

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАМЕТРОВ ЧАСТИЦ ПОРОШКОВЫХ МАСС ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ

ТРОФИМЕНКО И.С.

Исследуются дисперсные характеристики порошкообразных материалов. Рассматриваются функции распределения частиц такого материала по их размерам. Описываются методы построения графиков распределений частиц в зависимости от их дисперсности. Рассматриваются логарифмически нормальное распределение и соответствующая плотность распределения частиц в зависимости от полидисперсности порошковой смеси.

1. Введение и постановка задачи

Оценка степени дисперсности порошковых материалов производится с помощью ряда характеристик, таких как удельная поверхность, средний размер частиц, наибольший и наименьший размеры частиц, разность между наибольшим и наименьшим их размерами [1,2]. Но все же дисперсность наиболее точно можно охарактеризовать дисперсным (зерновым, гранулометрическим) составом. При этом определяются не только указанные выше параметры, но и процентное содержание частиц каждого размера.

Порошкообразные материалы представляют собой системы, состоят из множества частиц, которые различаются по размерам и форме. Эти системы являются статистическими генеральными совокупностями и чаще всего одно- или многокомпонентными. Необходимо учитывать, что порошкообразный материал, состоящий из смеси порошков, полученных из одного вещества разными способами, по дисперсному составу является многокомпонентной совокупностью.

Из-за неправильной геометрической формы частиц их размеры трудно определить посредством измерений. При исследовании размеров и формы частиц введены понятия эквивалентного и седиментационного диаметра δ_e и δ_s (далее будем опускать индексы при δ).

Диаметры частиц являются случайными величинами. С помощью функции распределения $D(\delta)$ массы материала по диаметрам частиц или связанной с ней функции $R(\delta)$ можно описать свойства порошкового материала. Применяя результаты ситового анализа, можно определить характеристики зернового состава порошкообразного материала. Функция $D(\delta)$ представляет собой выраженное в процентах отношение массы всех частиц, диаметр которых меньше δ , к общей массе порошкообразного материала. Функция $R(\delta)$ является выраженным в процентах отношением массы всех частиц, диаметр которых превышает δ , к общей массе материала.

Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} D + R &= 100\%; D(\delta_{\min}) = 0; \\ D(\delta_{\max}) &= 100\%; \\ R(\delta_{\min}) &= 100\%; R(\delta_{\max}) = 0, \end{aligned}$$

здесь $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ – наименьший и наибольший диаметры частиц исследуемого материала.

Часто вместе с функциями распределения частиц по диаметрам используются функции распределения масс частиц, а также числа частиц по скоростям оседания. В дальнейшем указанные функции будем обозначать соответственно $\tilde{D}(w)$, $\tilde{D}_n(w)$ и $\tilde{R}(w)$, $\tilde{R}_n(w)$, здесь w – скорость оседания частиц.

Имеют место следующие равенства:

$$D(\delta) = \tilde{D}[w(\delta)]; D(\delta) = \tilde{R}[w(\delta)],$$

где $w(\delta)$ – скорость витания как функция диаметра.

Функция распределения диаметров частиц строится следующим образом: по оси абсцисс откладываются в нужном масштабе значения одномерной случайной величины, т.е. значения диаметра δ частиц или какой-либо функции; по оси ординат – значения функций $D(\delta)$ или $R(\delta)$, т.е. процентное содержание тех частиц, диаметр которых больше или меньше δ . Так как $D + R = 100\%$, то пересечение кривых в точке, где $D = R = 50\%$. Функция распределения $D(\delta)$ является непрерывной монотонной функцией величины δ , она непрерывна и дифференцируема почти всюду. На практике часто используется функция $\phi(\delta)$, которую можно получить дифференцируя функцию $D(\delta)$. Таким образом.

$$\int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \phi(\delta) d\delta = D(\delta_{\max}) - D(\delta_{\min}), \quad (1)$$

$$\phi(\delta) = dD(\delta) / d\delta = -dR(\delta) / d\delta.$$

Функция $\phi(\delta)$ является плотностью распределения массы материала по диаметрам частиц или она дифференцируема почти всюду. Функция распределения $D(\delta)$ представляет собой интегральную функцию распределения. Задаются нормированные плотности распределения числа частиц по диаметрам $\phi_n(\delta)$ и поверхности частиц по диаметрам $\phi_s(\delta)$. Имеют место равенства:

$$\phi_s(\delta) = \frac{dD_s(\delta)}{d\delta}; \quad \phi_n(\delta) = \frac{dD_n(\delta)}{d\delta}.$$

Полученные путем анализа дисперсного состава процентные содержания отдельных фракций можно строить в виде гистограмм. При этом по оси абсцисс берутся размеры частиц в заданном масштабе. По оси ординат – процентное содержание каждой фракции, отнесенное к массе всего материала, т.е. относительные содержания фракций. При изображении гистограмм

рамм необходимо учитывать, что диапазоны отдельных фракций обычно берутся неодинаковыми. Это связано как с техническими условиями выполнения анализа, так и с тем, что для более полной характеристики порошков и пылей размеры диапазонов фракций необходимо брать больше. Поверхности частиц диаметром 1 мкм в 4 раза меньше поверхности частицы диаметром 2 мкм, при этом для частиц диаметром 10 и 11 мкм поверхность отличается лишь на 20%, а для частиц диаметром 100 и 101 мкм – всего на 2 %. Отсюда, если материал фракций 1-2 или 1-3 мкм, 2-4 или 3-6 мкм значительно различается по свойствам, которые связаны с крупностью частиц, тогда в областях 10 или 100 мкм отличие в 1-2 мкм мало отражается на свойствах частиц, и здесь разделение на столь мелкие диапазоны неуместно. Диапазоны фракций должны с увеличением размеров возрастать в геометрической прогрессии, чтобы различия свойств частиц являлись одинаковыми во всех фракциях.

Кривая плотности распределения строится при помощи дифференцирования по δ кривой распределения D . Она является истинной плотностью распределения. Вследствие того, что кривые зернового распределения продуктов измельчения и плотности распределения этих материалов плавные, присутствует некоторая связь между размерами частиц и их массовым содержанием. Графики кривых распределения могут отличаться из-за физико-химической природы, способа получения и метода получения порошкообразного материала, и от оборудования, производящего измельчение.

Существуют различия между кривыми распределения и плотностями распределения, полученными по результатам анализа, производившегося одним и тем же методом, и кривыми, полученными на основе другого метода. Это является следствием того, что каждому методу присущи свои математические ошибки, вызванные допущениями, которые присутствуют в основе метода.

Целью работы является анализ функции распределения частиц порошкообразного материала в зависимости от его дисперсного состава.

Задача работы состоит: 1) в определении логарифмически нормальной функции распределения частиц порошкообразного материала по его дисперсным свойствам и её плотности распределения; 2) в установлении зависимости характеристик функции распределения от свойств исследуемой смеси.

2. Логарифмически нормальное распределение

Логарифмически нормальное распределение (ЛНР) выводится при помощи функции распределения, в которую необходимо подставить в качестве аргумента не диаметр частиц, а логарифм диаметра.

Кривая данного распределения принимает Гауссову форму, если по оси абсцисс брать логарифмы диаметров частиц, по оси ординат – значения D и R . Тогда значения диаметров, откладываемые через одинако-

вые интервалы на оси абсцисс, увеличиваются в геометрической прогрессии. Кривая плотности распределения в этом случае принимает симметричный вид.

Применимость ЛНР при исследовании порошковых масс была обоснована Колмогоровым. Универсальность этого закона для многих видов порошкообразных материалов доказывается экспериментальными исследованиями [3,4]. Были получены следующие допущения:

- 1) за интервал времени между τ и $\tau+1$ из одной частицы диаметром δ_0 при дроблении имеем несколько частиц, на распределение которых относительно δ/δ_0 не влияют абсолютные размеры первоначальной частицы, ее предшествующая история и судьба других частиц;
- 2) среднее число частиц, которые получаются из одной частицы за интервал времени между τ и $\tau+1$, конечно и превышает единицу.

Ниже приведена функция ЛНР массы материала по диаметрам частиц:

$$D = \frac{100}{\sqrt{2\pi} \lg \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\lg \delta} \exp \left[-\frac{(\lg \delta - \lg \delta_{50})^2}{2 \lg^2 \sigma} \right] d \lg \delta. \quad (2)$$

Здесь δ_{50} – медиана распределения; $\lg \delta$ – стандартное отклонение логарифмов диаметров от их среднего значения. Входящий в уравнение (2) интеграл нельзя представлять через элементарные функции. Её переобозначают в t :

$$t = (\lg \delta - \lg \delta_{50}) / \lg \sigma. \quad (3)$$

Аргумент t является нормированной нормально распределенной величиной. Прделав указанную замену, пришли к функции аргумента t :

$$D(\delta) = F(t) = F \left(\frac{\lg \delta - \lg \delta_{50}}{\lg \sigma} \right) = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt. \quad (4)$$

Это нормированная функция нормального распределения и изменяется в пределах от 0 до 100%. ЛНР графически удобно представлять в такой прямоугольной системе координат, по оси абсцисс которой берутся логарифмы диаметров (а ставятся значения диаметров δ), по оси же ординат берутся значения величины t (а ставятся значения функции $F(t)$). Значениям $F(t) < 50\%$ соответствуют отрицательные t , которые наносятся вниз от начальной точки $F(t) = F(0) = 50\%$.

При увеличении полидисперсности порошкообразного материала увеличивается дисперсия и стандартное отклонение $\lg \delta$ ее кривой распределения; при этом угол α уменьшается. При приближении к вертикали

линии распределения в логарифмически вероятностной координатной сетке сужается распределение, при этом исследуемый материал более однороден.

Среднее квадратичное отклонение логарифмов диаметров по соотношению (3): $\lg \sigma = (\lg \delta - \lg \delta_{50}) / t$. Если же $t = \pm 1$, то $\lg \sigma = \pm (\lg \delta - \lg \delta_{50})$.

Продифференцировав $D(\delta)$ из (4) по δ , получим функцию плотности распределения:

$$\phi(\delta) = \frac{100 \lg e}{\sqrt{2\pi} \delta \lg \sigma} \exp \left[-\frac{(\lg \delta - \lg \delta_{50})^2}{2 \lg^2 \sigma} \right] = \frac{\lg e}{\delta \lg \sigma} f(t). \quad (5)$$

Абсцисса δ_m максимума плотности распределения, вычисляется при помощи приравнивания нулю первой производной функции (5). Если массы частиц имеют логарифмически нормальное распределение, то численное распределение частиц по размерам, удельная поверхность, распределение скоростей витания частиц, обтекание которых находится в ламинарной области, тоже логнормально. Величина $M_a(\delta)$ называется начальным моментом и имеет вид

$$M_a(\delta) = \frac{1}{100} \int_0^{\delta} \delta^a \phi(\delta) d\delta.$$

Для случая ЛНР эта величина запишется следующим образом:

$$M_a(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lg \sigma} \int_{-\infty}^{\lg \delta} \delta^a \exp \left[-\frac{(\lg \delta - \lg \delta_{50})^2}{2 \lg^2 \sigma} \right] d(\lg \delta). \quad (6)$$

Из (6), используя (3), получаем:

$$M_a(\delta) = \frac{(\delta_{50})^a}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{a^2 \ln^2 \sigma}{2} \int_{-\infty}^{t(\delta)} \exp \left[-\frac{(t - a \ln \sigma)^2}{2} \right] dt. \quad (7)$$

Далее получим:

$$\begin{aligned} & \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{(t - a \ln \sigma)^2}{2} \right] dt = \\ & = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a=t-a \ln \sigma} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du = F(u). \end{aligned}$$

Здесь $F(u)$ – функция нормального распределения (4) от $u = t - a \lg \sigma$;

$$M_a(\delta) = \frac{(\delta_{50})^a}{100} \exp \left(\frac{a^2 \ln^2 \sigma}{2} \right) F(u).$$

Величина $M_a(\infty) = M_a(\delta)|_{\delta=\infty}$ является полным моментом порядка a . Для частиц размеров от 0 до ∞ полное распределение по размерам удовлетворяет:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(t - a \ln \sigma)^2}{2} \right] dt = 1;$$

$$M_a(\infty) = (\delta_{50})^a \exp \frac{a^2 \ln^2 \sigma}{2}.$$

Модуль преобразования натуральных логарифмов в десятичные будет равен $C = \lg e = 0,4343$. Отсюда

$$\text{следует: } M_a(\infty) = (\delta_{50})^a \exp \frac{a^2 \lg^2 \sigma}{2C^2}.$$

Если $a = 0$, то уравнение (7) является функцией распределения массы материала по диаметрам частиц, нормированная на единицу, $D(\delta)/100$. Следовательно, ее можно принимать как начальный момент нулевого порядка $M_0(\delta)$.

Вклад $S(\delta)$ всех частиц с диаметром меньше δ в удельную поверхность материала можно выразить через функцию ЛНР массы по диаметрам, которая нормированная на единицу, $D(\delta)/100$, в случае, когда подынтегральное выражение в ней (т.е. функцию плотности распределения) умножить на $6/\pi\delta$.

Из уравнений (2) и (6) получаем:

$$\begin{aligned} S(\delta) &= \\ &= \frac{6}{\rho \sqrt{2\pi} \lg \sigma} \int_{-\infty}^{\lg \delta} \delta^{-1} \exp \left[-\frac{(\lg \delta - \lg \delta_{50})^2}{2 \lg^2 \sigma} \right] d(\lg \delta) = \\ &= \frac{6}{\rho} M_{-1}(\delta). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, вклад всех частиц с диаметром меньше δ в удельную поверхность пропорционален начальному моменту минус первого порядка. Если учесть уравнения (8), аналитическое выражение полной удельной поверхности материала S_{∞} примет вид

$$S_{\infty} = \frac{6}{\rho \delta_{50}} \exp \frac{\lg^2 a}{2C^2}. \text{ Функция распределения поверхности частиц по их диаметрам:}$$

$$D_{S(\delta)} = \frac{S(\delta)}{S(\infty)} 100 = \frac{M_{-1}(\delta)}{M_{-1}(\infty)} = F(t + \ln \sigma).$$

Здесь $F(t + \ln \sigma)$ – нормированная функция нормального распределения аргумента $t + \ln \sigma$; t выражается через δ по формуле (3).

Пусть частицы имеют шарообразную форму и одинаковую плотность ρ . Количество частиц каждого размера определим, умножив их массу на $6/\pi\rho^3$. Число частиц, диаметры которых меньше δ , в единице объема равно

$$\begin{aligned} n(\delta) &= \\ &= \frac{6}{\pi\rho\sqrt{2\pi} \lg \sigma} \int_{-\infty}^{\lg \delta} \delta^{-3} \exp \left[-\frac{(\lg \delta - \lg \delta_{50})^2}{2 \lg^2 \sigma} \right] d(\lg \delta) = \\ &= \frac{6}{\pi\rho} M_{-3}(\delta). \end{aligned}$$

Общее количество частиц в единице объема:

$$n(\infty) = \frac{6}{\pi \rho_{50}^3} \exp \frac{4,5 \lg^2 \sigma}{C^2} = \frac{6}{\pi \rho} M_{-3}(\infty).$$

Функция распределения количества частиц по их диаметрам:

$$D_n(\delta) = \frac{n(\delta)}{n(\infty)} 100 = \frac{M_{-3}(\delta)}{M_{-3}(\infty)} 100 = F(t + 3 \lg \sigma).$$

Пользуясь уравнением (4), можно определить дисперсию диаметра частиц, равную

$$[(\delta - \delta_{av})^2]_{av} = M_2(\infty) - M_1^2(\infty).$$

Чтобы получить функцию распределения $D(w)$ массы материала по скоростям витания частиц, запишем зависимость между седиментационным диаметром δ и скоростью витания w при условии, что движение частиц подчиняется закону Стокса:

$$w = k\delta^2 \text{ и } w_{50} = k\delta_{50}^2,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Отсюда

$$\lg \delta = \frac{1}{2}(\lg w - \lg k); \lg \delta_{50} = \frac{1}{2}(\lg w_{50} - \lg k).$$

Подставив эти значения в уравнение (2) и определив величину σ_w соотношением

$$\lg \sigma_w = 2 \lg \sigma,$$

придем к формуле

$$\tilde{D}(w) = \frac{100}{\sqrt{2\pi} \lg \sigma_w} \int_{-\infty}^{\lg w} \exp \left[-\frac{(\lg w - \lg w_{50})^2}{2 \lg^2 \sigma_w} \right] d(\lg w).$$

Отсюда видно, что $\lg \sigma_w$ – это дисперсия логарифма скорости витания.

Часто анализ дисперсного состава проводят по неполным данным, например, при анализе после просева материала через сито с ячейками размером δ_n . В таких случаях в результате анализа будет устанавливаться усеченное распределение, состоящее из частиц, у которых $\delta \leq \delta_n$.

Значение параметра t , отвечающее границе усечения, определяется по формуле

$$t_{tr} = r = (\lg \delta_n - \lg \delta_{50}) / \lg \sigma,$$

где $\lg \delta_{50}$ и $\lg \sigma$ – параметры, характеризующие исходное неусеченное распределение.

Следовательно, из первоначальной генеральной совокупности исключена часть $100 - F(r)$, называемая

степенью усечения, и функция распределения одно-сторонне усеченного логарифмически нормального распределения, если отброшены частицы с размерами $\delta > \delta_n$, будет иметь вид:

$$D(\delta) = 100F\left(\frac{\lg \delta - \lg \delta_{50}}{\lg \sigma}\right) / F(r). \quad (9)$$

Соответствующая плотность распределения выразится формулой

$$\phi(\delta) = \frac{100}{F(r)} \frac{\lg e}{\delta \lg \sigma} f\left(\frac{\lg \delta - \lg \delta_{50}}{\lg \sigma}\right).$$

Полученная функция распределения и соответствующая плотность распределения выразятся уравнениями

$$D(\delta) = \frac{100}{71,5} F\left(\frac{\lg \delta - \lg \delta_{50}}{\lg \sigma}\right);$$

$$\phi(\delta) = \frac{100}{71,5} \frac{\lg e}{\delta \lg \sigma} f\left(\frac{\lg \delta - \lg \delta_{50}}{\lg \sigma}\right).$$

Функцию неусеченного ЛНР находим из уравнения (9):

$$F\left(\frac{\lg \delta - \lg \delta_{50}}{\lg \sigma}\right) = \frac{F(r)}{100} D(\delta). \quad (10)$$

3. Заключение

Научная новизна состоит в следующем. Определены характеристики функции логнормального распределения частиц порошкообразного материала по их размерам.

Практическая ценность работы заключается в возможности определения логарифмически нормальной функции распределения и её параметров для частиц порошкообразного материала по скорости их витания. Описан процесс построения графиков такого распределения и выведена зависимость функции распределения от размеров частиц и полидисперсности исследуемого материала.

Литература: 1. Вовк А.В., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Управление процессом формирования порошковых смесей. // АСУ и ПА. 2007. Вып. 141. С. 53-58. 2. Вовк А.В. Процесс формирования порошковых масс в объёме активной смеси // Радиоэлектроника и информатика. 2007. Ч.2. С. 141-144. 3. Ходаков Г.С. Физика измельчения. М.: Наука, 1972. 307с. 4. Фигуровский Н.И. Седиментационный анализ. М.: Изд-во АН СССР, 1982. 332с.

Поступила в редколлегию 18.08.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Трофименко Игорь Сергеевич, аспирант кафедры «Прикладной математики» ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61144, Харьков, ул. ком. Уборевича, 50, кв.160.