УДК 62.506.001

А. Г. БОРЗЕНКО, А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ В НЕЙРОННОЙ СЕТИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ КОРУ МОЗГА

Изучение функций мозга математическим методом привело к созданию большого числа моделей, которые учитывают ряд возможных свойств нейронов и коры в целом. При моделировании за основу часто принимаются не исследованные детально тонкие свойства нейронов и допускаются предположения о неизвестных сторонах деятельности нейронов. По нашему мнению, более перспективным представляется моделирование на основе сравнительно грубых, но достоверно известных приближенных гипотез о свойствах нейрона.

Описание модели. Модель нейронной сети основывается на следующих постулатах: 1) нейронная сеть состоит из формальных нейронов; 2) нейронам присуще свойство рефрактерности, причем выход из состояния рефрактерности зависит от момента последнего возбуждения нейрона; 3) непосредственно через свой аксон один нейрон с некоторой вероятностью возбуждает другой нейрон, если последний не находится в состоянии рефрактерности; 4) если нейрон не находится в состоянии рефрактерности, то с некоторой вероятностью он может быть возбужден внешним по отношению к нейронной сети возбуждением; 5) аксоны нейронов осуществляют задержку сигналов; 6) наличие порога чувствительности моделируется тем, что учитываются только надпороговые сигналы; 7) других механизмов взаимодействия нейронов нет.

Кора представляется в виде специализированной нейронной сети, состоящей из однородных макроучастков, связанных друг с другом.

Специализация нейронов и участков определяется числом работающих синапсов внутри и вне макрообласти.

Цель исследования — создать математическую модель распространения возбуждения в нарушенной хирургически и в нормальной коре мозга и получить формулы, дающие количественные характеристики распространения возбуждения, промоделировать хорошо известные экспериментальные факты — специализацию участков коры и возможность восстановления в некоторой мере функций ее разрушенных макроучастков.

Формализация задачи. По своему характеру модель является стохастической. Примем следующие обозначения: N — общее число нейронов в сети; $\sigma_i(t)$ — вероятность того, что i-нейрон возбужден в момент времени t, $i \in I = \{q : q = 1, 2, \ldots, N\}$; $\psi(\tau)$ — закон распределения промежутков рефрактерности нейронов; $f_{sp}(\tau)$ — закон распределения времени задержки сигнала от p-нейрона к s-нейрону, s, $p \in I$; a_{sp} — вероятность возбуждения s-нейрона через аксон p-нейрона при условии, что p-нейрон возбужден и s-нейрон не находится в состоянии рефрактерности, s, $p \in I$; b_s — вероятность возбуждения s-нейрона внешним воздействием при условии наличия последнего и ненахождения s-нейрона в состоянии рефрактерности, $s \in I$; D_s — вероятность наличия внешнего возбуждения нейрона в момент времени t, $s \in I$.

Законы распределения промежутков рефрактерности нейрона и времени задержки сигнала аксоном являются законами распределения конечных, положительных, не равных нулю величин. Поэтому можно записать

$$\sigma_k(t) = \left\{1 - \int_T^{T_0} \sigma_k(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\right\}\left\{\sum_{p=1}^{N} a_{kp} \int_T^{T_0} \sigma_p(t-\tau)\,f_{kp}(\tau)\,d\tau + b_k D_k(t)\right\}, \quad k \in I. \tag{1}$$

Здесь T, T_0 — некоторые положительные величины. Первая фигурная скобка в формуле (1) является вероятностью ненахождения нейрона в состоянии рефрактерности. Интеграл во второй скобке — вероятность наличия сигнала от p-нейрона на k-нейроне. Разобьем интервал времени $[0, t]$ точками t_i на интервалы $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$, $[t_n, t_{n+1}]$, где $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t$, $t_i - t_{i-1} = T_0 (i = 1, \ldots, n)$. Из вида формулы (1) ясно, что значения переменных $\sigma_k(t)$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ можно оценить через значения переменных на интервале $[t_{i-2}, t_{i-1}]$ $(i = 2, \ldots, n+1)$. Матрица $A = [a_{sp}]$ как матрица вероятностей является положительной.

Приводимые ниже утверждения сформулированы для случая, когда входящие в систему (1) величины являются вероятностями.

Исследуем поведение решения системы (1) при постоянных возбуждениях, т. е. при $D_k = \mathrm{const}$, $k \in I$.

Теорема. *Решение системы* (1) *устойчиво, если*

$$\alpha = \max_s \sum_{p=1}^{N} a_{sp} < 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$x_k(t_i) = \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \sigma_k(t); \quad y_k(t_i) = \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \sigma_k(t),$$

$$k \in I.$$

Используя уравнения (1), получаем

$$\max_{t \in [t_i, t_i + T]} \sigma_k(t) \leqslant \{1 - y_k(t_i)\} \left\{ \sum_{p=1}^{N} a_{kp} x_p(t_i) + b_k D_k \right\}; \tag{2}$$

$$\min_{t \in [t_i, t_i + T]} \sigma_k(t) \geqslant \{1 - x_k(t_i)\} \left\{ \sum_{p=1}^{N} a_{kp} y_p(t_i) + b_k D_k \right\}, \quad k \in I.$$

Отсюда, обозначив $z_k(t_i) = x_k(t_i) - y_k(t_i)$, найдем

$$0 \leqslant z_k(t_{i+1}) \leqslant \sum_{p=1}^{N} a_{kp} z_p(t_i), \quad k \in I$$

и

$$z(t_i) = \max_k z_k(t_i) \leqslant z(t_{i-1}).$$

Поэтому при $i \to \infty$ с точностью до бесконечно малых

$$\sigma_k(t) = y_k(t_i) = x_k(t_i) \, (t \in [t_{i-1}, t_i], \; k \in I).$$

Из неравенств (2) при $i > M$ (M — положительное целое число) имеем

$$x_k(t_{i+1}) \leqslant \{1 - \sigma_k(t)\} \left\{ \sum_{p=1}^{N} a_{kp} \sigma_p(t) + b_k D_k \right\} + o(i);$$

$$y_k(t_{i+1}) \geqslant \{1 - \sigma_k(t)\} \left\{ \sum_{p=1}^{N} a_{kp} \sigma_p(t) + b_k D_k \right\} - o(i), \quad k \in I,$$

где $o(i)$ — малая величина, $\lim\limits_{i\to\infty} o(i) = 0$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_k(t) = \{1 - \lim_{i\to\infty} \sigma_k(t)\}\left\{\sum_{p=1}^{N} a_{kp} \lim_{i\to\infty} \sigma_p(t) + b_k D_k\right\},$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \; k \in I.$$

Так как

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_k(t) = \lim_{t\to\infty} \sigma_k(t) = v_k,$$

то

$$v_k = \{1 - v_k\}\left\{\sum_{p=1}^{N} a_{kp} v_p + b_k D_k\right\}, \; k \in I. \qquad (3)$$

Система (3) для $v_k \in [0, 1]$ имеет единственный корень*. Следовательно, асимптотическое решение системы (1) существует в заданном режиме и $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma_k(t) = v_k$, $k \in I$, где v_k — корень системы уравнений (3). Можно показать, что переходный процесс в системе (1) протекает быстрее, чем затухающий экспоненциальный с постоянной времени $T_0/\ln \alpha^{-1}$.

Следствием теоремы является понижение порядка системы (1) при исследовании асимптотических процессов в коре до числа ее специализированных участков. В самом деле, уравнения для асимтотического состояния нейронов (система 3) будут одинаковы для всех нейронов специализированного участка. Так как математическая однородность участка коры означает, что если S_k и S_p — соответственно множество номеров нейронов k и p участка коры, то

$$a_{ij} f_{ij}(\tau) = a_{kp} f_{kp}(\tau)$$

при

$$j \in S_p, \; i \in S_k.$$

Очевидно, что $S_p \cap S_k = \varnothing$ при $k \neq p$.

Представим уравнения (3) в матричном виде:

$$V = BV + CD, \qquad (4)$$

где $V = [v_k]$ — матрица-столбец;
$B = [(1 - v_k) a_{kp}]$ — квадратная матрица;
$C = [(1 - v_k) b_k]$ — диагональная матрица;
$D = [D_k]$ — матрица-столбец $(k, p \in I)$.

Будем последовательно применять формулу (4) к ней же, т. е. $V = B(BV + CD) + CD$ и т. д. После m шагов получим

$$V = \sum_{s=0}^{m-1} B^s CD + B^m V.$$

* Строгое доказательство, полученное нами, не приводится из-за его громоздкости.

Оценим величину $B^m V$ для его произвольного элемента:

$$\sum_{p_1=1}^{N} a_{kp_1}(1-v_k)\left\{\sum_{p_2=1}^{N} a_{p_1p_2}(1-v_{p_1})\{\ldots(1-v_{p_{m-1}})v_{p_m}\}\ldots\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \max_k v_k(1-\min_k v_k)^m \alpha^m.$$

Следовательно, справедлива формула

$$V=\sum_{s=0}^{\infty} B^s CD.$$

Предположив, что $L=[B_k]$ — диагональная матрица ($k\in I$), получим окончательную формулу

$$\sum_{s=0}^{\infty} A^s(1-\max_k v_k)^{s+1}LD < V < \sum_{s=0}^{\infty} A^s(1-\min_k v_k)^{s+1}LD. \quad (5)$$

Последнее равенство доказывает возможность рассмотрения системы как совокупности макроподсистем.

Степень минимального влияния k-участка коры на p-участок можно определить посредством коэффициента

$$\varphi=(1-\max_k v_k)\,a_{kp}+\sum_{s=1}^{N}(1-\max_k v_k)^2 a_{ks}a_{sp}. \quad (6)$$

ВЫВОДЫ

1. При моделировании коры мозга описанным методом можно без больших погрешностей пренебречь переходными процессами в модели коры, если скорость изменения внешнего воздействия на кору меньше, чем $\ln\alpha^{-1}/3T_0$, где T_0 — максимальное время задержки сигнала аксонами нейронов коры. В этом режиме нейроны, принадлежащие специализированным участкам коры, можно объединить в группы и рассматривать связи не между нейронами, а между участками коры. При этом вид уравнений не изменяется. Полученные формулы позволяют судить о характере изменения процессов в коре при нарушении части связей между участками коры. Пусть на кору производится некоторое постоянное воздействие. Тогда приблизительный вид распространения возбуждения в коре можно получить по формуле (5). Предположим, что механически нарушена непосредственная связь k и p участков, т. е. a_{kp} становится равным нулю. Однако очевидно, что связь между k и p участками сохраняется, так как минимальный коэффициент связи (формула (6)) все же не равен нулю. Таким образом, хирургическое нарушение непосредственных связей между специализированными участками коры не приводит к полной утрате возможности передачи возбуждения между ними.

2. Описанная математическая модель дает возможность при известных связях между участками коры найти конфигурацию внешнего воздействия, вызывающего заданное возбуждение коры.

3. Созданная математическая модель не противоречит экспериментальным фактам и в достаточной степени отражает процессы, протекающие в реальной коре.