УДК 510.62

С. Н. ГЕРАСИН, Д. Э. СИТНИКОВ, С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

О ПРЕДИКАТАХ ДИФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ

Дифункциональным называют [1, с. 34] любое отношение E, заданное на декартовом квадрате произвольного множества A и обладающее следующим свойством: если xEy_1, x_1Ey_1 и x_1Ey, то xEy. Предикатом дифункциональности на A назовем любую функцию $E(x, y)$, заданную на $A \otimes A$ и определенную условиями:

$$E(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } xEy, \\ 0, & \text{если } x\bar{E}y. \end{cases} \qquad (1)$$

Очевидно, что любой предикат дифункциональности E, и только такой предикат, является одним из корней логического уравнения

$$\forall x \forall y \forall x_1 \forall y_1 (X(x, y_1) \wedge X(x_1, y_1) \wedge X(x_1, y) \supset X(x, y)) \equiv 1, \qquad (2)$$

называемого нами условием квазитранзитивности. Здесь X — переменный предикат, заданный на $A \otimes A$.

Покажем, что множество всех корней уравнения (2), т. е. общий вид предиката дифункциональности определяется выражением

$$E_{f_1, f_2}(x, y) = D(f_1(x), f_2(y)), \qquad (3)$$

где f_1, f_2 — произвольно выбираемые функции, заданные на A, со значениями в множестве R, которое является семейством всех подмножеств множества A. Функции f_1, f_2 выполняют в выражении (3) роль параметров, задающих систему всех корней уравнения (2). Символом D обозначен предикат равенства на $R \otimes R$, определяемый условиями

$$D(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v, \\ 0, & \text{если } u \neq v. \end{cases} \qquad (4)$$

Выражение, стоящее справа от знака равенства в (3), назовем моделью дифункциональности.

Предикат дифункциональности перспективен для применений в психологической бионике, в частности для математического моделирования работы органов чувств. Рассмотрим одну из важных психофизических интерпретаций предиката дифункциональности, в которой он выступает в роли механизма зрительной индукции. Множество A интерпретируем как совокупность всевозможных световых излучений, воспринимаемых глазом человека. Предположим, что испытуемому поочередно предъявляются для зрительного восприятия два световых излучения x и y, формируемых в центре поля зрения на небольшом тест-поле. Будем считать, что тест-поле в момент предъявления первого излучения x окружено одним фоном, а в момент предъявления второго излучения y — другим.

Испытуемый должен сравнить цвета, видимые в разное время на тест-поле, индуцируемые первым и вторым излучениями. Если цвета совпадают, испытуемый формирует ответ «да», если не совпадают — «нет». Предикат $E(x, y)$ интерпретируем как преобразование сигналов, производимое испытуемым в процессе сравнения цветов, индуцируемых излучениями x и y. Значение $E(x, y) = 1$ объясняем как положительный ответ испытуемого, значение $E(x, y) = 0$ — как отрицательный. Функции $u = f_1(x)$ и $v = f_2(y)$ комментируем как преобразование зрительной системой человека световых излучений x, y соответственно в цвета u и v. Предикат $D(u, v)$ интерпретируем как операцию сравнения цветовых ощущений u и v, выполняемую сознанием испытуемого.

Как известно [2, с. 102—103], благодаря действию механизма зрительной индукции фон, окружающий тест-поле, влияет на его цвет. Поэтому в описанном выше опыте одинаковые световые излучения индуцируют различные цвета, и свойство рефлексивности $E(x, x) = 1$, вообще говоря, не выполняется. Однако, как свидетельствует опыт, условие квазитранзитивности

$$E(x, y_1) \wedge E(x_1, y_1) \wedge E(x_1, y) \supset E(x, y) \equiv 1 \qquad (5)$$

всегда выполняется, причем с высокой точностью. Психофизическое толкование свойства (5) следующее: если цвета излучения x и y_1; x_1 и y_1; x_1 и y совпадают, то цвет излучения x обязательно совпадает с цветом излучения y.

Достаточно глубокое изучение свойств предиката дифункциональности откроет путь к теоретическому и экспериментальному исследованию механизма зрительной индукции, который лежит в основе важного свойства зрения — константности цветового восприятия. Лист бумаги, который выглядит белым при прямом освещении солнцем, будет также выглядеть белым при освещении его светом, отраженным от зеленой листвы леса. Однако световые излучения, отражаемые листом бумаги в этих двух случаях, резко отличаются по спектру. Благодаря действию механизма зрительной индукции, глаз приобретает способность анализировать не только спектры световых излучений, отражаемых поверхностью тел, но и отражательные свойства этих поверхностей. «Видящие» же автоматы пока не умеют этого делать.

Сформулируем и докажем теорему об общем виде предиката дифункциональности, обосновывающую справедливость зависимости (3).

Теорема 1. *Для возможности представления предиката $E(x, y)$ в форме (3) необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию квазитранзитивности (5).*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что $E(x, y) = D(f_1(x), f_2(y))$ и $E(x, y_1) = E(x_1, y_1) = E(x_1, y) = 1$. Это означает, что $f_1(x) = f_2(y_1)$, $f_1(x_1) = f_2(y_1)$, $f_1(x) = f_2(y_1)$. Отсюда вытекает, что $f_1(x) = f_2(y)$, т. е. $E(x, y) = 1$. Следовательно, любой предикат вида (3) удовлетворяет условию квазитранзитивности.

Достаточность. Введем множество $T_x = \{y \mid E(x, y) = 1\}$. Покажем, что если $T_x \cap T_{x_1} \neq \varnothing$, то $T_x = T_{x_1}$. Действительно, если $T_x \cap T_{x_1} \neq \varnothing$, то существует y_1 такой, что $E(x, y_1) = E(x_1, y_1) = 1$. Далее, если $y \in T_{x_1}$, то $E(x_1, y) = 1$, и по свойству квазитранзитивности получаем $E(x, y) = 1$, т. е. $y \in T_x$. Если $y \in T_x$, то $E(x, y) = 1$, и по свойству квазитранзитивности получаем $E(x_1, y) = 1$, т. е. $y \in T_{x_1}$. Таким образом, мы доказали, что $T_x = T_{x_1}$.

Построим теперь для заданного предиката дифункциональности функции f_1, f_2. Введем множество $G = \{y \mid \exists\, x E(x, y) = 1\}$. Для любого y из G существует непустое множество $K_y = \{x \mid E(x, y) = 1\}$. Поскольку для x_1 и x_2 из K_y $y \in T_{x_1} \cap T_{x_2}$, каждому x из K_y соответствует, в силу только что доказанного утверждения одно и то же множество T_x^y. Таким образом, любой y из G однозначно определяет множество T_x^y. Сконструируем функции f_1 и f_2 следующим способом:

$$f_1(x) = T_x,\quad f_2(y) = \begin{cases} T_x^y, & \text{если } y \in G, \\ A, & \text{если } y \notin G. \end{cases} \tag{6}$$

Наконец, покажем, что с помощью вводимых функций f_1 и f_2 можно представить в форме (3) любой предикат $E(x, y)$, удовлетворяющий условию квазитранзитивности. Пусть $E(x, y)$ — произвольно выбранный предикат. Если x и y таковы, что $E(x, y) = 1$, то $x \in K_y$ и, следовательно, $T_x = T_x^y$. Это означает, что $D(f_1(x), f_2(y)) = 1$. Если же x и y выбраны так, что для них $E(x, y) = 0$, то возможны два случая. 1) $y \in G$. Тогда, очевидно, $T_x \neq T_x^y$, так как в противном случае из того, что $y \in T_x^y$ (а это всегда имеет место), вытекало бы, что $y \in T_x$, т. е. что $E(x, y) = 1$. 2) $y \notin G$. Тогда $f_2(y) = A$. Но $f_1(x) \neq A$, так как это означало бы, что $T_x = A$ и, следовательно, $E(x, y) = 1$. Значит, и в этом случае $D(f_1(x), f_2(y)) = 1$. Таким образом, при любом выборе предиката $E(x, y)$, удовлетворяющего условию квазитранзитивности, равенство (3) выполняется. Теорема доказана.

В только что приведенном доказательстве использован ряд новых математических объектов. Для некоторых из них будет нелишним дать содержательное истолкование. Сделаем это для рассмотренной выше интерпретации, в которой предикат дифункциональности используется в качестве формального эквивалента механизма зрительной индукции. Множество $T_x = \{y \mid E(x, y) = 1\}$ — это совокупность всех тех вторых излучений y, цвет которых оказывается для испытуемого тем же самым, что и цвет первого излучения x. В тех случаях, когда множество T_x пусто (а такой случай, вообще говоря, возможен), первое излучение имеет цвет, который невозможно индуцировать никаким из вторых излучений. Например, излучение, которое на белом фоне выглядит как зеленый цвет наивысшей насыщенности, на красном фоне будет ощущаться как еще более насыщенный зеленый цвет. Такой «сверхнасыщенный» зеленый цвет невозможно получить на белом фоне никаким световым излучением. Аналогично можно ввести множество $S_x = \{x \mid E(x, y) = 1\}$ всех тех первых излучений x, цвет которых оказывается для испытуемого тем же самым, что и цвет второго излучения y.

Множество $G = \{y \mid \exists x \; E(x, y) = 1\}$ есть совокупность всех тех вторых излучений y, которые допускают уравнивание по цвету каким-нибудь первым излучением x.

Аналогично можно ввести множество $F = \{x \mid \exists y E(x, y) = 1\}$ всех тех первых излучений x, которые допускают уравнивание по цвету каким-нибудь вторым излучением.

Введем также множество $L = A \setminus F$ всех тех первых излучений, которые невозможно уравнять никаким из вторых излучений, и множество $M = A \setminus G$ всех тех вторых излучений, которые невозможно уравнять никаким из первых излучений.

На рис. 1 дана графическая иллюстрация взаимоотношений множеств F, G и L, M с множеством всех первых (*а*) и вторых (*б*) излучений.

Множества F, G и L, M могут иметь в общем случае различную мощность. Моделью дифункциональности множество F разбивается на систему непересекающихся классов $P_1, P_2, \ldots$, а множество G — на систему непересекающихся классов $Q_1, Q_2, \ldots$. Это графически иллюстрируется на рис. 2, *а*, *б*. Число (или мощность) классов обоих разбиений одинаково (на рисунке число классов в каждом разбиении принято равным четырем). Между классами обоих разбиений можно установить взаимно однозначное соответствие (оно представлено на рис. 2 линиями, соединяющими классы разбиений) такое, что световые излучения из соответствующих друг другу классов будут иметь одинаковые цвета. Цвета любых двух излучений, взятых из одного и того же класса каждого из разбиений, одинаковы. Цвета излучений, взятых из разных классов разбиения, различны. Согласно модели дифункциональности (3), задаваемой функциями (6), все излучения, входящие в состав множества L (или множества M), должны иметь одинаковый цвет. В действительности же это не так: психофизические наблюдения свидетельствуют о наличии в множествах L и M классов разноцветных световых излучений. В связи с этим возникает задача поиска несколько измененной конструкции функций f_1, f_2 для модели функциональности, более точно отражающей механизм зрительной индукции.

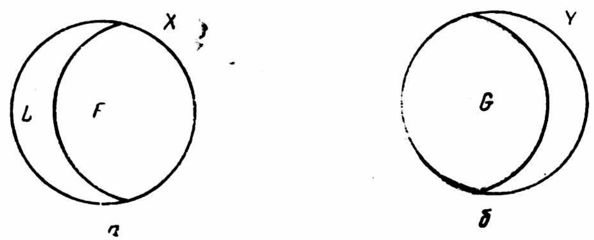

Рис. 1

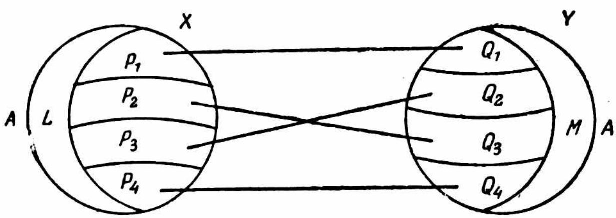

Рис. 2

Только что обнаруженное неполное соответствие функций f_1, f_2, заданных соотношениями (6), фактам одной из психофизических интерпретаций свидетельствует о том, что выбор этих функций не единственный, что их можно конструировать различными способами. В связи с этим возникает следующая задача. Даны две модели дифункциональности $D(f_1'(x), f_2'(y))$ и $D(f_1''(x), f_2''(y))$. Требуется узнать, эти модели представляют разные предикаты или один и тот же. Эту задачу можно решить с помощью теоремы об условиях тождества моделей дифункциональности.

Теорема 2. *Для того чтобы пары функций* $(f_1': A \to W_1', f_2': A \to W_2')$, $(f_1'': A \to W_1'', f_2'': A \to W_2'')$ *определяли один и тот же дифункциональный предикат* E, *необходимо и достаточно, чтобы существовала взаимно однозначная функция* $\varphi: W_1' \cap W_2' \to W_1'' \cap W_2''$ *такая, что* $\varphi(f_1'(x)) = f_2''(x)$, $\varphi(f_2'(y)) = f_2''(y)$ *для всех* x, y *таких, что* $f_1'(x) \in W_1' \cap W_2'$, $f_2'(y) \in W_1'' \cap W_2''$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть пары (f_1', f_2'), (f_1'', f_2'') определяют один и тот же дифункциональный предикат $E(x, y)$. Возьмем произвольно $a' \in W_1' \cap W_2'$. Очевидно, существуют такие $x, y \in A$, что $f_1'(x) = f_2'(y) = a'$. Отсюда следует, что $E(x, y) = D(f_1'(x), f_2'(y)) = 1$, а значит, $D(f_1''(x), f_2''(y)) = 1$, т. е. $f_1''(x) = f_2''(y)$.

Пусть $f_1''(x) = f_2''(y) = a''$. Очевидно, $a'' \in W_1'' \cap W_2''$. Таким образом, каждому $a' \in W_1' \cap W_2'$ соответствует некоторый элемент a'' из $W_1'' \cap W_2''$, т. е. на множестве $(W_1' \cap W_2') \times (W_1'' \cap W_2'')$ имеем некоторое отношение φ.

Покажем, что φ является отображением, т. е. любому $a' \in W_1' \cap W_2'$ соответствует единственный $a'' \in W_1'' \cap W_2''$. Пусть

$$f_1'(x_1) = f_2'(y_1) = f_2'(y_2) = f_1'(x_1) = a_1', \quad f_1''(x_1) = f_2''(y_1) =$$
$$= f_1''(x_2) = f_2''(y_2) = a_2'.$$

Тогда из $D(f_1'(x_1), f_2'(y_2)) = 1$ следует $D(f_1''(x_1), f_2''(y_2)) = 1$, т. е. $a_1' = a_2'$. Итак, φ — отображение (или функция), причем $\varphi(f_1'(x)) = f_1''(x)$, $\varphi(f_2'(y)) = f_2''(y)$. Очевидно, для всякого a'' из $W_1'' \cap W_2''$ найдется такое a' из $W_1' \cap W_2'$, что $\varphi(a') = a''$. Это означает, что φ сюръективно.

Покажем, что φ инъективно. Действительно, пусть

$$f_1'(x_1) = f_2'(y_1) = a_1', \quad f_2'(x_2) = f_2'(y_2) = a_2',$$

причем $a_1' \neq a_2'$. Отсюда следует, что $D(f_1'(x_1), f_2'(y_2)) = 0$, а значит, и

$$D(f_1''(x_1), f_2''(y_2)) = 0, \text{ т. е. } f_1''(x_1) \neq f_2''(y_2).$$

Теперь, если положить

$$a_1'' = f_1''(x_1) = f_2''(y_1), \quad a_2'' = f_1''(x_2) = f_2''(y_2),$$

очевидно, что $a_1'' = a_2''$. Мы показали, что если $a_1' \neq a_2'$, то $a_1'' \neq a_2''$, т. е. $\varphi(a_1') \neq \varphi(a_2')$. Этим доказана инъективность φ. Так как φ сюръективно и инъективно, то φ — взаимно однозначная функция. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует взаимно однозначная функция $\varphi: W_1' \cap W_2' \to W_1'' \cap W_2''$ такая, что $\varphi(f_1'(x)) = f_1''(x)$ $\varphi(f_2'(y)) = f_2''(y)$. Если $f_1'(x) = f_2'(y)$, то очевидно, $\varphi(f_1'(x)) = \varphi(f_2'(y))$. Иными словами, если $D(f_1'(x), f_2'(y)) = 1$, то $D(f_1''(x), f_2''(y)) = 1$. Если же $f_1''(x) = f_2''(y)$, то $\varphi^{-1}(f_1''(x)) = \varphi^{-1}(f_2''(y))$ (φ — взаимно однозначна и потому обратима). Другими словами, если $D(f_1''(x), f_2''(y)) = 1$, то и $D(f_1'(x), f_2'(y)) = 1$. Значит, пары функций f_1',

f_2'), (f_1'', f_2'') определяют один и тот же предикат. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что множество S пар вида $(\varphi(f_1), \varphi(f_2))$, где φ — взаимно однозначные функции, $f_1 : A \to W_1$, $f_2 : A \to W_2$ — некоторые определенные функции, определяет один и тот же дифункциональный предикат $E(x, y)$. Возникает вопрос, существует ли пара функций $(g_1, g_2) \in S$, которая определяет тот же предикат $E(x, y)$? Возьмем $g_1 : A \to G_1$, $g_2 : A \to G_2$ такие, что $G_1 \cap G_2 = W_1 \cap W_2$, $g_1(x) = f_1(x)$, $g_2(y) = f_2(y)$ для всех x, y таких, что $f_1(x)$, $f_2(y) \in W_1 \cap W_2$, а мощность множества $G_1 \cup G_2$ больше, чем мощность $W_1 \cup W_2$. Очевидно, пара $(g_1, g_2) \notin S$, так как нельзя установить взаимно однозначное соответствие между $W_1 \cup W_2$ и $G_1 \cup G_2$. С другой стороны, пара (g_1, g_2), в силу доказанной теоремы, определяет тот же предикат $E(x, y)$, что и пара (f_1, f_2).

Итак, для данного предиката E множество S не универсально. При каких же дополнительных условиях в множество S входят все пары, определяющие предикат E? Если в качестве пар (g_1, g_2) рассматривать только такие, что $g_1 : A \to W_1$, $g_2 : A \to W_2$, где W_1, W_2 — произвольные множества, то все эти пары, определяющие предикат E, войдут в множество S. Действительно, при сделанных предположениях имеем $f_1 : A \to W_1$, $f_2 : A \to W_2$. Рассмотрим произвольную пару (g_1, g_2), $g_1 : A \to W'$, $g_2 : A \to W'$. Так как она определяет тот же предикат, что и пара (f_1, f_2), то, в силу теоремы 2, существует взаимно однозначная функция $\varphi : W \to W'$ такая, что $\varphi(f_1) = g_1$, $\varphi(f_2) = g_2$, т. е. $(g_1, g_2) \in S$.

Список литературы: 1. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.— 392 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Начала теории интеллекта // Пробл. и перспективы.— I — М., 1982.— С. 210 Деп. в ВИНИТИ, 21 мая, № 3324—82. 3. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1969.— 1057 с.

Поступила в редколлегию 04.02.86