УДК 519.859

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

И. В. Гребенник [1], Т. Е. Романова [2], С. Б. Шеховцов[3]

[1]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, grebennik@onet.com.ua
[2]ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, sherom@kharkov.ua
[3]ХНУВД, г. Харьков, Украина, tarom7@yahoo.com

Статья является продолжением исследований задач геометрического проектирования. В ней содержится материал, лежащий в основе обобщения знаний, необходимых для построения многофакторных оценок при выборе наилучшего решения в информационных системах решения оптимизационных задач размещения, основанных на знаниях о математических моделях и современных методах локальной и глобальной оптимизации.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ, ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ, МНОГОФАКТОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Введение

Теория геометрического проектирования изучает круг фундаментальных и прикладных проблем, направленных на реализацию идеи математического моделирования процесса размещения реальных объектов и создание эффективных методов оптимизации этого процесса в соответствии с заданным критерием оптимальности.

Обзор зарубежных публикаций [1-4], посвященных решению оптимизационных задач размещения (packing&cutting), дает возможность сделать следующие выводы.

При решении конкретной оптимизационной задачи размещения геометрических объектов строятся различные математические модели или приводятся некоторые алгоритмические представления ее постановки в зависимости от области науки, отрасли промышленности или непосредственно от исследователя. Вследствие этого, для решения задач рассматриваемого класса, как правило, используют эвристические методы. Кроме того, высокий уровень организации архитектуры баз знаний [5] интеллектуальных систем решения задач размещения геометрических объектов, к сожалению, базируется на узкой классификации пространственных форм геометрических объектов, ограничений и функций цели.

В [6, 7] предлагается математическая модель системы решения задач оптимального размещения геометрических объектов, основанной на знаниях о единой конструктивной математической модели рассматриваемого класса задач [8] и современных методах оптимизации.

Целью статьи является формирование многофакторных оценок при выборе наилучшего решения на основе знаний о математических моделях и методах в информационных системах решения оптимизационных задач размещения.

Полагаем, что множество исходных данных $x_0 \in X_0$ порождает множество реализаций X_1 математической модели задач размещения, которые отличаются некоторыми математическими характеристиками.

Действительно, в общем случае реализация $x_1 \in X_1$ математической модели задач размещения характеризуется размерностью пространства; видом Ф-функций, описывающих множество допустимых решений D; числом неравенств, формирующих D; непрерывностью или дискретностью переменных; линейностью или нелинейностью функции цели.

Это означает, что в общем случае элементы $x_1 \in X_1$ требуют различных методов для их эффективного решения. Обозначим через X_2 множество всех методов, предназначенных для решения задач размещения.

Из приведенных выше рассуждений следует, что множество X_0 порождает множество реализаций X_1 математической модели, для решения которых используется множество методов X_2, алгоритмов X_3, программ X_4.

1. Постановка задачи

Запишем векторное представление [7] элементов как $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, $x_4 \in X_4$. Тогда принятие решений в информационных ситемах оптимизации размещений сводится к решению следующей оптимизационной задачи [6]:

$$f(x_0, x_R^*) = \underset{x_R \in X_R}{extr}\ f(x_0, x_R), \qquad (1)$$

где $x_0 \in X_0$; $x_R = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 = X_R \subset R^t$.

Функционал $f(x_0, x_R)$ является векторным, то есть $f(x_0, x_R) = (\alpha_1(x_0, x_R), \alpha_2(x_0, x_R), \ldots, \alpha_k(x_0, x_R))$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ – критерии, определяющие эффективность решения задач размещения и затраты вычислительных ресурсов на его получение.

Из поставленной задачи (1) очевидна необходимость формирования функционала $f(x_0, x_R)$.

З а м е ч а н и е 1. Полагаем, что вычислительные ресурсы позволяют решить любую задачу размещения с исходными данными $x_0 \in X_0$.

З а м е ч а н и е 2. Под методом решения $x_2 \in X_2$ понимается либо метод, предназначенный для решения только оптимизационных задач геометрического проектирования, либо способ, в основе которого лежит некоторый базисный метод оптимизации (метод ветвей и границ, градиентный метод, симплекс-метод и т. д.), модифицированный для решения класса задач геометрического проектирования [9-11].

Следует отметить, что на основе одного и того же базисного метода может быть несколько модификаций методов решения задач геометрического проектирования, а также различные композиции нескольких методов решения данного класса задач, которые в данном исследовании представлены как различные методы.

В общем случае каждому методу x_2 может соответствовать более чем один алгоритм x_3, а каждому алгоритму x_3 – более чем одна программа x_4. Однако для удобства анализа модели и простоты изложения материала полагаем, что между элементами множеств X_2, X_3, а также X_3, X_4 задано инъективное отображение, то есть каждому элементу $x_2 \in X_2$ соответствует один и только один элемент $x_3 \in X_3$, а каждому элементу $x_3 \in X_3$ соответствует один и только один элемент $x_4 \in X_4$.

Таким образом, задача (1) сводится к решению следующей задачи:

$$f(x_0, x_p^*) = \underset{x_p \in X_p}{extr}\, f(x_0, x_p), \qquad (2)$$

где $x_0 \in X_0$; $x_p = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 = X_p$.

В данной работе в качестве критериев, оценивающих решение задачи размещения понимается точность α_1 (допустимое решение, локальный экстремум, приближение к глобальному экстремуму, глобальный экстремум) решения задачи и быстродействие (время решения) α_2, то есть:

$$f(x_0,x_p) = (\alpha_1(x_0,x_p), \alpha_2(x_0,x_p)). \qquad (3)$$

Так как функционал $f(x_0,x_p)$ является векторным, то следует начать с построения критериев α_1, α_2.

2. Критерий точности

Поскольку в предлагаемом исследовании не учитываются погрешности алгоритмов X_3 и программ X_4, связанные с точностью вычислительных процессов, то точность α_1 решения задачи объективно зависит от погрешности задания исходных данных, от исходных данных, влияющих на выбор реализации $x_1 \in X_1$ математической модели задачи и выбор метода $x_2 \in X_2$, а также непосредственно от точности метода $x_2 \in X_2$.

З а м е ч а н и е 3. В общем случае в классе задач размещения любому элементу $x_0 \in X_0$ соответствует более чем один элемент. Каждый элемент $x_1^i, i = 1,...,k$ должен строиться в соответствии с исходными данными x_0 так, чтобы все реализации математической модели задачи были эквивалентны с точки зрения их погрешностей.

Рассмотрим понятие точности метода $x_2 \in X_2$.

З а м е ч а н и е 4. В общем случае любому элементу $x_1 \in X_1$ соответствует более чем один элемент $x_2^j \in X_2, j = 1,...,l$.

Метод x_2^j осуществляет решение конкретной задачи с определенной точностью α_{12}. Точность α_{12} метода решения задач размещения зависит от исходных данных x_0, построенной реализации x_1^i математической модели и непосредственно от возможностей метода $x_2^j \in X_2$, связанных с достигаемой точностью данного экстремума.

Таким образом, в общем виде точность α_1 решения конкретной задачи совпадает с точностью α_{12} метода $x_2 \in X_2$ и имеет вид $\alpha_1 = \alpha_{12} = \alpha_{12}(x_0, x_1, x_2)$. Следовательно, решить задачу (2) по критерию точности означает определить

$$\alpha_1(x_0, x_p^*) = \alpha_{12}(x_0, x_p^*) = \underset{x_p \in X_p}{extr}\, \alpha_{12}(x_0, x_p). \qquad (4)$$

В силу дискретности и небольшой мощности множеств X_1, X_2 ниже предлагается подход к решению задачи (4), основные положения которого заключаются в следующем.

1. Выделяется подмножество X_1' реализаций $x_1^i, i = 1,...,k,$ математической модели, построенных соответственно с учетом допустимых погрешностей исходных данных $x_0 \in X_0$.

2. Каждому элементу $x_1^i \in X_1', i \in \{1,...,k\}$ ставится в соответствие подмножество $X_2^i \subset X_2 = \{x_2^{ij}\}, j = 1,...,n_i$ методов, которые могут осуществить решение конкретной реализации математической модели $x_1^i, i \in \{1,...,k\}$.

3. Элементы $x_p^r, r = 1,..., \sum_{i=1}^{k} n_i$ множества X_p упорядочиваются по критерию точности.

З а м е ч а н и е 5. Для реализации п. 1 требуются фундаментальные исследования, связанные с введением отношения эквивалентности с точки зрения погрешности построения реализаций $x_1^i, i = 1,...,k,$ по исходным данным $x_0 \in X_0$.

З а м е ч а н и е 6. П. 2 предполагается осуществлять на основании векторного представления реализации математической модели x_1 и метода x_2, используя функциональную предикатную связь между элементами вектора математической модели и вектора метода решения задач геометрического проектирования [7].

Пусть реализация x_1 математической модели задачи описывается вектором $a = (a_1, a_2,..., a_n)$, где a_i, $i = 1,...,n$, – признаки математической модели задачи, влияющие на выбор метода x_2 из множества X_2. Пусть также элемент $x_2 \in X_2$ задается вектором $b = (b_1, b_2,..., b_m)$, где b_j, $j,...,m$, – признаки метода решения, значение которых непосредственно определяет элемент $x_2 \in X_2$.

Каждый элемент a_i является в общем случае некоторой предикатной функцией ψ_i от элементов вектора x_0, то есть $a_i = \psi_i(x_0)$.

Каждый элемент b_j является в общем случае некоторой предикатной функцией ψ_j от элементов вектора a, то есть $b_j = \psi_j(a)$.

Таким образом, строится множество $X_2^i = \{x_2^1, x_2^2, ..., x_2^{k_i}\}$ методов решения для конкретной i-й реализации математической модели $x_1^i, i \in \{1,...,k\}$.

Предположим, что множество X_p построено, то есть все элементы $x_p^r (r = 1,...,l, l = \sum_{i=1}^{k} n_i)$ множества X_p определены.

Каждый элемент x_p^r из множества X_p имеет некоторую погрешность α_1^r. Следовательно, с одной стороны, имеется множество X_p пар $(x_1, x_2)^r = x_p^r$, с другой – множество α_p погрешностей элементов x_p^r, r = 1, 2, ..., l. Тогда выполнение п. 3 сводится к решению следующей задачи. Требуется определить $x_p^* \in X_p$, для которого

$$\alpha_1^* = \min\{\alpha_1^1, ..., \alpha_1^l\}, \tag{5}$$

где $\alpha_1^* = \alpha_1(x_0, x_p^*)$.

Для сравнения элементов α_1^i, α_1^j множества α_1^r используется классификация методов по критерию точности в рассматриваемом классе задач.

При решении задач размещения используются точные и приближенные методы глобальной и локальной оптимизации, которые, в свою очередь, определяются множеством методов поиска глобального, локального экстремумов и локального экстремума с последующим перебором. Таким образом, по возможностям метода x_2 в смысле точности достижения экстремума формируются классы $[X_2^s]$ методов с соответствующим порядком s приоритета по точности.

Пусть k – число реализаций математической модели задачи, n_i – число методов для решения каждой из $x_1^i, i \in \{1,...,k\}$. Если k>1, n_i>1, то необходимо сравнение элементов по точности решения, которое предполагается осуществить следующим образом.

Сформируем подмножества $\hat{X}_2^i, i = 1,...,s$ методов x_2^{ij} по принадлежности к классам $[X_2]^s$. Каждое из подмножеств $\hat{X}_2^i \subset [X_2^i]$ может быть либо пустым множеством, либо иметь мощность, не превышающую $l = \sum_{n=1}^{k} n_i$. Из всех множеств $\hat{X}_r^s$ рассматривается только то X_r^{*S}, которое имеет приоритет по точности класса, к которому это множество принадлежит.

Все элементы $\hat{x}_2^{ij} \in X_r^{*S}$, где $S \le l$, эквивалентны с точки зрения точности решения. Поэтому элементы, соответствующие методам $\hat{x}_2^{ij}$, r=S, имеют точность α_1^* и применимы для решения конкретной задачи по критерию точности для исходных данных x_0.

Возможны следующие частные случаи определения наилучшей пары $(x_1^i, \hat{x}_2^{ij}) = \hat{x}_p^r$ при решении задачи (5).

1. Пусть для исходных данных x_0 существует только одна реализация $x_1 \in X_1$, а элементу x_1 соответствует только один метод $x_2 \in X_2$. Тогда, естественно, пара $x_p = (x_1, x_2)$ есть решение задачи (5).

2. Если реализация $x_1 \in X_1$ единственна, но ей соответствует более чем один метод $x_2^j, j = 1,...n_0$, то выбирается тот элемент x_2^j, $j \in \{1,...,n_1\}$, который имеет приоритет по принадлежности к классам $[X_2^s]$.

3. Если k>1, а n_i = 1, i = 1,...,k, то выбирается такая пара (x_1^j, x_2^j), для которой x_2^j принадлежит к классу методов, имеющему приоритет по точности.

4. Если k>1 и все они могут быть реализованы одним и тем же методом x_2, то все пары (x_1^j, x_2), i = 1,...,k эквивалентны в смысле точности решения задачи.

3. Критерий быстродействия

Перейдем к рассмотрению критерия α_2 быстродействия решения задач размещения. Аналогично замечанию о погрешностях алгоритмов и программ при исследовании критерия α_1 точности решения задачи в данной работе не учитывается и быстродействие алгоритмов X_3 и программ X_4, связанных с быстродействием вычислительных процессов. Поэтому быстродействие решения задач размещения объективно зависит от исходных данных, влияющих на выбор реализации $x_1 \in X_1$ и выбор метода $x_2 \in X_2$.

Согласно замечанию 3 исходным данным $x_0 \in X_0$ соответствует множество $\{X_1^*\} = \{x_1', ..., x_1^k\} \subset X_1$ реализаций математической модели задачи.

Полагаем, что каждому элементу $x_1^i, i = 1,...,k$ соответствует в общем случае не пустое множество X_2^i методов $x_2^{ij}, j = 1,...,n_i$. Каждый элемент x_2^{ij}, $j \in \{1,...,n_i\}$ реализует решение x_1^i с точки зрения критерия быстродействия за определенное время в зависимости от значения признаков элемента $x_1 \in X_1$, влияющих непосредственно на быстродействие метода x_2^{ij}.

В общем случае на быстродействие метода влияют следующие характеристики реализации x_1 математической модели задачи задач размещения: размерность пространства R^t, вид Ф-функций [12, 13], формирующих область допустимых решений; число неравенств (линейных, нелинейных), формирующих область допустимых решений; характер поведения переменных (дискретный, непрерывный, дискретно-непрерывный); присутствие технологических ограничений; вид функции цели (линейность, нелинейность, характер нелинейности).

Таким образом, формируется некоторый вектор характеристик реализации $x_1 \in X_1$ математической модели задачи, которые могут повлиять на быстродействие метода $x_2^{ij} \in X_2$, реализующего x_1^i, то есть $Ax_1 = (d_1, d_2, ..., d_m)$, где $d_k = \psi_k(x_0)$, $k = 1,...,$m.

Для каждого метода $x_2^{ij} \in X_2$ объективно существует оценка его быстродействия υ^{ij}, которая в общем виде представляется некоторыми функциями

$$\upsilon^{ij} = \Omega_j(Ax_1^i(x_0)). \tag{6}$$

Следовательно, для одной и той же реализации x_1^i можно по оценкам υ^{ij} сравнивать методы $x_2^{ij}, j = 1,...,n_1$ на множестве υ^{ij}. В общем виде, согласно (6), $\alpha_2 = \upsilon^{ij}$.

Итак, решить задачу по критерию быстродействия α_2 – это значит определить

$$\begin{aligned}\alpha_2(x_0, x_p^*) &= \min_{i,j} \alpha_{22}(x_1^{*i}, x_{22}^{*ij}) = \\ &= \min_{i,j} \upsilon^{*ij} = \min_i \min\{\upsilon^{i1}, \upsilon^{i2}, ...\upsilon^{ik_i}\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям предлагается алгоритмический подход к решению задачи (7).

1. Для исходных данных $x_0 \in X_0$ выделяется подмножество X_1^i реализаций $x_1^i, i = 1,...,k$ математической модели задачи, построенных соответственно с учетом допустимых погрешностей исходных данных $x_0 \in X_0$.

2. Каждому элементу $x_1^i \in X_1^i, i \in \{1,...,k\}$ ставится в соответствие подмножество $x_2^{ij} \subset X_2$ методов x_2^{ij}, $j = 1,...,n_i$, которые могут осуществить решение реализации математической модели x_1^i, $i \in \{1,...,k\}$.

3. Элементы x_p^{ij}, $j = 1,...,n_i$ упорядочиваются по критерию быстродействия α_2^{ij} методов x_2^{ij}, $j = 1,...,n_i$ на подмножествах $x_2^{ij} \subset X_2$, $i = 1,...,k$.

Учитывая замечания 5 и 6, предположим, что п. 1 и 2 реализованы. Выполнение п. 3 сводится к решению следующей задачи.

Требуется определить $x_p^* \in X_p$, для которого

$$\alpha_2^{p*} = \min\{\alpha_2^1, ..., \alpha_2^1\}, l = \sum_{i=1}^{k} n_i, \tag{8}$$

где $\alpha_2^{p*} = \alpha_{22}(x_0, Ax_1, \nu^*)$.

Найдем решение задачи (8). Пусть $k>1$, $n_i>1$. Тогда необходимо сравнение элементов по быстродействию α_2^r, которое предполагается осуществить следующим образом.

• Формирование подмножества $[X_2]^i$, $i = 1,...,k$.

• Определение подмножества $\{\upsilon^{ij}\}$ для каждого $i \in \{1,...,k\}$.

• Упорядочивание элементов множеств $\{\upsilon^{ij}\}$ по возрастанию согласно (6).

• Сравнение по быстродействию α_2^{ij} всех первых элементов множеств $\{\upsilon^{ij}\}$, $i = 1,...,n$, $j \in \{1,...,k_i\}$.

Многофакторные оценки

Решение задачи (2) при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ предполагает использование методов многокритериальной оптимизации [14,15]. Рассмотрим применение некоторых из них.

Используем понятие компромиссной (приемлемой) для всего множества функций цели многокритериальной задачи альтернативы [14]. Здесь под приемлемой понимается такая альтернатива $x_p \in X_p$, для которой величина отклонений от оптимальных значений по каждой функции цели достигает наименьшего значения. Поскольку наименьшее значение всех отклонений не достигается на одной альтернативе, то необходимо использование дополнительной информации.

Введем $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$, где $\mathrm{A}_1 = \alpha_1^*$, $\mathrm{A}_2 = \alpha_2^{p*}$ – решения задач оптимизации (5), (8). Можно рассматривать A как нижнюю оценку решения задачи оптимизации (2).

Рассмотрим следующую схему решения задачи оптимизации (2). Будем считать решением задачи такой элемент $x_p^* \in X_p$, для которого сумма квадратов отклонений $\alpha_1(x_p^*)$ от A_1 и $\alpha_2(x_p^*)$ от A_2 была бы минимальной. Другими словами, минимизируем критерий:

$$G(x_p) = (\alpha_1(x_p) - \mathrm{A}_1)^2 + (\alpha_2(x_p) - \mathrm{A}_2)^2 \tag{9}$$

на множестве допустимых решений X_p. Решению этой задачи будет соответствовать такая точка $x_p \in X_p$, которая доставляет минимальное значение $\rho(f(x_p), \mathrm{A})$, где $f(x_p) = (\alpha_1(x_p), \alpha_2(x_p))$, а $\rho(x,y)$ – метрика в пространстве R^2.

Таким образом, решение двухкритериальной задачи $x_p^* \in X_p$ является приемлемой альтернативой в смысле определения, введенного в [14], и обеспечивает минимальное расстояние по значению функции между допустимым решением и его нижней оценкой в задаче оптимизации (2).

Отметим, что в ряде случаев при построении моделей практических задач критерии α_1, α_2 и их отклонения от A_1 и A_2 не равнозначны. Для учета значимости точности решения задачи и быстродействия в схему решения двухкритериальной задачи введем весовые коэффициенты. Тогда критерий (9) преобразуем к виду:

$$G_\delta(x_p) = \delta(\alpha_1(x_p) - \mathrm{A}_1)^2 + (1-\delta)(\alpha_2(x_p) - \mathrm{A}_2)^2, \tag{10}$$

где значение $\delta \in [0,1]$ устанавливается экспертным путем из содержательных соображений.

Другой подход к упорядочению элементов множества X_p по двум критериям α_1 и α_2 может быть реализован путем построения многофакторных оценок полезности элементов $x_p \in X_p$ [15]. Получение таких многофакторных оценок связано с предварительной нормализацией критериев на основе применения функций полезности частных критериев. Для каждого критерия $\alpha_i(x_p)$, $i=1,2$ вычислим функцию полезности вида:

$$p_i(\alpha_i(x_p)) = \left(\Delta\alpha_i \cdot (\alpha_i(x_p) - \alpha_i^-)\right)^{\lambda_i},$$

где $\Delta\alpha_i = \dfrac{1}{\alpha_i^+ - \alpha_i^-}$; α_i^-; α_i^+ – соответственно наилучшее и наихудшее значение критерия $\alpha_i(x_p)$, $i=1,2$; λ_i – параметр, определяющий нелинейность зависимости локальной полезности от нормализованного значения критерия $\alpha_i(x_p)$.

В зависимости от наличия информации об относительной важности критериев рассмотрим применение следующих видов многофакторных оценок полезности альтернатив $x_p \in X_p$.

1. Когда известны весовые коэффициенты относительной важности критериев точности решения и быстродействия и их функций полезности применяется аддитивная оценка вида:

$$P(x_p) = \delta \cdot p_1(\alpha_1(x_p)) + (1-\delta) \cdot p_2(\alpha_2(x_p)) \to \max_{x_p \in X_p},$$

$$x_p^* = \arg\max_{x_p \in X_p} P(x_p).$$

2. Для случая, когда информация об относительной важности критериев отсутствует, применяется следующая оценка:

$$P(x_p) = \max_{x_p \in X_p} \min_{i=1,2} p_i(\alpha_i(x_p)),$$

$$x_p^* = \arg\max_{x_p \in X_p} \min_{i=1,2} p_i(\alpha_i(x_p)).$$

Отметим, что рассмотренные подходы к решению многокритериальной задачи (2) могут быть легко обобщены на случай произвольного числа критериев $\alpha_i(x_p)$.

Выводы

Предложенный в данной работе подход к формированию многофакторных оценок при выборе наилучшего решения оптимизационных задач размещения может быть широко использован в системах, основанных на знаниях о математических моделях и современных методах локальной и глобальной оптимизации, предназначенных для решения задач упаковки, компоновки и раскроя в различных предметных областях науки и техники.

Список литературы. 1. *Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J.* Cutting and packing// in: M. Dell'Amico, F. Maffioli and S. Martello Eds. Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons, Chichester.- 1997.- P. 393-412. 2. *Bennell, J.A. and J.F. Oliveira*, A tutorial in nesting problem: the geometry. European Journal of Operational Research, Invited review, 184, 397-415, 2008. 3. *Burke E.* A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem/ Burke E., Heller R., Kendall G., Whitwell G. //Operational research, 2004, Volume 53, N3. 4. *Liu Huyao, He Yuanjun and Julia A Bennell*, The irregular nesting problem – A new approach for nofit polygon calculation, Journal of the Operational Research Society, 58, 1235-1245. 5. *Dagli C.H.* Knowledge-based systems for cutting stock problems// Europ.Journ. of Oper. Res. – 1990. – Vol. 44. – P. 160 – 166. 6 . *Стоян Ю.Г., Романова ТО ЕСТЬ* Концептуальные основы построения системы решения R-задач: Препр./ АН Украины. Ин-т проблем машиностроения; 366.- Харьков:1992. — 14 с. 7. *Романова ТО ЕСТЬ* Представление знаний в системе решения задач геометрического проектирования // Кибернетика. – 1991. – № 5. – С. 36-42. 8. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986.- 266с. 9. *Yu. G. Stoyan, G. Yaskov*. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip//European Journal of Operational Research, 2004, Vol. 156, pp. 590-600. 10. *Стоян Ю.Г.* Размещение кругов и невыпуклых многоугольников с поворотами в прямоугольнике минимальной длины/ Стоян Ю.Г., Злотник М.В.// Докл. НАН Украины – 2007. – N2. – С. 37-42. 11. *Стоян Ю.Г.* Оптимизация упаковки одинаковых кругов в многосвязную область/Стоян Ю.Г., Чугай А. //Доклады НАН Украины. – 2004. – N12. – С. 64-68. 12. *Y. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil, T. Romanova* Phi-function for 2D primary objects//Studia Informatica Universalis, 2002, Vol. 2, No 1, pp. 1-32. 13. *Yurij Stoyan, Guntram Scheithauer, Nikolay Gil, Tatiana Romanova.* Phi-functions for complex 2D-objects//4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. Vol. 2, No 1, 2004 – pp. 69 – 84. 14. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.–М.: Наука, 1982.–286 с. 15. *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – Киев: Наук. думка, 2002. – 164 с.

Поступила в редколлегию 2.04.2008