического и/или магнитного векторного потенциалов некоторого локального распределения тока в одном из слоев диэлектрика.

Рассмотрим задачу возбуждения электромагнитного поля в среде, геометрия которой показана на рис. 2 из [1]. Пусть в i -ом слое в точке $M(x', y', z')$ расположен элементарный электрический диполь длиной dl , характеризуемый моментом $\vec{p} = j \cdot dl \cdot \vec{p}_0$, где j – плотность тока диполя, \vec{p}_0 – единичный вектор, характеризующий направление оси диполя. На бесконечности выполняются нулевые условия излучения, а на границах слоев – условия непрерывности векторов электромагнитного поля:

$$B_{\perp}^1 = 0; H_{\parallel}^1 = 0; E_{\parallel}^1 = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (14)$$

и

$$B_{\perp}^{n-1} = B_{\perp}^n; H_{\parallel}^{n-1} = H_{\parallel}^n; E_{\parallel}^{n-1} = E_{\parallel}^n \quad \text{при } z = z_n, \quad 2 \leq n \leq N, \quad (15)$$

где индексы \perp и \parallel соответственно обозначают нормальные и тангенциальные составляющие векторов.

Будем характеризовать поле в рассматриваемой среде электрическим векторным потенциалом \vec{A} , который удовлетворяет системе волновых уравнений

$$\Delta \vec{A}^n + k_n^2 \vec{A}^n = \begin{cases} 0 & , \text{ при } n \neq i; \\ -j \cdot \delta(x - x') \cdot \delta(y - y') \cdot \delta(z - z'), & \text{ при } n = i, \end{cases} \quad (16)$$

где $k_n = \omega \sqrt{\epsilon_n \mu_n}$ – волновое число, ω – круговая частота.

Из анализа геометрии задачи очевидно, что компоненты тока j_x и j_y порождают по две компоненты векторного потенциала: A_x, A_z и A_y, A_z соответственно, тогда как компонента тока j_z - только одну компоненту векторного потенциала: A_z . Следовательно, в наиболее общем виде искомую ТФГ можно представить следующей матрицей:

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ G_{xz} & G_{yz} & G_{zz} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

элементы G_{kl} которой представляют собой l -тые компоненты векторного потенциала \bar{A} , обусловленные k -ыми компонентами тока \bar{j} . В приложении к анализу плоской решетки микрополосковых излучателей непосредственный интерес представляют две пары элементов тензора: G_{xx}, G_{xz} и G_{yy}, G_{yz} . Последние имеют идентичный вид, поскольку среда неограничена в плоскости XOY . Таким образом, для решения задачи достаточно определить компоненты векторного потенциала, обусловленные током j_x .

С учетом изложенного систему волновых уравнений (16) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных компонент векторного потенциала A_x и A_z :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_x^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x^n}{\partial z^2} + k_n^2 A_x^n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq i; \\ -j \cdot \delta(x-x') \cdot \delta(y-y') \cdot \delta(z-z'), & \text{при } n = i; \end{cases} \\ \frac{\partial^2 A_z^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z^n}{\partial z^2} + k_n^2 A_z^n = 0, & \text{при } n = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (18)$$

Для представления граничных условий (14), (15) в терминах векторного потенциала воспользуемся известными из электродинамики соотношениями [8]

$$\begin{cases} \bar{H}^n = \text{rot} \bar{A}^n; \\ \bar{E} = \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_n} (\text{grad div} + k_n^2) \bar{A}^n; \quad n = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (19)$$

где \bar{H}^n и \bar{E}^n - векторы напряженности магнитного и электрического поля в n -ом слое диэлектрической структуры. В рассматриваемом случае $\bar{A}^n = A_x^n \bar{x}_0 + A_z^n \bar{z}_0$ и, следовательно, (19) принимает вид:

$$\begin{cases} \bar{H}^n = \frac{\partial A_z^n}{\partial y} \cdot \bar{x}_0 + \left(\frac{\partial A_x^n}{\partial z} - \frac{\partial A_z^n}{\partial x} \right) \cdot \bar{y}_0 - \frac{\partial A_x^n}{\partial y} \cdot \bar{z}_0, \quad n = \overline{1, N} \\ \bar{E} = \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{z}_0 \right) \left(\frac{\partial A_x^n}{\partial x} + \frac{\partial A_z^n}{\partial z} \right) + k_n^2 (A_x^n \cdot \bar{x}_0 + A_z^n \cdot \bar{z}_0) \right], \end{cases} \quad (20)$$

где $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, -орты осей x, y, z введенной прямоугольной системы координат.

На основании (20) получим следующие выражения для условий непрерывности векторов поля на границах слоев структуры:

$$\tilde{\mu}_1 \frac{\partial A_x^1}{\partial y} = 0; \frac{\partial A_x^1}{\partial z} = \frac{\partial A_z^1}{\partial x}; \frac{\partial A_z^1}{\partial y} = 0; \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x^1}{\partial x} + \frac{\partial A_z^1}{\partial z} \right) + k_1^2 A_x^1 = 0; \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x^1}{\partial x} + \frac{\partial A_z^1}{\partial z} \right) = 0 \text{ при } z = 0 \quad (21)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{n-1} \frac{\partial A_x^{n-1}}{\partial y} &= \tilde{\mu}_n \frac{\partial A_x^n}{\partial y}; \frac{\partial A_x^{n-1}}{\partial z} = \frac{\partial A_z^{n-1}}{\partial x} = \frac{\partial A_x^n}{\partial z} = \frac{\partial A_z^n}{\partial x}; \frac{\partial A_z^{n-1}}{\partial y} = \frac{\partial A_z^n}{\partial y}, \\ \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_{n-1}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x^{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial A_z^{n-1}}{\partial z} \right) + k_{n-1}^2 A_x^{n-1} \right] &= \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_n} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x^n}{\partial x} + \frac{\partial A_z^n}{\partial z} \right) + k_n^2 A_x^n \right], \\ \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_{n-1}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x^{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial A_z^{n-1}}{\partial z} \right) \right] &= \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_n} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x^n}{\partial x} + \frac{\partial A_z^n}{\partial z} \right) \right] \text{ при } z = z_n, n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, поле, создаваемое элементарным током j_x в слоистом диэлектрике, может быть определено в результате решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (18) при выполнении условий (21) и (22). Указанное решение будем искать в спектральной области, для чего представим компоненты векторного потенциала в виде интегрального разложения Фурье в однородном поперечном сечении структуры (плоскости XOY):

$$A_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int A_\alpha^n(x, y, z) \cdot \exp(-j\chi_1 x - j\chi_2 y) \cdot dx dy, \quad (23)$$

где индекс α может принимать значение x или y , а параметры χ_1 и χ_2 имеют смысл постоянных распространения в поперечном сечении. Неоднородность структуры в данном случае будет учитываться в характеристической части решения, связанной с координатой z .

В результате применения двукратного преобразования Фурье краевые задачи для уравнений в частных производных сводятся к более простым краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений следующего типа:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_x}{dz^2} - \gamma_n^2 A_x = \begin{cases} 0 & , \text{ при } n \neq i; \\ P_x \cdot \delta(z - z') & , \text{ при } n = i; \end{cases} \\ \frac{d^2 A_z}{dz^2} - \gamma_n^2 A_z = 0 & , \text{ при } n = \overline{1, N} \end{cases} \quad (24)$$

с соответствующими граничными условиями

$$A_x = 0, \quad \frac{dA_x}{dz} = 0, \quad A_z = 0, \quad \frac{dA_z}{dz} = 0, \quad \text{при } z = 0 \quad (25)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{n-1} A_x^{=n-1} &= \tilde{\mu}_n A_x^{=n}, \quad \frac{dA_x^{=n-1}}{dz} = \frac{dA_x^{=n}}{dz}, \quad A_z^{=n-1} = A_z^{=n}; \\ \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{n-1}} \left(\frac{dA_z^{=n-1}}{dz} + i\chi_1 A_x^{=n-1} \right) &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}_n} \left(\frac{dA_z^{=n}}{dz} + i\chi_1 A_x^{=n} \right) \text{ при } z = z_n, n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (26)$$

В уравнениях (24) $\gamma_n^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 - k_n^2$ имеет смысл постоянной распространения вдоль оси z , а

$$P_x = -\frac{j_x}{2\pi} \exp(-i\chi_1 x' - i\chi_2 y').$$

Решения для уравнений системы (24) хорошо известны и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \overset{=n}{A_x} = B_1^n \exp(\gamma_n z) + B_2^n \exp(-\gamma_n z), & n \neq i; \\ \overset{=i}{A_x} = B_1^i \exp(\gamma_i z) + B_2^i \exp(-\gamma_i z) - \frac{P_x}{2\gamma_i} \exp[-\gamma_i(z-z')m], & n = i; \\ \overset{=n}{A_z} = C_1^n \exp(\gamma_n z) + C_2^n \exp(-\gamma_n z), & 1 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (27)$$

где $m = \frac{(z-z')}{|z-z'|}$. С учетом нулевых условий излучения на бесконечности решения для слоя $n = N$ содержат только одно слагаемое:

$$\begin{cases} \overset{=N}{A_z} = B_2^N \exp(-\gamma_N z), \\ \overset{=N}{A_z} = C_2^N \exp(-\gamma_N z). \end{cases} \quad (28)$$

Неизвестные коэффициенты B_j^n и C_j^n ($1 \leq n \leq N, j=1,2$) определяются на основе заданных граничных условий путем подстановки выражений (27), (28) в уравнения (25), (26). В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_1^1 + B_2^1 &= 0; \quad \gamma_1 B_1^1 + \gamma_1 B_2^1 = j \left(1 + \frac{\chi_1}{\chi_2} \right), \\ \mu_1 (B_1^1 \exp(\gamma_1 z_2) + B_2^1 \exp(-\gamma_1 z_2)) &= \mu_2 (B_1^2 \exp(\gamma_2 z_2) + B_2^2 \exp(-\gamma_2 z_2)), \\ \gamma_1 (B_1^1 \exp(\gamma_1 z_2) + B_2^1 \exp(-\gamma_1 z_2)) &= \gamma_2 (B_1^2 \exp(\gamma_2 z_2) + B_2^2 \exp(-\gamma_2 z_2)), \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \mu_{i-1} (B_1^{i-1} \exp(\gamma_{i-1} z_i) + B_2^{i-1} \exp(-\gamma_{i-1} z_i)) &= \\ &= \mu_i \left(B_1^i \exp(\gamma_i z_i) + B_2^i \exp(-\gamma_i z_i) - \frac{P_x}{2\gamma_i} \exp(-\gamma_i z') \exp(\gamma_i z_i) \right), \\ \gamma_{i-1} (B_1^{i-1} \exp(\gamma_{i-1} z_i) + B_2^{i-1} \exp(-\gamma_{i-1} z_i)) &= \\ &= \gamma_i \left(B_1^i \exp(\gamma_i z_i) + B_2^i \exp(-\gamma_i z_i) - \frac{P_x}{2\gamma_i} \exp(-\gamma_i z') \exp(\gamma_i z_i) \right), \\ \mu_i \left(B_1^i \exp(\gamma_i z_{i+1}) + B_2^i \exp(-\gamma_i z_{i+1}) - \frac{P_x}{2\gamma_i} \exp(-\gamma_i z') \exp(\gamma_i z_{i+1}) \right) &= \\ &= \mu_{i+1} (B_1^{i+1} \exp(\gamma_{i+1} z_{i+1}) + B_2^{i+1} \exp(-\gamma_{i+1} z_{i+1})), \\ \gamma_i \left(B_1^i \exp(\gamma_i z_{i+1}) + B_2^i \exp(-\gamma_i z_{i+1}) - \frac{P_x}{2\gamma_i} \exp(-\gamma_i z') \exp(\gamma_i z_{i+1}) \right) &= \\ &= \gamma_{i+1} (B_1^{i+1} \exp(\gamma_{i+1} z_{i+1}) + B_2^{i+1} \exp(-\gamma_{i+1} z_{i+1})), \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
\mu_{N-2} & (B_1^{N-2} \exp(\gamma_{N-2} z_{N-1}) + B_2^{N-2} \exp(-\gamma_{N-2} z_{N-1})) = \\
& = \mu_{N-1} (B_1^{N-1} \exp(\gamma_{N-1} z_{N-1}) + B_2^{N-1} \exp(-\gamma_{N-1} z_{N-1})), \\
\gamma_{N-2} & (B_1^{N-2} \exp(\gamma_{N-2} z_{N-1}) + B_2^{N-2} \exp(-\gamma_{N-2} z_{N-1})) = \\
& = \gamma_{N-1} (B_1^{N-1} \exp(\gamma_{N-1} z_{N-1}) + B_2^{N-1} \exp(-\gamma_{N-1} z_{N-1})), \\
\mu_{N-1} & (B_1^{N-1} \exp(\gamma_{N-1} z_N) + B_2^{N-1} \exp(-\gamma_{N-1} z_N)) = \mu_N B_1^N \exp(-\gamma_N z_N), \\
\gamma_{N-1} & (B_1^{N-1} \exp(\gamma_{N-1} z_N) - B_2^{N-1} \exp(-\gamma_{N-1} z_N)) = -\gamma_N B_2^N \exp(-\gamma_N z_N), \\
& C_1^1 + C_2^1 = -i \frac{J}{\chi_2}; \quad \gamma_1 C_1^1 + \gamma_1 C_2^1 = 0; \\
& C_1^1 \exp(\gamma_1 z_2) + C_2^1 \exp(-\gamma_1 z_2) = C_1^2 \exp(\gamma_2 z_2) + C_2^2 \exp(-\gamma_2 z_2), \\
& \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\gamma_1 C_1^1 \exp(\gamma_1 z_2) - \gamma_1 C_2^1 \exp(-\gamma_1 z_2) + i \chi_1 A_x \Big|_{z=z_2}^{=1} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\gamma_2 C_1^2 \exp(\gamma_2 z_2) - \gamma_2 C_2^2 \exp(-\gamma_2 z_2) + i \chi_1 A_x \Big|_{z=z_2}^{=2} \right), \\
& \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
& \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
& C_1^{N-1} \exp(\gamma_{N-1} z_N) + C_2^{N-1} \exp(-\gamma_{N-1} z_N) = C_2^N \exp(-\gamma_N z_N), \\
& \frac{1}{\varepsilon_{N-1}} \left(\gamma_{N-1} C_1^{N-1} \exp(\gamma_{N-1} z_N) - \gamma_{N-1} C_2^{N-1} \exp(-\gamma_{N-1} z_N) + i \chi_1 A_x \Big|_{z=z_N}^{=N-1} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon_N} \left(-\gamma_N C_2^N \exp(-\gamma_N z_N) + i \chi_1 A_x \Big|_{z=z_N}^{=N} \right). \tag{29}
\end{aligned}$$

Из рассмотрения структуры записанной СЛАУ очевидно, что наиболее рационально определить сперва значения коэффициентов $B_j^n (j=1,2)$, решив первые $2(N-1)$ уравнений, а затем, подставив полученные при этом значения в оставшиеся уравнения системы, найти значения коэффициентов $C_j^n (j=1,2)$. Кроме того, диагональный характер матрицы записанной СЛАУ позволяет использовать при определении вектора неизвестных коэффициентов последней рекуррентный алгоритм, при помощи которого исходная задача сводится к решению последовательности систем двух уравнений с двумя неизвестными. Физическая интерпретация такого алгоритма заключается в пересчете параметров всех выше- и нижележащих слоев подложки к слою, в котором расположен рассматриваемый точечный источник тока.

Полученные в результате решения системы уравнений (29) значения коэффициентов B_j^n и $C_j^n (j=1,2)$ подставляются в соответствующие выражения для Фурье-образов компонент векторного потенциала (27) и (28). После применения к последним обратного преобразования Фурье имеем:

$$A_{x,y}^n = \frac{j_{x,y}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int VQ_n(\chi_1, \chi_2, z) \cdot \exp(i\chi_1(x-x') + i\chi_2(y-y')) \cdot d\chi_1 d\chi_2, \quad (30)$$

где

$$VQ_n(\chi_1, \chi_2, z) = \begin{cases} -\frac{\mu_i}{\mu_n} Q \frac{1 - \phi_n \exp[2\gamma_n(z_{n+1} - z)]}{1 - \phi_n} \exp[-\gamma_n(z_{n+1} - z)] \prod_{k=n+1}^{i-1} T_k, & 1 \leq n \leq i-1; \\ \frac{(1 - v_i^x) \left[\phi_i^e \exp[2\gamma_i(z - z_i) + 1] \right] \exp[-\gamma_i(z - z_i)]}{1 + v_i^x \phi_i^e} \frac{1}{2\gamma_i}, & n = i; \\ -\frac{\mu_i}{\mu_n} Q \frac{1 + \phi_n \exp[2\gamma_n(z_{n+1} - z)]}{1 + \phi_n} \exp[-\gamma_n(z - z_n)] \prod_{k=i+1}^{n-1} T_k, & i+1 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (31)$$

и

$$A_z^n(x, y, z) = \frac{j_{x,y}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [i\chi_1, 2VF_n(\chi_1, \chi_2, z) \cdot \exp(i\chi_1(x-x') + i\chi_2(y-y'))] \cdot d\chi_1 d\chi_2, \quad (32)$$

где

$$VF_n(\chi_1, \chi_2, z) = -\frac{\exp[-\gamma_n(z - z_n)]}{1 + \xi_n} \{ R_n d_{n+1} [\xi_n + \exp[-2\gamma_n(z_{n+1} - z)]] + [1 - \exp[-2\gamma_n(z_{n+1} - z)]] \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \xi_k) S_k \prod_{l=k+1}^{n-1} R_l \exp(-\gamma_l h_l) - \exp[-\gamma_n(z_{n+1} - z)] \cdot [1 + \xi_n \exp[2\gamma_n(z_{n+1} - z)]] \sum_{k=n}^{N-1} S_k d_{k+1} \prod_{l=n+1}^k T_l, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (33)$$

Переменные в (31) и (33) определяются следующим образом:

$$Q_1 = \frac{1}{2\gamma_i} \frac{(v_i^x - 1)(\phi_i^e + 1)}{1 + v_i^x \phi_i^e}, \quad (34)$$

$$Q_2 = \frac{\exp(-\gamma_i h_i) (v_i^x - 1)(\phi_i^e + 1)}{2\gamma_i (1 + v_i^x \phi_i^e)}, \quad (35)$$

$$T_k = \begin{cases} \frac{1 - v_k}{1 - \phi_k} \exp(-\gamma_k h_k), & 1 \leq k \leq i-1; \\ \frac{1 + v_k}{1 + \phi_k} \exp(-\gamma_k h_k), & i+1 \leq k \leq N-1, \end{cases} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 1 \\ \phi &= v \exp(-2\gamma h) \\ v_{n+1} &= \frac{\mu_{n+1} \gamma_n (1 + \phi_n) - \mu_{n+1} \gamma_n (1 - \phi_n)}{\mu_{n+1} \gamma_n (1 + \phi_n) + \mu_{n+1} \gamma_n (1 - \phi_n)} \\ v_i &= v_i^e \end{aligned} \right\} 1 \leq n \leq i-1, \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_N &= 0 \\ \phi_n &= v_n \exp(-2\gamma_n h_n) \\ v_n &= \frac{\mu_{n+1}\gamma_n(1+\phi_{n+1}) - \mu_n\gamma_{n+1}(1-\phi_{n+1})}{\mu_{n+1}\gamma_n(1+\phi_{n+1}) + \mu_n\gamma_{n+1}(1-\phi_{n+1})} \\ v_i &= v_i^g, \quad \phi_i = \phi_i^g \end{aligned} \right\} i \leq n \leq N-1, \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 1 \\ \xi_n &= \varphi_n \exp(-2\gamma_n h_n) \\ \varphi_{n+1} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_n\gamma_{n+1}(1+\xi_n) - \tilde{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n(1-\xi_n)}{\tilde{\varepsilon}_n\gamma_{n+1}(1+\xi_n) + \tilde{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n(1-\xi_n)} \\ \xi_N &= 0 \end{aligned} \right\} i \leq n \leq N-1, \quad (39)$$

$$t_n = \frac{1+\varphi_n}{1+\xi_n} \exp(-\gamma_n h_n), \quad 2 \leq n \leq N-1, \quad (40)$$

$$S_n = \begin{cases} \frac{\mu_i \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\mu_{n+1}} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{n+1}}{\mu_n} \right) Q_1 \prod_{m=n+1}^{i-1} T_m}{\tilde{\varepsilon}_n\gamma_{n+1}(1+\xi_n) + \tilde{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n(1-\xi_n)}, & 1 \leq n \leq i-1; \\ \frac{\mu_i \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\mu_{n+1}} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{n+1}}{\mu_n} \right) Q_1 \prod_{m=i+1}^n T_m}{\tilde{\varepsilon}_n\gamma_{n+1}(1+\xi_n) + \tilde{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n(1-\xi_n)}, & i \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (41)$$

$$R_n = \frac{2\tilde{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n}{\tilde{\varepsilon}_n\gamma_{n+1}(1+\xi_n) + \tilde{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n(1-\xi_n)}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} d_N &= 1 \\ d_n &= R_n d_{n+1} \frac{1+\varphi_n}{1+\xi_n} \exp(-2\gamma_n h_n) + \frac{1-\exp(-2\gamma_n h_n)}{1+\xi_n} \end{aligned} \right\} 1 \leq n \leq N-1, \quad (43)$$

В частном случае, когда точка наблюдения находится на границе раздела n -го и $(n-1)$ -го слоев, выражения для коэффициентов $VQ_{\nu\mu}$ и $VF_{\nu\mu}$ значительно упрощаются:

$$VQ_{V\mu}(\chi_1, \chi_2, z_n) = \begin{cases} -Q_1 \frac{\mu_i}{\mu_n} \prod_{k=n}^{i-1} T_k, & 1 \leq n \leq i-1; \\ -Q_1, & n = i; \\ -Q_1 \frac{\mu_i}{\mu_n} \prod_{k=n}^{i-1} T_k, & i+1 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (44)$$

$$VF_{V\mu}(\chi_1, \chi_2, z_n) = -d_n \sum_{k=n}^{n-1} (1 + \xi_n) S_k \prod_{l=k+1}^{n-1} R_l \exp(-\gamma_l h_l) - \exp(-\gamma_n h_n) (1 + \varphi_n) \sum_{k=n}^{N-1} S_k d_{k+1} \prod_{l=n+1}^k t_l. \quad (45)$$

Таким образом, при определении элементов матрицы импедансов $[Z]$ в (2), (8), (9) используются выражения (44) и (45) для коэффициентов $VQ_{V\mu}$ и $VF_{V\mu}$ соответственно. Более общие соотношения (30) и (32) могут быть использованы при необходимости определять поле в произвольной точке пространства, моделируемого в виде слоисто-однородной диэлектрической среды с потерями.

Список литературы: 1 Шокало В.М., Лучанинов А.И., Коновальцев А.А., Лучанинов Ю.А., Омаров М.А. Алгоритм анализа эквидистантной решетки ленточных микрополосковых излучателей произвольной геометрии, адаптированный к расчету крупноапертурных антенн с нелинейными элементами 1. Модель, описание геометрии и система интегральных уравнений для токов ленточных микрополосковых излучателей сложной геометрии в составе бесконечной решетки // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 117. 2 Шокало В.М., Лучанинов А.И., Коновальцев А.А., Лучанинов Ю.А., Омаров М.А. Алгоритм анализа эквидистантной решетки ленточных микрополосковых излучателей произвольной геометрии, адаптированный к расчету крупноапертурных антенн с нелинейными элементами 2. Решение системы интегральных уравнений // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 118. 3 Вычислительные методы в электродинамике/ Под ред. Р.Митры. М.: Мир, 1977. 486 с. 4 Татарников Д.В., Павлов С.А. Повышение эффективности численного алгоритма задач анализа периодических антенных решеток/ Изв. высш. учеб. завед. МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. Киев, 1988. 8 с. (Рус.) Библиогр.: 4 назв. Деп. в ВИНТИ, 20.07.88, № 6395-В88. 5 Панченко Б.А., Нефедов Е.И. Микрополосковые антенны. М.: Радио и связь, 1986. 144 с. 6 Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с. 7 Das N.K., Pozar D.M. A generalized spectral-domain Green's function for multilayer dielectric substrates with application to multilayer transmission lines// IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. 1987. Vol. 35. PP. 326 – 335. 8 Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 295 с.

Харьковский государственный технический университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 11.12.2000