

# ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ТРЕФТЦА ПРИ АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ СВЧ ДИАГНОСТИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

СЛИПЧЕНКО Н.И., КОСТЫЧЕВ Ю.Г.,  
ЗОЛОТАРЕВ В.А.

Рассматривается модифицированный метод Трефтца применительно к широко используемой электродинамической системе коаксиального типа для СВЧ диагностики диэлектрических материалов. Предлагается и реализован эффективный вычислительный алгоритм, позволивший провести всесторонний анализ влияния элементов конфигурации резонатора и параметров среды на резонансную частоту основного типа и его добротность.

## Введение

Интенсивное развитие микроэлектроники актуализирует проблему диагностики электромагнитных характеристик полупроводниковых, магнитных и сверхпроводящих материалов как изотропных, так и анизотропных. При этом вещественные и мнимые компоненты их комплексных параметров соизмеримы по величине, а требуемые точности их измерения одинаково высоки. По всей видимости, альтернативы резонаторному методу измерений с отмеченными требованиями в настоящее время не существует. Проблема заключается в выборе конфигурации резонансной системы, в построении адекватной математической модели без неконтролируемых допущений и ее численной реализации с достаточной точностью.

Наибольшей метрологической эффективностью обладают методы, основанные на резонаторах тороидального типа [1,2].

## Описание электродинамической системы. Построение базисов Трефтца

Рассматриваемая конфигурация электродинамической системы типа коаксиальный резонатор с диагностируемым изотропным веществом, размещенным в области укорачивающей емкости, представлена на рис. 1. Очевидно, данный резонатор способен обеспечить эффективное измерение комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_d$  образца на рабочем колебании квази-ТЕМ  $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0\right)$ , поскольку он локализован в области максимума электрического поля и в определенном интервале значений радиуса интенсивно влияет на значение резонансной частоты. При выборе характерных геометрических размеров резонатора должно быть учтено требование достаточной частотной удаленности рабочего типа колебания от ближайшего высшего. Разрежение спектра колебаний должно также обеспечиваться возбуждением осесимметричных колебаний.

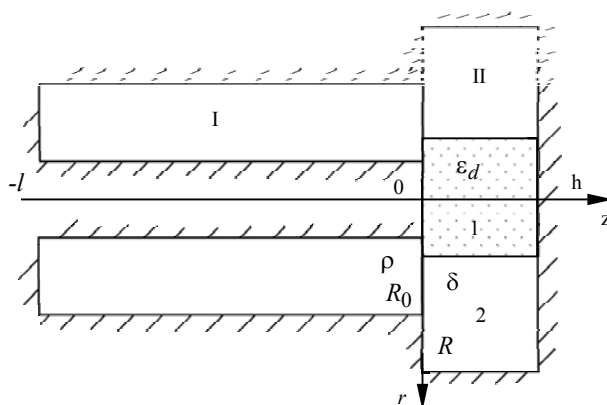


Рис. 1

Для решения уравнений Максвелла при условии идеальной проводимости металлической границы вся область разбивается на подобласти I ( $-l \leq z \leq 0$ ) и II ( $0 < z \leq h$ ), причем в области II относительная диэлектрическая проницаемость предполагается комплексной кусочно-постоянной функцией радиуса:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{для } \delta \leq r \leq R \cup 0 \leq z \leq h; \\ \varepsilon_d & \text{для } 0 \leq r \leq \delta \cup 0 \leq z \leq h. \end{cases}$$

Для  $E$ -колебаний с аксиальной симметрией, к которым относится и квази-ТЕМ тип, связь между компонентами поля, вытекающая из уравнений Максвелла, определена соотношениями:

$$\begin{aligned} ik_0 \varepsilon E_r &= -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\ ik_0 \varepsilon E_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right], \\ ik_0 \mu H_\varphi &= \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_0$  – волновое число.

Разрешим эту систему дифференциальных уравнений относительно компоненты  $H_\varphi$ , решим полученное дифференциальное уравнение 2-го порядка методом разделения переменных, полагая:

$$H_\varphi = i\Phi(r) \cdot \Psi(z),$$

Здесь  $\Psi(z) = C \cos \beta(z - \xi)$  ( $\xi = h$  для области II и  $\xi = -l$  для области I); функция  $\Phi(r)$  определяется как решение уравнения

$$\frac{d}{dr} \left\{ \varepsilon^{-1} \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} (r\Phi) \right] \right\} + \varepsilon^{-1} \chi^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

на отрезке  $[0, R]$ , конечна в точке  $r = 0$ , удовлетворяет граничному условию  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Phi) \Big|_{r=R} = 0$  и условиям сопряжения в точке скачка ( $r = \delta$ ) диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{\text{II}} \Big|_{r=\delta-0} &= \Phi_2^{\text{II}} \Big|_{r=\delta+0}, \\ \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Phi_1^{\text{II}}) \Big|_{r=\delta-0} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Phi_2^{\text{II}}) \Big|_{r=\delta+0}. \end{aligned}$$

Введенные здесь постоянные разделения  $\beta$  и  $\chi$  неизвестны и связаны соотношением:

$$\chi^2 + \beta^2 = k_0^2 \varepsilon. \quad (3)$$

В подобластях “1” и “2” (рис. 1), где  $\varepsilon$  имеет постоянные значения, уравнение (2) преобразуется в уравнение Бесселя 1-го порядка для функций  $\Phi_{1,2}^{II}(r)$  на интервалах  $[0, \delta)$  и  $(\delta, R]$  с граничными условиями, обозначенными выше, и постоянными разделения  $\chi_{1,2}^{II}$ . С точностью до произвольных коэффициентов искомые решения уравнения (2) таковы:

$$\Phi^I(r) = \begin{cases} D \frac{1}{r} & \text{при } \chi^I = 0, \\ D Z_1(\chi^I r), & \text{где } Z_1(\chi^I r) \equiv J_1(\chi^I r) - \\ & - \frac{J_0(\chi^I R)}{N_0(\chi^I R)} N_1(\chi^I r), r \in [\rho, R]. \end{cases} \quad (4)$$

$$\Phi^{II}(r) = \begin{cases} A J_1(\chi_1^{II} r) & r \in [0, \delta), \\ B Z_1(\chi_2^{II} r), & \text{где } Z_1(\chi_2^{II} r) \equiv J_1(\chi_2^{II} r) - \\ & - \frac{J_0(\chi_2^{II} R)}{N_0(\chi_2^{II} R)} N_1(\chi_2^{II} r), r \in (\delta, R]. \end{cases} \quad (5)$$

Множества значений  $\chi_{1m}^{II}$  и  $\chi_{2m}^{II}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  возникают из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} (\chi_{1m}^{II})^2 - (\chi_{2m}^{II})^2 &= k_0^2 (\varepsilon_d - 1), \\ \frac{\chi_{1m}^{II} J_0(\chi_{1m}^{II} \delta)}{\varepsilon_d J_1(\chi_{1m}^{II} \delta)} &= \chi_{2m}^{II} \frac{Z_0(\chi_{2m}^{II} \delta)}{Z_1(\chi_{2m}^{II} \delta)}, \end{aligned} \quad (6)$$

которая следует из соотношения (3) и из результата реализации условий сопряжения решений на границе раздела подобластей “1” и “2” ( $r = \delta \cup 0 \leq z \leq h$ ):

$$\begin{aligned} A J_1(\chi_1^{II} \delta) &= B Z_1(\chi_2^{II} \delta), \\ A \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r J_1(\chi_1^{II} \delta)] &= B \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r Z_1(\chi_2^{II} \delta)]. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом отмеченных выше соотношений для собственных функций  $\Phi_n^{II}(r)$ , соответствующих парам собственных значений  $\chi_{1n}^{II}$  и  $\chi_{2n}^{II}$ , аналогично [3] можно обосновать соотношение ортогональности с весом  $\varepsilon^{-1}$  на полном интервале  $[0, R]$ :

$$\begin{aligned} &\int_0^R \varepsilon^{-1}(r) \Phi_m^{II}(r) \Phi_n^{II}(r) r dr \equiv \\ &= \varepsilon_d^{-1} \int_0^\delta \Phi_{1m}^{II} \Phi_{1n}^{II} r dr + \int_\delta^R \Phi_{2m}^{II} \Phi_{2n}^{II} r dr = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ N_m^{II} & \text{при } m = n; m, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Множество собственных значений  $\chi_m^I$ , отличных от нуля, соответствующих собственным функциям  $\Phi_m^I$ , порождается известным трансцендентным уравнением

$$N_0(\chi_m^I R_0) \cdot J_0(\chi_m^I \rho) - J_0(\chi_m^I R_0) \cdot N_0(\chi_m^I \rho) = 0. \quad (9)$$

Известно также, что для собственных функций  $\Phi_m^I(r)$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$ , соответствующих собственным значениям  $\chi_0^I = 0$  и  $\chi_m^I$ , также имеет место соотношение ортогональности на интервале  $[\rho, R_0]$ :

$$\begin{aligned} &\int_\rho^{R_0} \Phi_n^I(r) \Phi_m^I(r) r dr = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ N_m^{II} & \text{при } m = n; m, n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

На основании изложенного, таким образом, могут быть сформированы базисы Треффта для частных областей I и II, точно удовлетворяющие уравнениям электродинамики, граничным условиям на металлической оболочке (кроме участков на линии  $z = 0$ ) и условиям непрерывности на границе сред  $r = \delta$  в области II (выпишем только те из них, которые используются в дальнейшем для построения алгоритма):

$$E_{r,m}^I = \begin{cases} a_0^I \frac{1}{r} \frac{\sin k_0(z+l)}{\sin k_0 l} & \text{для } m = 0, \\ a_m^I Z_1(\chi_m^I r) \frac{\sin \beta_m^I(z+l)}{\sin \beta_m^I l} & \text{для } m \neq 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$H_{\phi,m}^I = \begin{cases} a_0^I \frac{1}{r} Y_0^I(z), & \text{где } Y_0^I(z) = i \frac{\cos k_0(z+l)}{\sin k_0 l}; \\ a_m^I Z_1(\chi_m^I r) Y_m^I(z), & \text{где } Y_m^I(z) = i \frac{k_0 \cos \beta_m^I(z+l)}{\beta_m^I \sin \beta_m^I l}, \end{cases} \quad (12)$$

$$E_{r,m}^{II} = a_m^{II} \varepsilon^{-1}(r) \Phi_m^{II}(r) \frac{\sin \beta_m^{II}(z-h)}{\sin \beta_m^{II} h}, \quad (13)$$

$$H_{\phi,m}^{II} = a_m^{II} \Phi_m^{II}(r) Y_m^{II}(z),$$

$$\text{где } Y_m^{II}(z) = i \frac{k_0 \cos \beta_m^{II}(z-h)}{\beta_m^{II} \sin \beta_m^{II} h}, \quad (14)$$

$a_0^I, a_m^I, a_m^{II}$  — произвольные постоянные для частных решений, характеризуемых конкретными значениями постоянных разделения  $\chi_m^I, \beta_m^I, \chi_{1,2m}^{II}, \beta_m^{II}$ .

### Характеристическое уравнение

Для удовлетворения условиям непрерывности на общей границе областей I и II  $z = 0$  представим поля свободных колебаний в этих областях в виде разложений по соответствующим элементам базиса (11)-(14):

$$\begin{aligned} E_r^I &= \sum_{n=0} a_n^I E_{r,n}^I, & H_\phi^I &= \sum_{n=0} a_n^I H_{\phi,n}^I, \\ E_r^{II} &= \sum_{n=1} a_n^{II} E_{r,n}^{II}, & H_\phi^{II} &= \sum_{n=1} a_n^{II} H_{\phi,n}^{II}. \end{aligned} \quad (15)$$

Конкретизируем граничные условия на границе раздела областей I и II:

$$E_r^{II} = 0, \text{ на интервалах } [R_0, R], [0, \rho], \quad (16)$$

$$E_r^I = E_r^{II}, H_\phi^I = H_\phi^{II}, \text{ на интервале } [\rho, R_0]. \quad (17)$$

Введем в рассмотрение функцию  $E(r)$ , заданную на интервале  $[0, R]$  следующим образом:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{на интервалах } [R_0, R] \text{ и } [0, \rho], \\ E_r^I(r) & \text{на интервале } [\rho, R_0]. \end{cases} \quad (18)$$

Рассматривая представление  $E_r^{II}(r, 0)$  как разложение функции  $E(r)$  в ряд Фурье на интервале  $[0, R]$ , определим коэффициенты разложения  $a_m^{II}$ , используя (8), а затем сократив интервал интегрирования в соответствии с (18) до  $[\rho, R_0]$ , внесем под интеграл вместо функции  $E(r)$  функцию  $E_r^I$  из (15). В результате получим:

$$-N_m^{II} a_m^{II} = \sum_{n=0} \left( \int_{\rho}^{R_0} \Phi_m^{II} \Phi_n^I r dr \right) a_n^I, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

или в матричной форме:

$$-N^{II} a^{II} = C a^I, \quad (20)$$

где  $N^{II}$  – диагональная матрица с элементами:

$$\begin{aligned} N_m^{II} &= \frac{1}{\varepsilon_d} \left[ \frac{Z_1(\chi_{2m}^{II} \delta)}{J_1(\chi_{1m}^{II} \delta)} \right]^2 \int_0^\delta J_1^2(\chi_{1m}^{II} r) r dr + \\ &+ \int_\delta^R Z_1^2(\chi_{1m}^{II} r) r dr; \end{aligned}$$

$C$  – прямоугольная матрица с элементами  $C_{mn}$ , равными интегралам в (19);  $a^I, a^{II}$  – вектор-столбцы коэффициентов разложения.

Далее, приравнявая азимутальные компоненты магнитного поля  $H_\phi^I(r)$  и  $H_\phi^{II}(r)$  на интервале  $[\rho, R_0]$  и используя (10), получаем:

$$Y_m^I(0) N_m^I a_m^I = \sum_{n=1} Y_n^{II}(0) \left( \int_{\rho}^{R_0} \Phi_n^{II} \Phi_m^I r dr \right) a_n^{II} \quad (21)$$

или в матричной форме:

$$Y^I N^I a^I = \tilde{C} Y^{II} a^{II}, \quad (22)$$

где  $Y^I, Y^{II}$  – диагональные матрицы с элементами  $Y_m^I(0), Y_m^{II}(0)$ , приведенными в (12) и (14);  $\tilde{C}$  – транспонированная матрица  $C$ ;  $N^I$  – диагональная матрица с элементами:

$$N_m^I = \begin{cases} \ln \frac{R_0}{\rho} & \text{для } m = 0, \\ \int_{\rho}^{R_0} Z_1^2(\chi_m^I r) r dr & \text{для } m \neq 0. \end{cases}$$

Подстановкой (20) в (22) исключаем  $a^{II}$ , получая при этом однородную линейную алгебраическую систему уравнений с симметричной комплексной матрицей относительно неизвестного вектор-столбца  $a^I$ . Нетривиальное решение ее существует при условии:

$$\det[Y^I N^I + \tilde{C} Y^{II} (N^{II})^{-1} C] = 0. \quad (23)$$

Таким образом, получено характеристическое уравнение, достаточное, совместно с (3), для определения характеристических комплексных чисел  $k_0 = k_0' + ik_0''$  для собственных колебаний  $E$ -типа.

### Апробация алгоритма и результаты численных исследований

Основные трудности численной реализации алгоритма заключаются в отыскании заданного множества корней системы трансцендентных уравнений (6), в вычислении матричных элементов матриц  $N^I, N^{II}, C$ , связанном с численным интегрированием произведений функций Бесселя и поиском корней определителя редуцированной матрицы (23). Методическая погрешность вызвана тем, что условия (16) и (17) реализуются в интегральном смысле

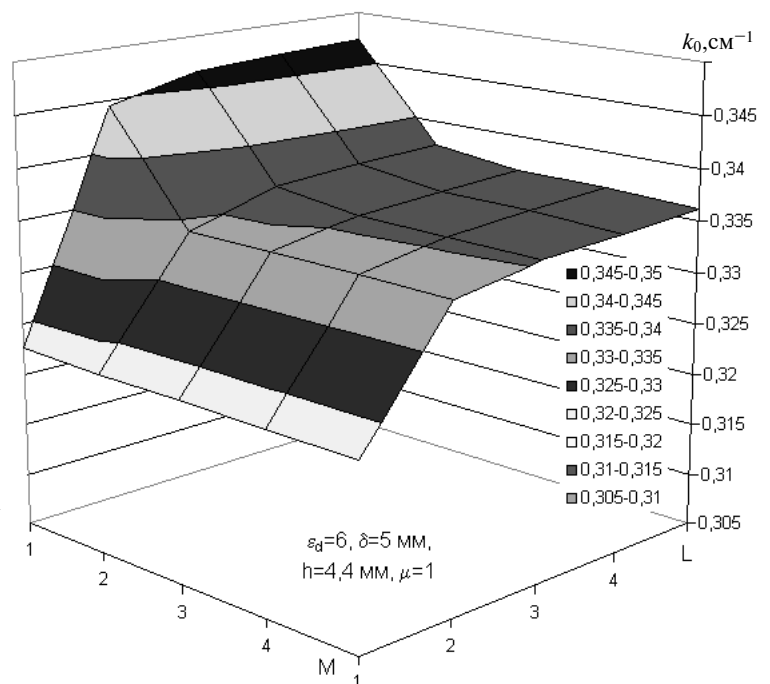
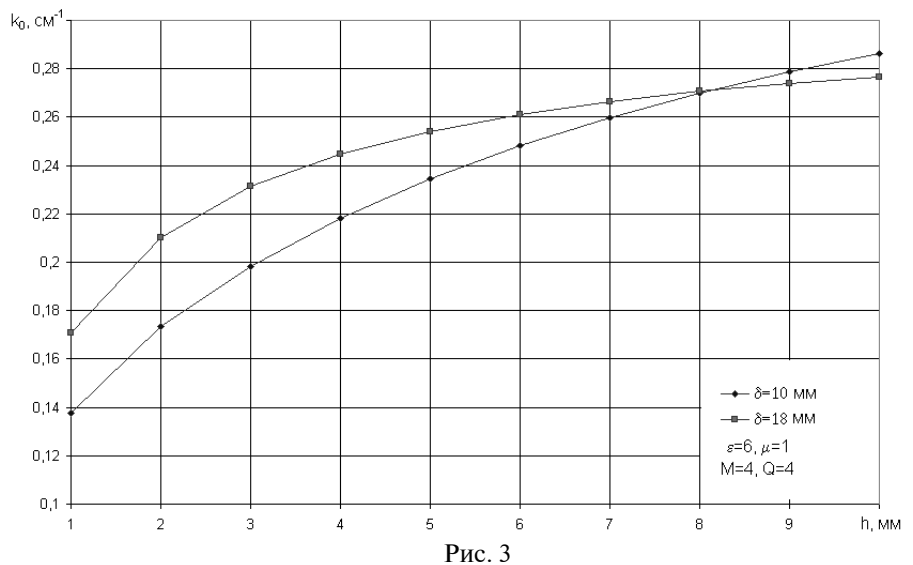
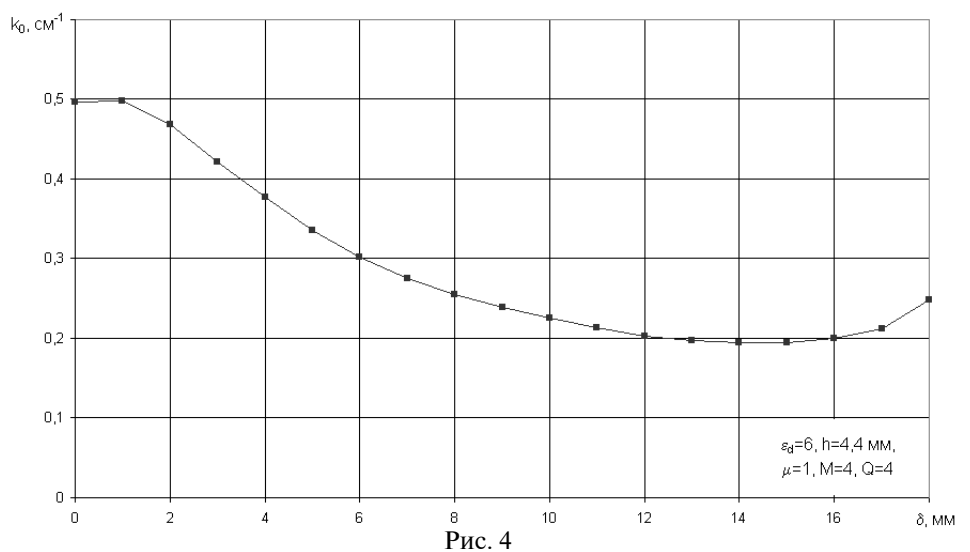


Рис. 2

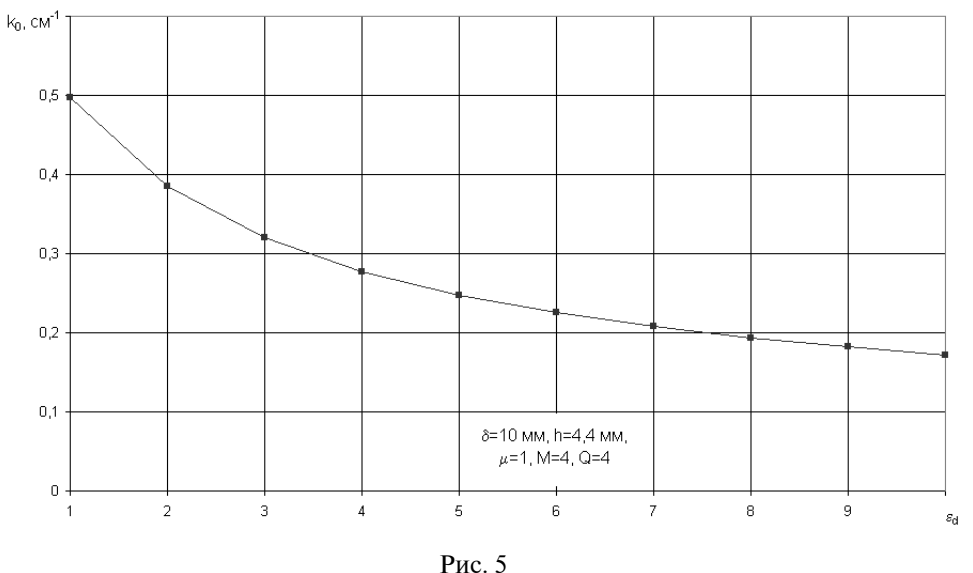
и точность результата ( $k_0$ ) зависит, прежде всего, от значений  $M$  и  $L$  – размерностей матриц, из которых формируется характеристическое уравнение (23). Для резонатора с геометрическими размерами  $R=R_0=18$  мм,  $\rho=\delta=5$  мм,  $l=24,5$  мм,  $h=4,4$  мм динамика внутренней сходимости решения представлена на рис. 2. Следует отметить равномерный характер этого процесса при одновременном увеличении количества учитываемых в представлении полей “гармоник”. Уже при  $M=L=4$  результат стабилизируется.



Результаты численного исследования влияния геометрических размеров диэлектрического образца на резонансную частоту отображены на рис. 3 и 4. Существенно то, что для тонких образцов ( $h < 2$  мм) резонансная система имеет более высокую чувствительность к изменению их толщины. Влияние радиуса образца мало при достаточно больших его значениях, что может служить предпосылкой к использованию для диагностики тонких образцов больших поперечных размеров. Увеличение резонансной частоты с увеличением  $h$  связано с уменьшением величины нагружающей емкости. С тех же позиций объясняется уменьшение резонансной частоты с увеличением радиуса диэлектрического образца  $\delta$ , пока не начинает сказываться влияние металлической оболочки.



На рис. 5 приведена расчетная зависимость характеристического числа резонатора от диэлектрической проницаемости образца ( $k_0(\epsilon_d)$ ). Из графика следует, что чувствительность



$\frac{\partial k_0}{\partial \epsilon_d}$  монотонно убывает и при больших значениях  $\epsilon_d$  практически постоянна. В дальнейшем численное исследование алгоритма было распространено на случай диэлектрика с большой проводимостью:  $\epsilon''/\epsilon' \in [0,5; 6,0]$ . На рис.6 приведены результаты

расчетов реальной и мнимой частей характеристического числа при различных значениях толщины образца  $h$ . Функции  $k'_0(\epsilon'_d, \epsilon''_d)$  и  $k''_0(\epsilon'_d, \epsilon''_d)$  монотонны и поэтому решение обратной задачи определения параметров диэлектрика по измеренному значению  $k_0$  не вызывает сомнений.

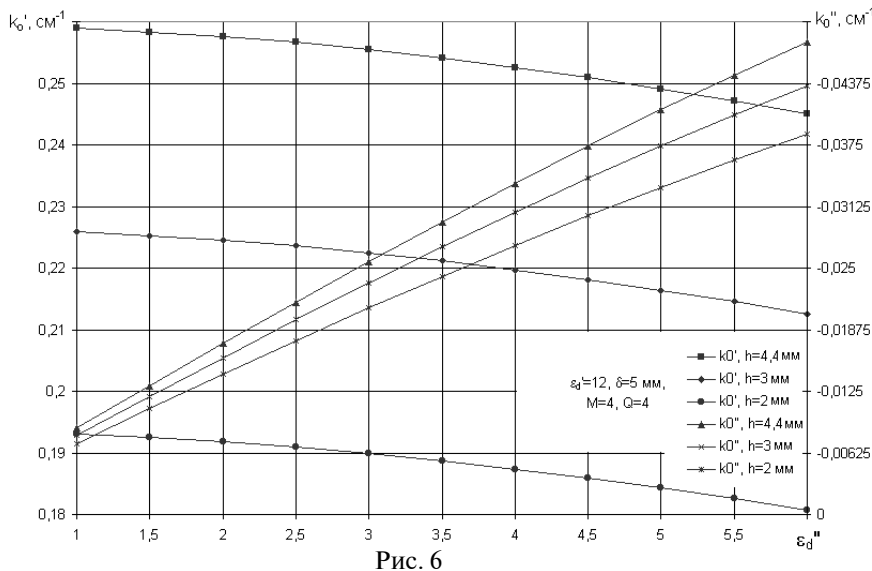


Рис. 6

### Заключение

При оптимальном выборе конфигурации рассмотренной резонансной системы разработанный алгоритм может быть реализован для решения проблемы микроволновой диагностики.

**Литература:** 1. Pournaropoulos C.L., Misra D.K. The coaxial aperture electromagnetic sensor ant its application in material

УДК 621.385.6

## ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕБРИСТОГО ЦИЛИНДРА АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ СГУСТКОМ

ЧУМАЧЕНКО В.С., ЧУМАЧЕНКО С.В.

Определяется условие излучения, полное поле излучения, одноволновый режим и спектр излучения в неподвижной и подвижной системах координат в задаче о возбуждении электромагнитного излучения азимутально-однородным цилиндрическим сгустком.

### 1. Введение

Применение отрезков аксиально-симметричных периодических структур, в частности, в антенной технике общеизвестно [1,2]. Вопрос о применении такого рода структур в дифракционной электронике представляет теоретический и практический интерес [3]. При исследовании эффекта дифракционного излучения большое внимание уделяется его возникновению при движении заряженных частиц вблизи дифракционных решеток. В связи с этим выделяется класс задач о возбуждении открытых структур. Такого рода исследования направлены на создание генераторов электромагнитных колебаний, использующих эффект дифракционного излучения. Многообразие структур, при помощи которых можно создать генераторы дифракционного излучения, порождает совокупность теоретических и экспериментальных исследований, к которым относится и настоящая работа.

characterization. Means. Sci. Technol. 8(1997), P.1191-1202. 2. Xu Y. and Basisio R.G. Nondestructive measurements of the resistivity of thin conductive films and the dielectric constant of thin substrates using an open-end coaxial line. IEE Proc. H 139, 1992. P.500-506. 3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Поступила в редколлегию 02.02.01

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Гордиенко Ю.Е.

**Слипченко Николай Иванович**, канд. техн. наук, профессор, проректор по научной работе ХТУРЭ. Научные интересы: радиофизика и электроника. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-90-20.

**Костычев Юрий Григорьевич**, канд. физ.-мат. наук. Научные интересы:

электродинамика полых систем, ферритовая электродинамика, микрополосковая техника. Увлечения и хобби: вычислительная математика, программирование. Адрес: Украина, 61145, Харьков, ул. Новгородская, 10, кв. 90, тел. 40-97-15.

**Золотарев Вадим Анатольевич**, канд. техн. наук, доцент кафедры сетей связи ХТУРЭ. Научные интересы: защита информации в информационных системах. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.40-93-33.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитного излучения азимутально-однородным цилиндрическим сгустком с плотностью заряда

$$\rho(r, z, t) = \rho_0 \frac{\delta(r-b)}{b} \exp\left[-\frac{(z-vt)^2}{2L_0^2}\right], \quad (1)$$

который движется со скоростью  $v$  вдоль открытой структуры типа ребристый цилиндр;  $b$  – радиус цилиндра;  $L_0$  – длина сгустка;  $\delta(x)$  – дельта-функция. Выбор функции распределения плотности заряда обусловлен, в частности, тем, что решение квантово-механической задачи о взаимодействии электрона с медленной волной является гауссовой функцией продольной координаты.

Требуется определить условие излучения, полное поле излучения, одноволновый режим и спектр излучения в неподвижной и подвижной системах координат.

### 3. Решение задачи

Потенциал Герца, описывающий искомое электромагнитное поле, представим в виде разложений в интегралы Фурье:

$$\vec{\Pi}(r, z, t) = \vec{z}_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{\omega}(r, z) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

где  $\Pi_{\omega} = \Pi_{\omega}^{(0)} + \Pi_{\omega}^{(1)}$ ;  $\Pi_{\omega}^{(0)}$  – Фурье-компонента потенциала собственного поля сгустка;  $\Pi_{\omega}^{(1)}$  – Фу-