

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування нерівномірної сітки та спрощеного методу Ньютона при
комп'ютерному моделюванні нестационарних режимів по ділянці трубопроводу
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи САУМ-19-1
Ревегук Р.В.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Гусарова І.Г.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Тевяшев А.Д.
(прізвище, ініціали)

2020 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Ревегуку Роману Володимировичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування нерівномірної сітки та спрощеного методу Ньютона при комп'ютерному моделюванні нестационарних режимів по ділянці трубопроводу

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1420 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель нестационарного режиму транспорту газу по ділянці трубопроводу.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу та постановка задачі дослідження

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Гусарова І.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 118 с., 25 табл., 59 рис., 2 дод., 18 джерел.

НЕСТАЦІОНАРНИЙ НЕІЗОТЕРМІЧНИЙ РЕЖИМ ТЕЧІЇ ГАЗУ, НЕРІВНОМІРНА СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВА СІТКА, СПРОЩЕНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, МЕТОД НЬЮТОНА.

Об'єкт дослідження – нестационарний неізотермічний режим течії газу (ННРТГ) по ділянці трубопроводу (ДТ).

Мета роботи – проведення системного аналізу проблеми моделювання та аналізу ННРТГ; вибір методів та розробка алгоритмів розв'язання системи рівнянь математичної моделі (ММ) методом скінченних різниць (МСР) з використанням спрощеного методу Ньютона (СМН) та методу Ньютона (МН); розробка на їх основі алгоритмів моделювання ННРТГ по ДТ; створення програмного продукту (ПП), який розраховує параметри газового потоку при ННРТГ з використанням цих алгоритмів; порівняльний аналіз отриманих результатів.

Метод дослідження – методи чисельного інтегрування гіперболічної системи рівнянь у частинних похідних та методи розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього проведено системний аналіз розглянутої проблеми. ММ ННРТГ, яка представляє з себе квазілінійну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних з заданими початковими і граничними умовами. Побудований алгоритм для розв'язання крайової задачі з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки та МН й СМН для розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Побудовані алгоритми СМН та МН. Також створений ПП для комп'ютерного моделювання параметрів газового потоку при ННРТГ. Проведений аналіз ефективності СМН та МН.

Результати дослідження будуть корисні в газовій промисловості при управлінні газовим потоком, зокрема, в аварійних ситуаціях.

ABSTRACT

Introductory note: 118 pages, 25 tables, 59 figures, 2 appendixes, 18 sources.

UNSTEADY UNISOTHERMAL GAS TRANSPORT MODES, NON-UNIFORM FINITE-DIFFERENCE GRID, SIMPLIFIED NEWTON'S METHOD, MATHEMATICAL MODEL, NEWTON'S METHOD.

Object of research – unsteady unisothermal gas flow mode (UUGFM) through pipeline section (PS).

Aim of work – conducting a systematic analysis of the problem of modeling and analysis of NNRTG; selection of methods and development of algorithms for solving the system of equations of the mathematical model (MM) by the finite difference method (MSD) using the simplified Newton method and the Newton method; development on their basis of algorithms of modeling of NNRTG on DT; creation of a software product (PP) that calculates the parameters of the gas flow during NNRTG using these algorithms; comparative analysis of the obtained results.

Research methods – methods of numerical integration of the hyperbolic system of equations in partial derivatives and methods of solving systems of nonlinear algebraic equations. To do this, a systematic analysis of the problem. MM NNRTG, which is a quasilinear system of differential equations in partial derivatives with given initial and boundary conditions. An algorithm for solving a boundary value problem using a non-uniform finite-difference grid and Newton's methods and a simplified Newton's solution for solving systems of nonlinear algebraic equations is constructed. Algorithms of the simplified Newton's method and Newton's method are constructed. A software for computer modeling of gas flow parameters at NNRTG has also been created. The analysis of the efficiency of the simplified Newton's method and Newton's method is carried out.

The results of the study will be useful in the gas industry in the management of gas flow, in particular in emergencies.

ЗМІСТ

	С.
Перелік умовних позначень, скорочень і термінів	8
Вступ	9
1 Системний аналіз проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу та постановка задач дослідження	11
1.1 Вербальна модель системи	11
1.2 Функціональна модель системи	13
1.3 Інформаційна модель системи	16
1.4 Кваліметрична модель системи	19
1.5 Змістовна постановка задачі	23
2 Формальна постановка задачі	26
2.1 Математична модель нестационарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу	27
3 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	32
3.1 Метод і алгоритм розв'язання системи рівнянь математичної моделі ННРТГ по ДТ з використанням НСРС	32
3.2 Метод і алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь з використанням спрощеного метода Ньютона	40
3.3 Метод і алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь з використанням метода Ньютона	50
4 Програмна реалізація та аналіз результатів дослідження	53
4.1 Wolfram Mathematica як обчислювальна система.....	53
4.2 Опис програмного продукту	54
4.3 Результати обчислювального експерименту	54
Висновки	84
Перелік джерел посилання	85

Додаток А Код програми розрахунку ННРТГ по ДТ з використанням спрощеного методу Ньютона	87
Додаток Б Код програми розрахунку ННРТГ по ДТ з використанням звичайного методу Ньютона	109

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

СРТГ – стаціонарний режим течії газу.

ННРТГ – нестационарний неізотермічний режим течії газу.

НСРС – нерівномірна скінченно-різницева сітка.

ГТС – газотранспортна система.

ДТ – ділянка трубопроводу.

ЛД – лінійна ділянка.

ММ – математична модель.

РТГ – режими течії газу.

СР – система рівнянь.

СА – системний аналіз.

ПП – програмний продукт.

КС – компресорна станція.

ВСТУП

Газова промисловість є однією з найважливіших галузей технічної бази економіки України. Вона має істотне значення у створенні матеріальної бази для всієї країни. Це пов'язано з тим, що природний газ як високоефективний енергоносіє, широко застосовуваний в даний час у всіх ланках суспільного виробництва, робить прямий вплив на збільшення випуску промислової продукції, суттєвий зріст продуктивності праці і зниження витрат палива.

Більша частина газотранспортної системи (ГТС) України проектувалась і будувалась у 70–80 рр. минулого століття як частина Єдиної системи газопостачання колишнього СРСР, що обумовлює проблеми її функціонування і розвитку. Найважливішою проблемою є невідповідність проектної структури ГТС сучасному завантаженню її газопроводів, що призводить до зниження ефективності транспортування газу. На сьогодні ГТС працює надійно, але вимагає проведення модернізації.

На жаль, в Україні недостатньо газових ресурсів для забезпечення потреб власної економіки, однак у нашої країни є інший плюс. Україна – транзитна держава.

На сьогоднішній день Україна залишається транспортером газу в Європу, крім того сама видобуває і споживає велику кількість газу, тому питання надання якісних транспортних послуг актуальне. Так у 2017 році майже 3000 мільярдів м³ газу поступало на територію України з Росії. На об'єми поставок газу через ГТС України також впливають будівництво нових газопроводів, у тому числі для транспортування газу між країнами Європи у напрямку південь-північ і захід-схід, та розвиток світового ринку скрапленого природного газу. Зростання об'єму експорту скрапленого газу до Європи сприяє будівництво нових терміналів з приймання природного газу, загальна потужність яких зростає з кожним роком.

Однією з важливих задач, що виникають при експлуатації лінійних ділянок, є ефективне управління режимами транспорту газу, особливо в

аварійних ситуаціях. Актуальність проблеми визначається необхідністю розробки нових чисельних методів, які можуть допомогти змодельовати нестационарні процеси протікання газу з заданою точністю та швидкістю.

Рішення паливно-енергетичних проблем неможливо без вирішення основних проблем транспортного комплексу, тому актуальність газотранспортної проблеми в нашій країні не викликає сумніву.

З першого погляду ми не можемо сказати як вирішити ці проблеми, але можна змодельовати та проаналізувати результати експерименту та порівняти ефективність того чи іншого методу розв'язання конкретної задачі.

Метою атестаційної роботи є: проведення системного аналізу проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу; вибір методу розв'язання рівнянь математичної моделі; розробка алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних методом скінченних різниць з використанням спрощеного методу Ньютона та методу Ньютона; створення програмного продукту, який розраховує параметри газового потоку при ННРТГ по ДТ з використанням спрощеного методу Ньютона та звичайного Ньютона; порівняння ефективності методів в умовах даної задачі; аналіз отриманих результатів.

Результати дослідження будуть корисні для проведення модернізації української ГТС. Розроблені алгоритми більш ефективні та можуть вплинути на систему управління газовим потоком, що може привести до зменшення втрат газу і зменшення вартості послуг з транспортування.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНОГО РЕЖИМУ ТЕЧІЇ ГАЗУ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Вербальна модель системи

В якості системи, що досліджується, розглядатимемо складну систему «Моделювання та аналіз нестационарного режиму течії газу з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки».

Ціль створення системи: створення математичної моделі нестационарного режиму течії газу, а також розв'язання задачі за допомогою методу скінченних різниць, та використання спрощеного методу Ньютона та звичайного методу Ньютона для вирішення системи нелінійних рівнянь, яка з'являється в процесі розв'язання.

Основне призначення системи є прогнозування зміни поведінки газу та трубопроводу під час аварії.

Дана система складається з двох підсистем:

а) пристрій керування:

- 1) прикладне програмне забезпечення;
- 2) дослідник;

б) теоретична та обчислювальна база:

- 1) алгоритм методу скінченних різниць;
- 2) алгоритм спрощеного методу Ньютона;
- 3) алгоритм звичайного методу Ньютона;
- 3) математичний пристрій.

В даному випадку система «Моделювання та аналіз нестационарного режиму течії газу з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки» відноситься до цілеспрямованих систем, для яких призначення визначається їх можливістю (властивістю) сприймати потреби та виконувати певні дії для їх задоволення. Отже, призначенням системи є надання математичної моделі та її

аналіз. Для реалізації цілі системи використовуються різноманітні ресурси. До них відносяться: інформаційні, технологічні, енергетичні, часові.

Головний вихід системи – аналіз результатів. На вхід системи подаються дані про стаціонарний режим газу та граничні умови. За допомогою мов програмування та математичних пакетів і безпосередньо за участі дослідника, керуючись інформаційною базою, здійснюється реалізація процесу моделювання. В результаті ми побудували модель системи, яка отримала назву «чорного ящика». Ця назва образно підкреслює повну відсутність відомостей про внутрішній зміст системи. У моделі задаються тільки вхідні і вихідні зв'язки системи з середовищем, тобто безліч X і Y вхідних і вихідних змінних. Така модель, незважаючи на зовнішню простоту і на відсутність відомостей про внутрішню будову системи, часто виявляється дуже корисною. Модель системи типу «чорний ящик» наведена на рисунку 1.1.

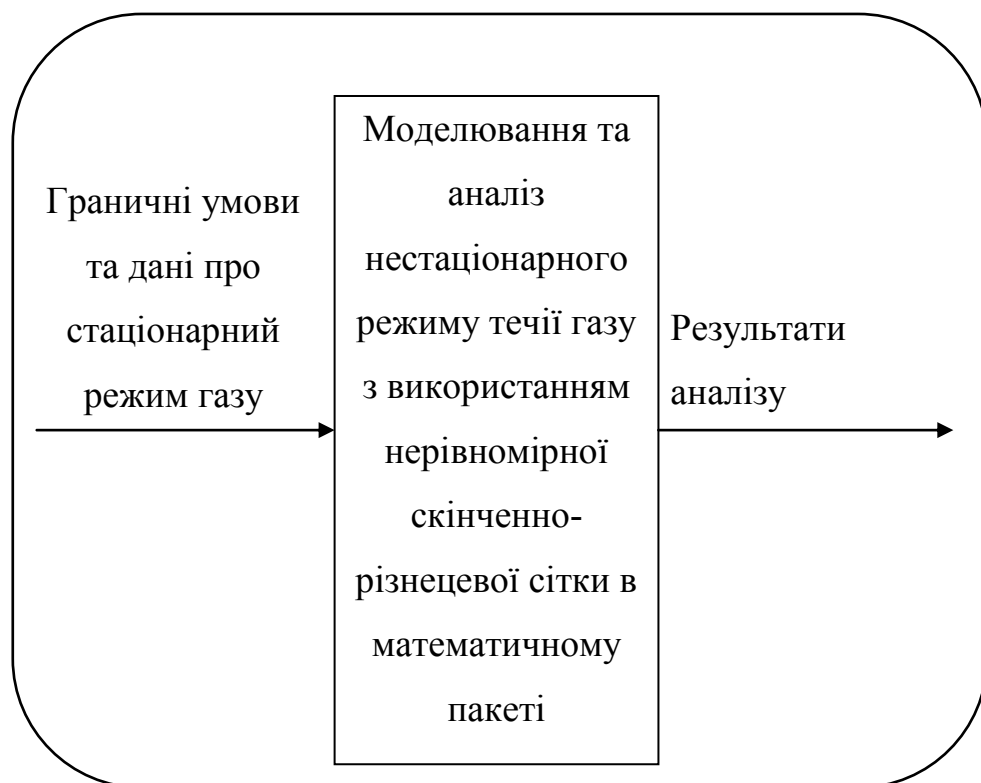


Рисунок 1.1 – Чорний ящик як модель системи

1.2 Функціональна модель системи

Реалізований в рамках методології IDEF0 процес подається у вигляді набору елементарних робіт, що взаємодіють між собою, а також показують ресурси, що надходять до кожної роботи [1]. На вхід системи подаються дані про стаціонарний режим газу та граничні умови; керуючими засобами є метод скінченних різниць, математичний апарат та методи вирішення системи нелінійних рівнянь; до механізмів відносяться прикладне програмне забезпечення та дослідник; а на виході ми отримуємо результати аналізу моделі.

Для нових систем застосування IDEF0 має за ціль визначення вимог та функцій для подальшої розробки системи, що відповідає вимогам та реалізує виділені функції. Стосовно існуючих систем IDEF0 може бути застосована для аналізу функцій, які виконує система, та відображення механізмів, за допомогою яких ці функції виконуються. Перша діаграма в ієрархії діаграм IDEF0 завжди відображає функціонування системи в цілому (рисунок 1.2). Такі діаграми називають контекстними. Після того як контекст описано, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії.

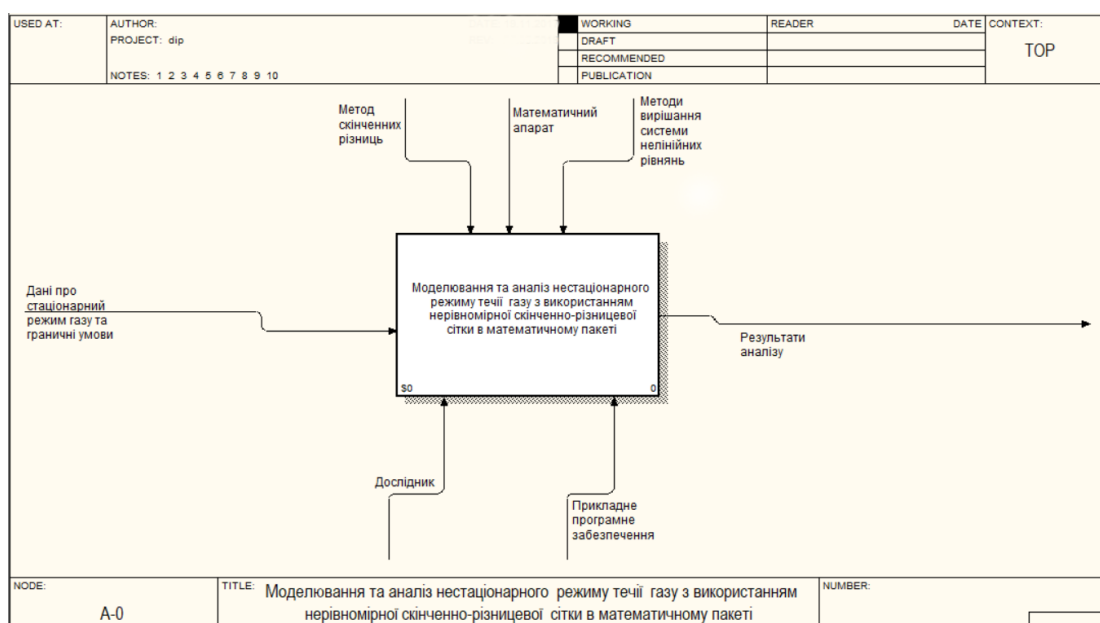


Рисунок 1.2 – Контекстна діаграма системи

Кожна наступна діаграма є більш детальним описом (декомпозицією) однієї з робіт на вищій діаграмі. Результат декомпозиції контекстної діаграми системи наведено на рисунках 1.3 – 1.4.

З рисунку 1.3 можна робити висновки щодо внутрішньої будови системи, що розглядається. Основну проблему можна розбити на дві великих задачі: отримання моделі та аналіз отриманих результатів.

Розглянемо декомпозицію підсистеми A1 «Моделювання нестационарного режиму течії газу з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки».

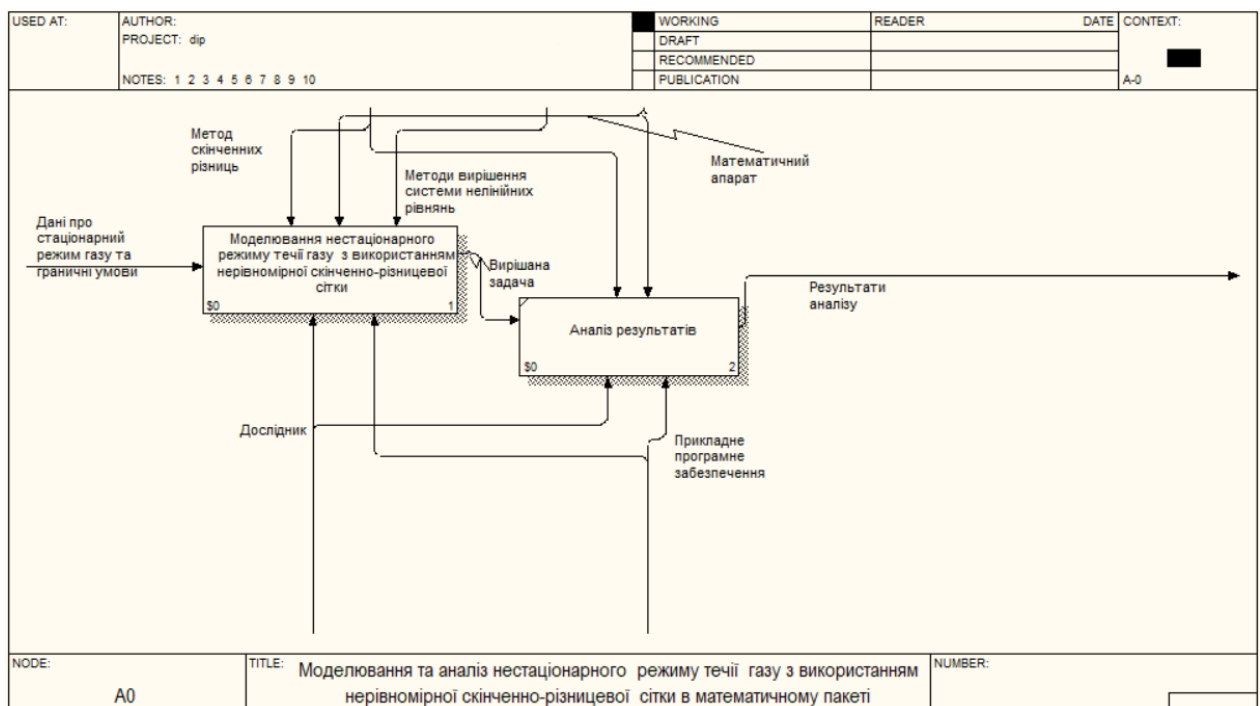


Рисунок 1.3 – Діаграма декомпозиції. Рівень A0

Декомпозиції рівня A0, що зображено на рисунку 1.4. На даному етапі дослідження будується модель складного фізичного процесу, а також отримується рішення, на основі якого буде можливо в подальшому зробити висновки та провести аналіз. При розгляданні блоку A14 «Вирішення задачі за допомогою методу скінченних різниць в математичному пакеті» також використовується декомпозиція, що зображена на рисунку 1.5. Ця декомпозиція пояснює, як буде розроблятися програмний продукт на ЕОМ.

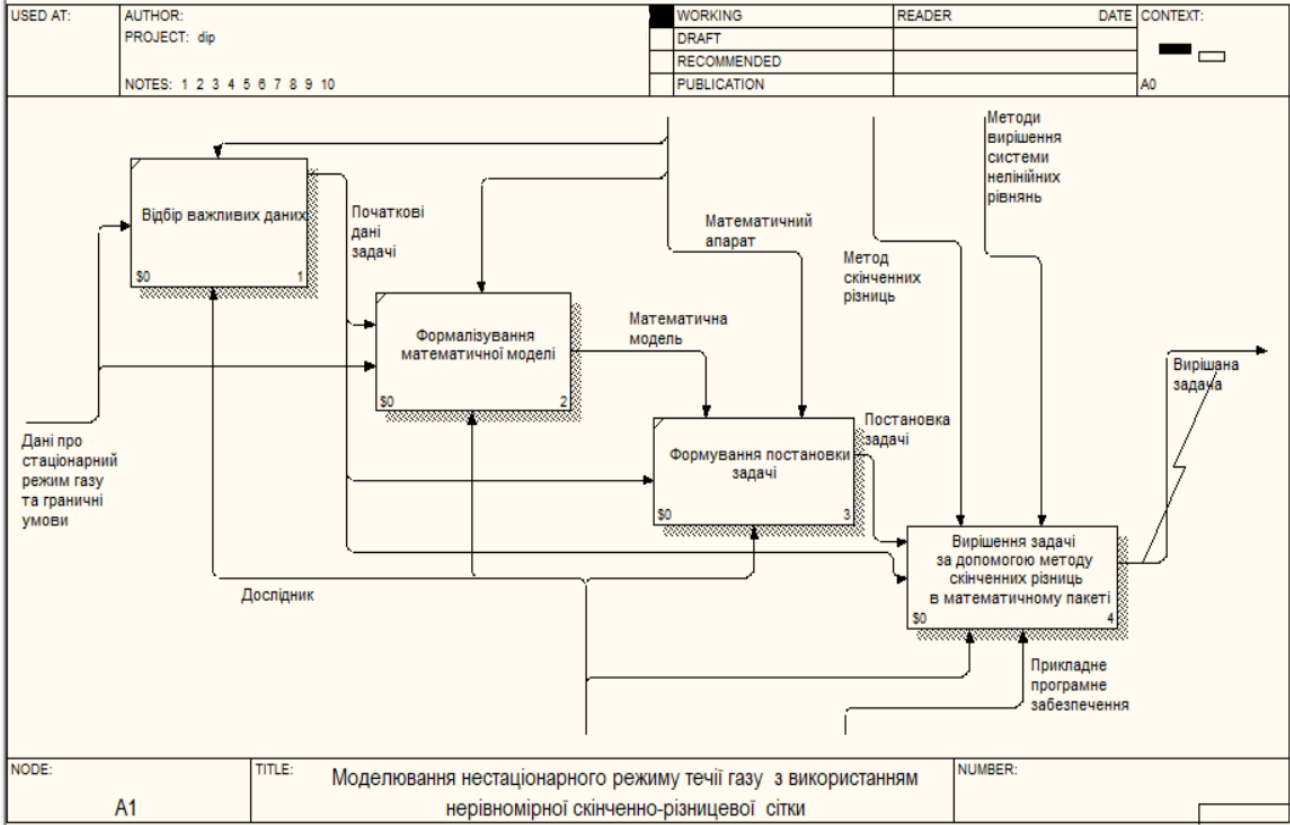


Рисунок 1.4 – Діаграма декомпозиції. Рівень A1

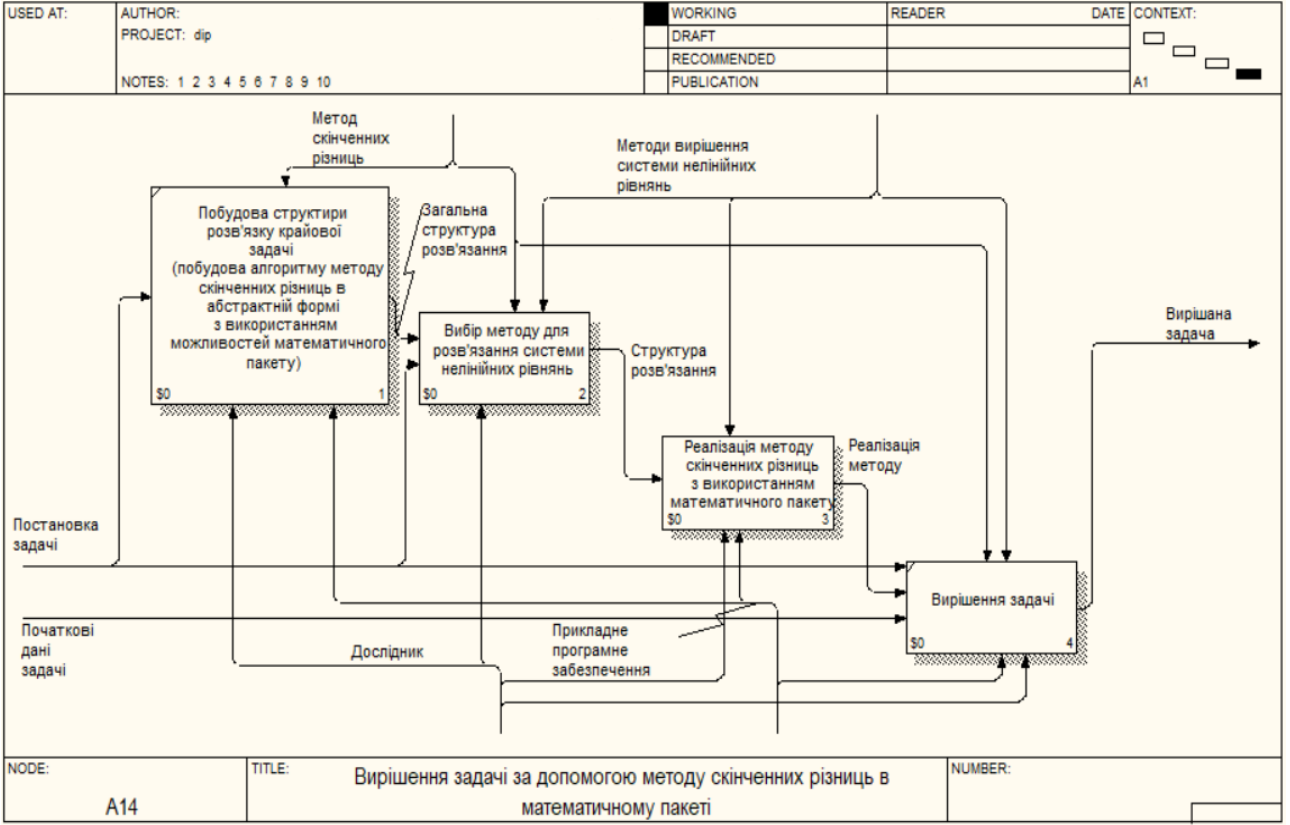


Рисунок 1.5 – Діаграма декомпозиції. Рівень A14

1.3 Інформаційна модель системи

Інформаційна модель системи відображає зв'язки між елементами всієї системи у вигляді цілих структур даних, акцентуючи інтерес та увагу дослідника на склад та взаємозв'язках потоків даних.

Для обробки інформації використовуються діаграми потоків даних тобто (Data Flow Diagramming, DFD). На сьогоднішній день DFD є один з основних інструментів структурного аналізу і проектування інформаційних систем, що існували до широкого поширення UML. Подібно до IDEF0, DFD є модельною системою з точки зору зберігання, обробки і передачі даних. Вони зображують досліджувану систему у вигляді мережі пов'язаних між собою робіт. Їх можна використовувати як додаток до моделі IDEF0 для більш наочного відображення поточних операцій [3, 4].

Чотири основні елементи, які використовує DFD:

- внутрішнє сховище даних (внутрішнє сховище даних являє собою власне дані, до яких здійснюється доступ, ці дані також можуть бути створені або змінені роботами). В цілому це і є бази даних, таблиці або будь-який інший варіант організації та зберігання даних. Тут будуть зберігатися дані про клієнтів, заявки клієнтів, видаткові накладні та будь-які інші дані, які надійшли в систему або є результатом обробки процесів. На одній діаграмі може бути присутнім кілька копій одного і того ж сховища даних);

- роботи (роботи в DFD позначають функції або процеси, які обробляють і змінюють інформацію). Роботи представлені на діаграмах у вигляді прямокутників з округленими кутами. Тут немає суворої системи вимог, як, наприклад, в IDEF0 або BPMN, де нотації мають жорстко визначений синтаксис, так як вони можуть бути виконуваними. Але все ж певних правил варто дотримуватися, щоб не вносити плутанину при читанні DFD іншими людьми;

- зовнішні посилання (зовнішні посилання вказують на місце, організацію або людину, які беруть участь в процесі обміну інформацією з

системою, але розташовуються за рамками цієї діаграми);

– стрілки (стрілки йдуть від об'єкта-джерела до об'єкта-приймача, позначаючи інформаційні потоки в системі документообігу). Стрілки не можуть пов'язувати безпосередньо сховища даних, всі зв'язки йдуть через процеси. Немає сенсу просто переміщати дані з одного місця в інше, а саме так читається прямий зв'язок двох сховищ стрілкою.

Розглянемо декомпозицію системи «Моделювання та аналіз нестационарного режиму течії газу з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки в математичному пакеті» із застосуванням методології DFD.

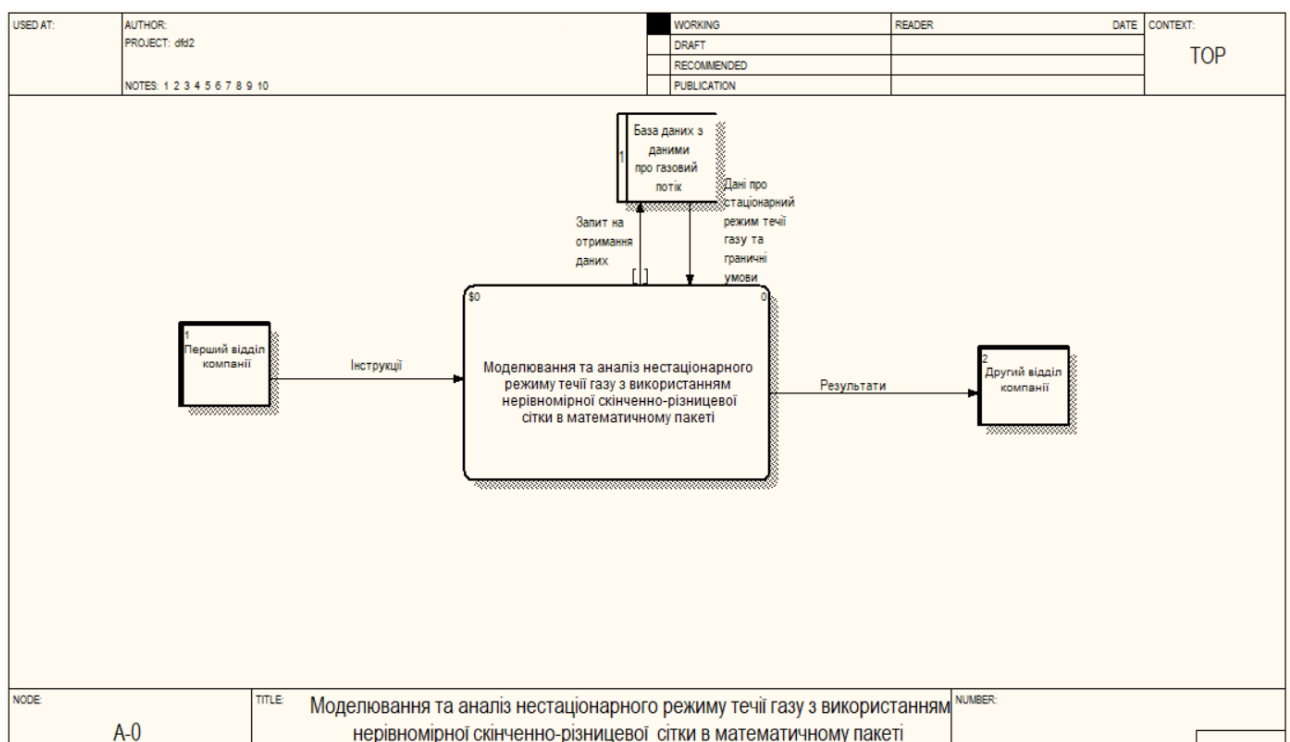


Рисунок 1.6 – Контекстна діаграма системи у методології DFD

Як бачимо на діаграмах потоків даних всі використовувані символи складаються в загальну картину. При цьому можна наочно побачити, де зберігаються дані, яким чином проводиться обмін документацією, де в цьому процесі допущені помилки організації бізнес процесів, які є досить важливими для діяльності компанії. Саме DFD нотація допомагає виявити, наприклад, відсутність в системі автоматизації важливих документів, які насправді

створюються (на папері), але в системі ніяк не відображаються. А потім вже будується оптимізований бізнес-процес з урахуванням виявлених нюансів документообігу.

На рисунку 1.7 зображена контекстна діаграма системи, на рис. 1.8 – 1.9 декомпозиція системи рівня A0 і A3 відповідно.

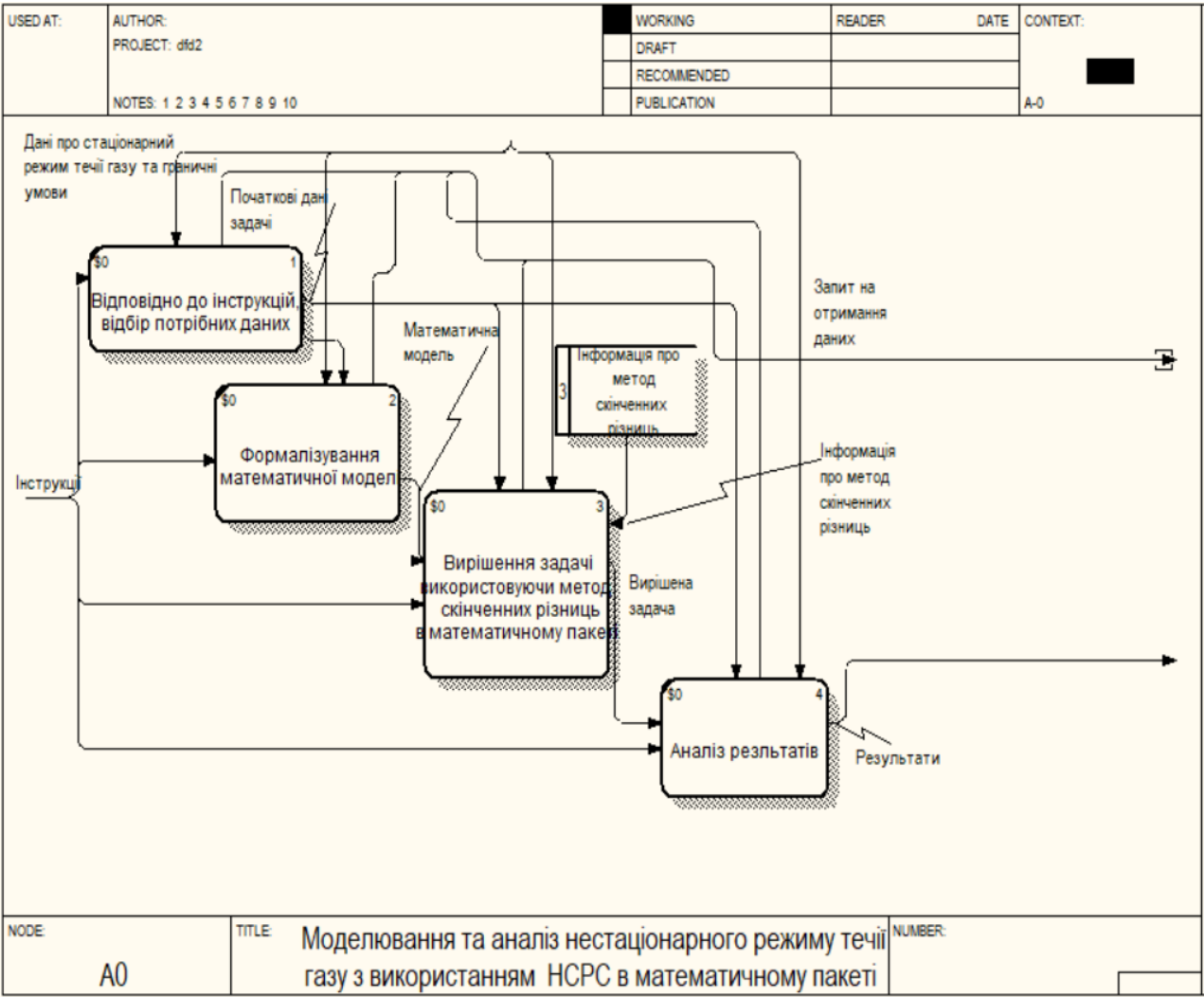


Рисунок 1.7 – Діаграма декомпозиції A0 у методології DFD

На рівні A0 показано, як інструкції з першого відділу компанії створюють напрямок дослідження, на рівні A3 показано створення алгоритму для вирішення задачі та створення програмного продукту, який вирішує задачу.

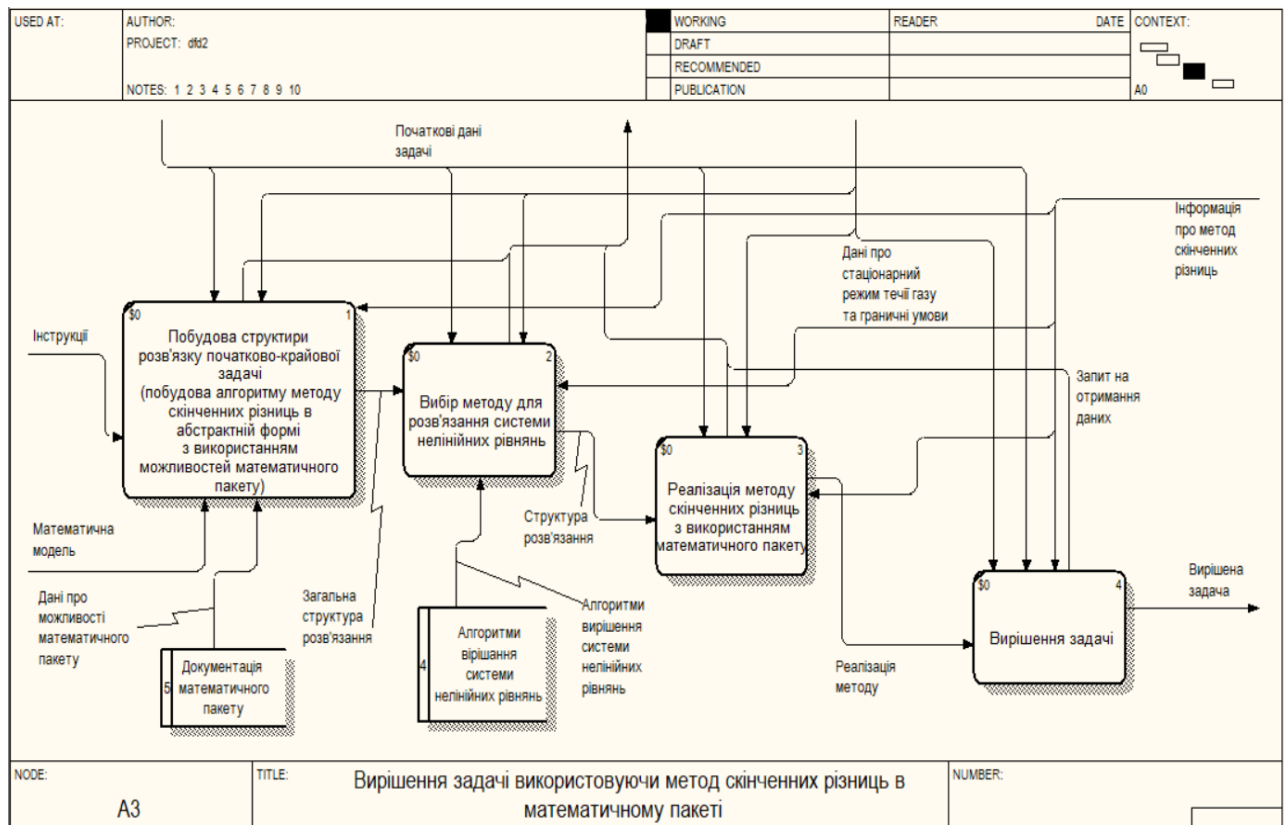


Рисунок 1.8 – Діаграма декомпозиції A3 у методології DFD

1.4 Кваліметрична модель системи

Відомо, що для вирішення квазілінійної системи диференціальних рівнянь можна скористатися методом скінченних різниць. В процесі розв'язання цієї системи з'являється необхідність в вирішенні системи нелінійних рівнянь. Порівняємо деякі методи вирішення цієї системи, а саме метод Ньютона, метод Бroyдена та спрощений метод Ньютона, і виберемо один з них [5].

Для вибору методу скористались методом аналізу ієрархій [6]. Розробили ієрархічну модель властивостей якості системи.

Об'єкти:

- метод Ньютона (A1);
- метод Бroyдена (A2);
- спрощений метод Ньютона (A3).

Властивості:

- складність операцій (K1);
- ресурси ЕОМ (K2);
- час обчислення (K3);
- швидкість збіжності (K4).

Ієрархічна модель проблеми вибору у випадку багатокритеріальності має вигляд, зображений на рисунку 1.9.

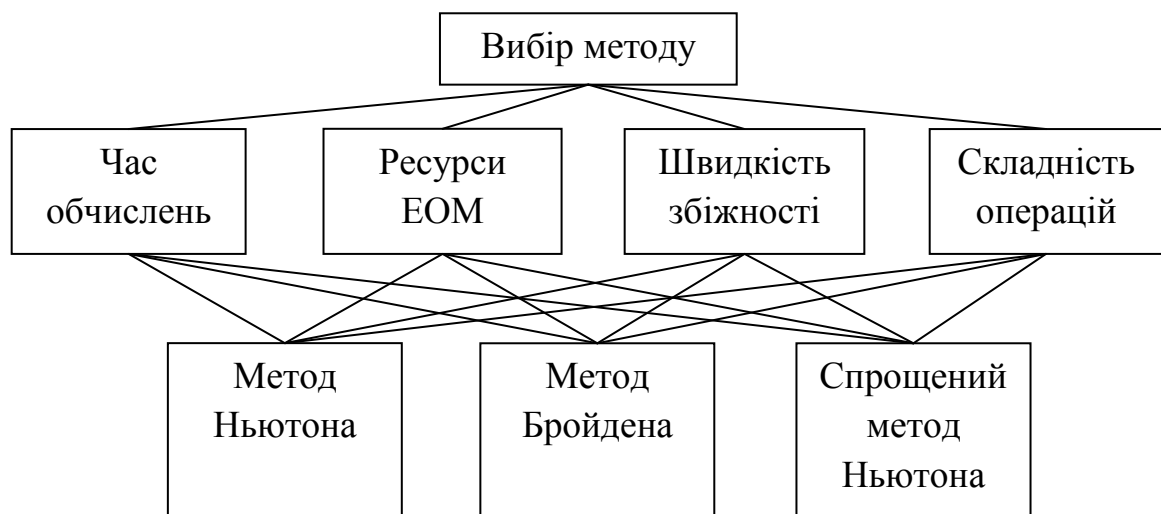


Рисунок 1.9 – Ієрархічна модель аналізу проблеми

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	K1	K2	K3	K4	Оцінка компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
K1	1	8	5	3	3,310	0,590	1,658
K2	1/8	1	1/4	1/2	0,354	0,063	15,000
K3	1/5	4	1	1/4	0,669	0,119	10,250
K4	1/3	2	4	1	1,278	0,228	4,750
Всього					5,610		4,228

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,228 - 4}{4 - 1} = 0,076.$$

Випадкова узгодженість 0,9.

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,076}{0,9} = 0,084 = 8,4\%.$$

Для прийняття рішення щодо методу вирішення системи, необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив [6]. Оцінивши їх відносно кожної з альтернатив, отримаємо данні, що представлені у таблицях 1.2 – 1.5. Випадкова узгодженість для матриць є рівною 0,58.

Таблиця 1.2 – Порівняння альтернатив за першим критерієм

Критерій 1	A 1	A 2	A 3	Вектор пріоритетів
A 1	1	1/5	1/7	0,075
A 2	5	1	1/2	0,333
A 3	7	2	1	0,592

$$\text{ІУ} = 0,007;$$

$$\text{ВУ} = 0,0122 = 1,22\%.$$

Таблиця 1.3 – Порівняння альтернатив за другим критерієм

Критерій 2	A 1	A 2	A 3	Вектор пріоритетів
A 1	1	1/7	1/6	0,067
A 2	7	1	3	0,641
A 3	6	1/3	1	0,292

$$\text{ІУ} = 0,050;$$

$$\text{ВУ} = 0,0861 = 8,61\%.$$

Таблиця 1.4 – Порівняння альтернатив за третім критерієм

Критерій 3	A1	A2	A3	Вектор пріоритетів
A1	1	1/3	1/5	0,105
A2	3	1,0	1/3	0,258
A3	5	3	1,0	0,637

$IY = 0,019;$

$BY = 0,034 = 3,4\%.$

Таблиця 1.5 – Порівняння альтернатив за четвертим критерієм

Критерій 4	A 1	A 2	A 3	Вектор пріоритетів
A 1	1	1/5	1/8	0,062
A 2	5	1	1/5	0,212
A 3	8	5	1	0,726

$IY = 0,073;$

$BY = 0,126 = 12,60\%.$

Таблиця 1.6 – Результати підрахунків

Критерій /Альтернатива	К 1	К 2	К 3	К4	Узагальнені пріоритети
A 1	0,075	0,067	0,105	0,062	0,075
A 2	0,333	0,641	0,258	0,212	0,316
A 3	0,592	0,292	0,637	0,726	0,609

У таблиці 1.6 наведено результати, що дають нам змогу сказати, що найкращою для нас буде третя альтернатива, а саме спрощений метод Ньютона. Відносна узгодженість буде дорівнювати 6,9%.

1.5 Змістовна постановка задачі

Об'єкт дослідження – ННРТГ по ділянці трубопроводу.

Предмет дослідження – чисельні методи для розрахунку ННРТГ по ДТ.

Метою атестаційної роботи є порівняння ефективності спрощеного методу Ньютона та методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь, яка з'являється в процесі розв'язання системи диференціальних рівнянь, що описує нестационарний неізотермічний режим течії газу.

Складна структура ГТС призводить до того, що проблем з моделюванням режимів транспорту газу по системам газопостачання присвячується значна кількість досліджень. Різні зміни граничних умов, які можуть бути викликані, наприклад, аварійними ситуаціями на лінійних ділянках, призводять до того, що РТГ по ГТС стають нестационарними і неізотермічними, тому необхідно розробляти програми з всебічним аналізом ННРТГ при різкій зміні граничних умов в ГТС, що дозволяють моделювати режими транспорту газу, в тому числі по ЛД ГТС.

Перш за все був проведений аналіз чисельних методів розв'язання систем гіперболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних, які описують ННРТГ. Для чисельного розв'язання таких систем часто використовуються такі методи як метод скінченних різниць з використанням різних рівномірних і нерівномірних скінченно-різницевих сіток, метод характеристик (Массо, модифікований Массо), метод кінцевого об'єму, метод скінченних різниць з використанням методу Лагранжевих частинок (є модифікацією підходу до вирішення гіперболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних методом характеристик), інтегро-інтерполяційний метод та ін. Кожен з цих методів має як переваги, так і недоліки, в роботі обраний метод скінченних різниць з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки.

В силу великої складності систем ГТС побудова ММ, вибір методу і алгоритму розв'язання систем рівнянь ММ є суттєвою частиною задачі моделювання та аналізу СНРТГ і ННРТГ по системі ГТС.

Щоразу ГТС виконує транспорт і подачу газу з задовільними показниками в умовах постійної зміни навантаження, стану навколишнього середовища, внутрішнього стану об'єктів газопроводу, а також в аварійних ситуаціях. Всі ці зміни викликають необхідність в моделюванні та управлінні ННРТГ з метою адаптації ГТС до постійно змінюваних умов. При розробці автоматизованих процесів необхідно враховувати ці специфічні властивості.

Нестаціонарність режимів транспорту газу по лінійній ділянці визначається за такою формулою

$$M = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{i,j} |P_{H_i} - P_{H_j}|, \\ \max_{i,j} |P_{K_i} - P_{K_j}|, \end{array} \right.$$

де P_{H_i} ($i = 0, 1, 2, \dots$) – вимірний тиск на початку ЛД в момент часу t_i , за період $[0, T]$;

P_{K_j} ($j = 0, 1, 2, \dots$) – вимірний тиск в кінці ЛД за той же період часу.

Коли $M > \varepsilon$, вважається, що режим є нестаціонарним, якщо $M \leq \varepsilon$, то режим квазістаціонарний в інтервалі часу $[0, T]$. Обов'язково враховувати два кінця ЛД, зазвичай, ε приймається рівною одній атмосфері.

Для того, щоб розробити якісну систему аналізу і моделювання режимів транспорту газу по ГТС необхідно перш за все враховувати такі властивості як розподілений характер параметрів РТГ. Інерційність перехідних процесів являється найбільш суттєвою характеристикою, яка відрізняє перехідні процеси в цих системах. Вона ставить специфічні завдання перед системами моделювання та управління такими режимами.

В атестаційній роботі розглядається ділянка трубопроводу заданої довжини фіксованого діаметру з жорсткими стінками. Задано початковий розподіл газу. На границях ділянки відбувається різка зміна граничних умов, тому режими течії газу стають нестаціонарними і неізотермічними. Вважаємо,

що на границях ділянки задані або тиск, або витрата газу як функції часу, більш того задана температура газу, що надходить на ділянку.

Поставлена мета атестаційної роботи зумовлює наступні етапи дослідження:

- застосування методу скінчених різниць для розв’язання рівнянь ММ нестационарного неізотермічного режиму течії газу з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки та спрощеного методу Ньютона при розв’язанні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь;

- розробка алгоритму комп’ютерного моделювання ННРТГ по ДТ на основі розглянутих методів;

- створення програмного продукту, який розраховує параметри газового потоку при ННРТГ по ДТ з використанням спрощеного методу Ньютона та методу Ньютона;

- порівняння ефективності двох методів.

Результатом буде порівняння використання спрощеного методу Ньютона та Ньютона для даної задачі, і висновок, який з цих методів краще використовувати.

2 ФОРМАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Газотранспортна система, з точки зору опису режимів транспорту газу, складається з: лінійних ділянок (ЛД) та компресорних станцій (КС).

В роботі досліджується ДТ довжини L (рис. 2.1).

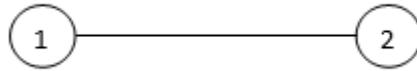


Рисунок 2.1 – Ділянка трубопроводу

На цьому рисунку відрізок схематично показує ділянку трубопроводу, де кружечки 1, 2 це вхід та вихід цієї ДТ.

Вважатимемо, що режими течії газу по ДТ є нестационарними та неізотермічними, тому що на вході та/або виході відбувається різка зміна граничних умов.

Описувати дані режими можна за допомогою функцій $T(x,t)$; $P(x,t)$; $W(x,t)$: температури, тиску та питомої масової витрати відповідно, заданих в області $\Lambda = \{(x,t), x \in [0,L], t \in [0, T_{\max}]\}$.

В наданих вузлах 1,2 задано температуру газу, що надходить, та задані граничні умови 1-го або 2-го типу, тобто задано чи тиск, чи витрата газу, як функції часу. Задано також початковий розподіл параметрів газового потоку:

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_0(x), \\ P(x,0) &= P_0(x), \\ W(x,0) &= W_0(x), x \in (0,L), \end{aligned}$$

де $T_0(x), P_0(x), W_0(x)$ – задані функції.

Тоді граничні умови матимуть вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0,t) = T^0(t), \\ P(0,t) = P^0(t), \\ G(0,t) = G^0(t), \end{array} \right. , \quad \left[\begin{array}{l} P(L,t) = P^1(t), \\ G(L,t) = G^1(t), \end{array} \right.$$

де $T^0(t)$, $P^0(t)$, $G^0(t)$, $P^1(t)$, $G^1(t)$ – задані функції, а $G(x,t)$ – масова витрата.

Для подальшого розрахунку нестационарних неізотермічних режимів транспорту газу по ділянці трубопроводу необхідно задати початковий розподіл параметрів газового потоку: температур, тисків та витрат, тому в якості такого розподілу доцільно взяти розподіл, отриманий за умови стаціонарності режиму течії газу.

2.1 Математична модель нестационарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу

Для загального випадку нестационарний неізотермічний режим течії газу по ділянці трубопроводу, який представляє собою циліндричну трубу постійного діаметра. Режим описується квазілінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних. Сама система отримана із загальних рівнянь Нав'є-Стокса газової динаміки для одновимірного випадку, з урахуванням відсутності масообміну з навколишнім середовищем, стаціонарності режимів теплообміну з навколишнім середовищем та нехтування теплофізичними властивостями середовища:

$$\frac{\partial(V\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho(\beta+1)V^2 + P] = -\rho \left[g \frac{dh}{dx} + \frac{\lambda|V|V}{2D} \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V\rho) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E\rho) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{P}{\rho} + E\right)\rho V\right) = -\rho Vg \frac{dh}{dx} + \frac{4K}{D}(-T + T_{ep}), \quad (2.16)$$

де $T(x,t)$, $P(x,t)$, $V(x,t)$, $\rho(x,t)$ – температура, тиск, швидкість, щільність;

D – діаметр труби;

K – коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту;

λ – коефіцієнт гідравлічного опору;

t, x – часова і просторова координата;

T_{ep} – температура ґрунту;

β – поправка Коріоліса на нерівномірний розподіл швидкостей в перетині;

h – глибина залягання труби;

E – повна енергія одиниці маси;

g – прискорення вільного падіння.

Не порушуючи ніякої логіки та загальності, введемо деякі припущення для нестационарних неізотермічних режимів транспорту газу:

а) так як похідні від температури дуже малі то в рівняннях (2.14) і (2.15) можна знехтувати зміною температури;

б) поправкою Коріоліса можна знехтувати так як в перетині швидкість потоку газу розподілена рівномірно.

В даному випадку доповнимо систему (2.14) – (2.16) рівнянням стану

$$\frac{P}{\rho} = gzTR. \quad (2.17)$$

Після відповідних змін, система прийме вигляд:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(-\alpha S \frac{W^2}{P^2} T + 1\right) \frac{\partial P}{\partial x} + 2\alpha TS \frac{W}{P} \frac{\partial W}{\partial x} + \beta TS \frac{W|W|}{P} + \frac{P}{T} \frac{g}{\alpha S} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha ST \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \frac{SWT}{P} \gamma \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha S \frac{T^2}{P} (-1 + \gamma) \frac{\partial W}{\partial x} - \\ - \frac{4K}{D} (-1 + \gamma) \frac{T}{P} (-T_{ep} + T) - g(-1 + \gamma) \frac{WT}{P} \frac{dh}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

де $\alpha = zg \frac{R}{S}$;

$$\beta = \alpha \frac{\lambda}{2D};$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_p - zgR};$$

C_p – питома теплоємність газу;

S – площа поперечного перерізу;

$W(x, t)$ – питома масова витрата.

Представимо систему рівнянь (2.18) – (2.20) в матричній формі

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + B(x, t, \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Phi(x, t, \phi), \quad (2.21)$$

де

$$\Phi(x, t, \phi) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta STW|W|}{p} - \frac{p}{T} \frac{g}{\alpha S} \frac{dh}{dx} \\ 0 \\ -4 \frac{K}{D} (-1 + \gamma) \frac{T}{p} (-T_{ep} + T) - g(-1 + \gamma) \frac{TW}{p} \frac{dh}{dx} \end{bmatrix},$$

$$B(x, t, \phi) = \begin{bmatrix} 2\alpha \frac{WST}{p} & -\alpha \frac{STW^2}{p^2} + 1 & 0 \\ \alpha ST & 0 & 0 \\ \alpha \frac{ST^2}{p} (\gamma - 1) & 0 & \alpha \frac{WST}{p} \gamma \end{bmatrix},$$

матриці, елементи яких задані неперервні та безперервно-диференційовані функції.

Визначимо тип системи рівнянь (2.21). Для цього необхідно знайти розв'язок рівняння

$$\det(E - \theta B) = 0, \quad (2.22)$$

де E – одинична матриця;

$\det$ – детермінант матриці.

Отримуємо:

$$E - \theta B = \begin{bmatrix} -\theta 2\alpha \frac{WST}{p} + 1 & -\theta(-\alpha TS \frac{W^2}{p^2} + 1) & 0 \\ -\theta \alpha TS & 1 & 0 \\ -\theta \alpha \frac{T^2 S}{p} (\gamma - 1) & 0 & -\theta \alpha \frac{WST}{p} \gamma + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Значення θ знайдемо з рівняння

$$\left(-\theta \alpha TS \frac{W}{p} \gamma + 1 \right) \left(-\theta 2\alpha \frac{WST}{p} + 1 + \left(\alpha \frac{STW^2}{p^2} - \theta \right) \theta \alpha ST \right) = 0, \quad (2.24)$$

$$\theta_1 = \frac{P}{\alpha^2 \gamma W}, \quad \theta_2 = \frac{1}{\alpha^2 \frac{W}{P} - \alpha}, \quad \theta_3 = \frac{1}{\alpha^2 \frac{W}{P} + \alpha}.$$

Таким чином, в будь-якій точці (T, P, W, x, t) області $\Omega: \{T > 0, P > 0, W \geq 0, x > 0, t > 0\}$ рівняння (2.24) щодо θ має три різних дійсних корені, а система (2.21) є гіперболічною в даній області. ННРТГ описуються квазілінійною системою диференціальних рівнянь гіперболічного типу (2.21), з відповідними граничними і початковими умовами. Отже, задамо граничні умови в першому вузлі:

$$\begin{cases} T(0, t) = T^0(t), \\ P(0, t) = P^0(t), \\ G(0, t) = G^0(t). \end{cases} \quad (2.25)$$

Граничні умови в другому вузлі:

$$\begin{cases} P(L, t) = P^1(t), \\ G(L, t) = G^1(t), \end{cases} \quad (2.26)$$

де $T^0(t), G^0(t), P^0(t), P^1(t), G^1(t)$, – задані функції.

Початкові умови мають вигляд:

$$T(x, 0) = T_0(x), P(x, 0) = P_0(x), W(x, 0) = W_0(x), x \in (0, L), \quad (2.27)$$

де $T_0(x), P_0(x), W_0(x)$ – задані функції.

3 ВИБІР ТА ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ

3.1 Метод і алгоритм розв'язання системи рівнянь математичної моделі ННРТГ по ДТ з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки

Щоб отримати чисельний розв'язок системи (2.21) з початковим розподілом (2.27) і граничними умовами (2.25) – (2.26) розділимо відрізок $[0, L]$ на n відрізків, довжиною Δx , а потім перший і останній відрізки навпіл. Отримаємо відрізків. Перший, другий, останній і передостанній довжиною $\frac{\Delta x}{2}$, інші довжиною Δx , а так само $n+3$ точки розбиття x_i , $i = \overline{0, n+2}$.

Таким чином, маємо нерівномірну скінченно-різницеву координатну сітку.

На рис. 3.1 – 3.3 зображені шаблони для апроксимації похідних на початку ділянки.

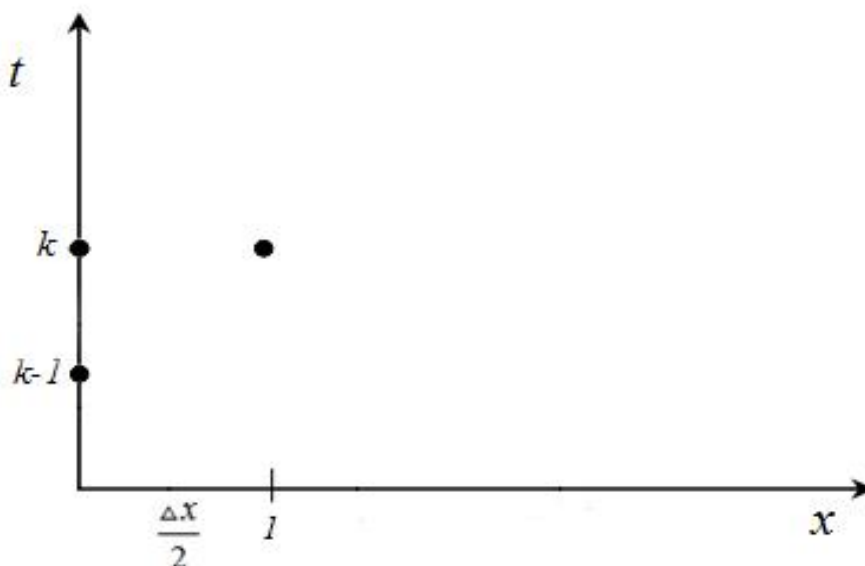


Рисунок 3.1 – Шаблон апроксимації похідних на початку ділянки в нульовій точці

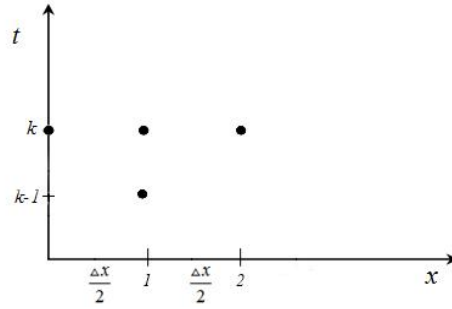


Рисунок 3.2 – Шаблон апроксимації похідних
на початку ділянки в першій точці

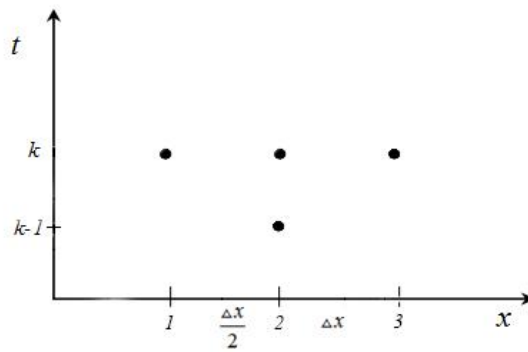


Рисунок 3.3 – Шаблон апроксимації похідних
на початку ділянки в другій точці

На рисунках 3.4 – 3.6 зображені шаблони для апроксимації похідних в кінці ділянки, а на рисунку 3.7 зображений шаблон для апроксимації похідних в i -й точці.

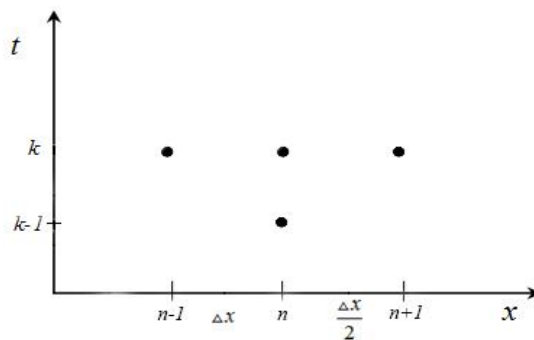


Рисунок 3.4 – Шаблон апроксимації похідних
в кінці ділянки в n -й точці

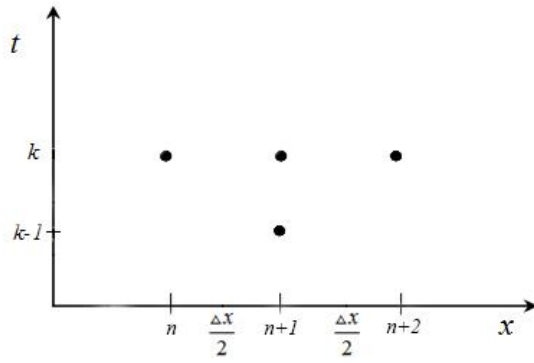


Рисунок 3.5 – Шаблон апроксимації похідних
в кінці ділянки в $(n+1)$ -й точці

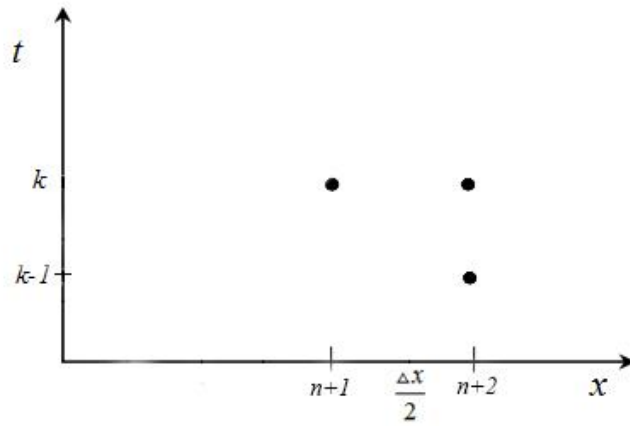


Рисунок 3.6 – Шаблон апроксимації похідних
в кінці ділянки в $(n+2)$ -й точці

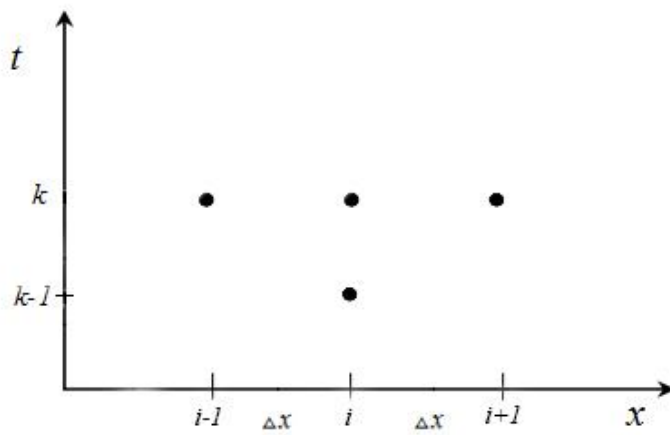


Рисунок 3.7 – Шаблон апроксимації похідних
в i -й точці

Подамо похідну в точці (x_0, t^k) у вигляді лінійної комбінації функцій

$\varphi_0^{k-1}, \varphi_0^k, \varphi_1^k$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0^k = c_0 \varphi_0^{k-1} + c_1 \varphi_0^k + c_2 \varphi_1^k. \quad (3.1)$$

Замінімо розкладання значень функцій $\varphi_0^{k-1}, \varphi_0^k, \varphi_1^k$ в ряд Тейлора, щодо точки (x_0, t^k) за ступенями Δt і Δx :

$$\varphi_0^{k-1} = \varphi(x_0, t^k - \Delta t) = \varphi_0^k - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_0^k \Delta t + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_0^k (\Delta t)^2 - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right|_0^k (\Delta t)^3 + \dots,$$

$$\varphi_1^k = \varphi\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, t^k\right) = \varphi_0^k - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0^k \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_0^k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_0^k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 + \dots$$

Отримаємо:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0^k = (c_0 + c_1 + c_2) \varphi_0^k + c_2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0^k \frac{\Delta x}{2} - c_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_0^k \Delta t + \frac{c_2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_0^k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots$$

Звідси отримаємо систему:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0, \\ c_2 \frac{\Delta x}{2} = 1, \\ c_0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0, \\ c_1 = -\frac{2}{\Delta x}, \\ c_2 = \frac{2}{\Delta x}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0^k = \frac{\varphi_1^k - \varphi_0^k}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{2(\varphi_1^k - \varphi_0^k)}{\Delta x}.$$

Представимо похідну $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k$ в точці (x_1, t^k) у вигляді лінійної комбінації функцій $\varphi_0^k, \varphi_1^k, \varphi_2^k, \varphi_1^{k-1}$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k = c_0 \varphi_0^{k-1} + c_1 \varphi_0^k + c_2 \varphi_1^k + c_3 \varphi_2^k. \quad (3.2)$$

Замінімо розкладання відповідних функцій в ряд Тейлора щодо точки (x_1, t^k) за ступенями Δt і Δx :

$$\begin{aligned} \varphi_1^{k-1} &= \varphi(x_1, t^k - \Delta t) = \varphi_1^k - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_1^k \Delta t + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_1^k (\Delta t)^2 - \dots, \\ \varphi_0^k &= \varphi\left(x_1 - \frac{\Delta x}{2}, t^k\right) = \varphi_1^k - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_1^k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots, \\ \varphi_2^k &= \varphi\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, t^k\right) = \varphi_1^k + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_1^k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Отримаємо

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k = (c_0 + c_1 + c_2 + c_3) \varphi_1^k - c_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_1^k \Delta t + (c_3 - c_1) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k \frac{\Delta x}{2} + \frac{(c_1 - c_3)}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_1^k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots$$

Звідси маємо систему

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ (c_3 - c_1) \frac{\Delta x}{2} = 1, \\ c_0 = 0, \\ c_1 + c_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_0 = 0, \\ c_1 = -c_3, \\ 2c_3 = \frac{2}{\Delta x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0, \\ c_2 = 0, \\ c_3 = \frac{1}{\Delta x}, \\ c_1 = -\frac{1}{\Delta x}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_1^k = \frac{\varphi_2^k - \varphi_0^k}{\Delta x}.$$

Представимо похідну $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_2^k$ в точці (x_2, t^k) у вигляді лінійної комбінації функцій:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_2^k = c_0 \varphi_2^{k-1} + c_1 \varphi_1^k + c_2 \varphi_2^k + c_3 \varphi_3^k. \quad (3.3)$$

Замінімо розкладання відповідних функцій в ряд Тейлора щодо точки (x_2, t^k) за ступенями Δt і Δx та отримаємо

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_2^k = \frac{3\varphi_2^k + \varphi_3^k - 4\varphi_1^k}{3\Delta x}.$$

Аналогічно виводяться похідні в інших точках розбиття. Таким чином, отримуємо загальну формулу для знаходження похідної $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i^k$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i^k = \begin{cases} \frac{2(\varphi_i^k - \varphi_0^k)}{\Delta x}, i = 0, \\ \frac{\varphi_2^k - \varphi_0^k}{\Delta x}, i = 1, \\ \frac{3\varphi_2^k + \varphi_3^k - 4\varphi_1^k}{3\Delta x}, i = 2, \\ \frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k}{2\Delta x}, i = \overline{3, n-1}, \\ \frac{4\varphi_{n+1}^k - 3\varphi_n^k - \varphi_{n-1}^k}{3\Delta x}, i = n, \\ \frac{\varphi_{n+2}^k - \varphi_n^k}{\Delta x}, i = n+1, \\ \frac{2(\varphi_{n+2}^k - \varphi_{n+1}^k)}{\Delta x}, i = n+2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Далі знайдемо апроксимації похідних $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_i^k$. Представимо похідну $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_0^k$ в точці (x_0, t^k) у вигляді лінійної комбінації функцій φ_0^{k-1} , φ_0^k , φ_1^k аналогічно формулі (3.1). Отримаємо

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_0^k = \frac{\varphi_0^k - \varphi_0^{k-1}}{\Delta t}.$$

Представимо похідну $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_1^k$ в точці (x_1, t^k) у вигляді лінійної комбінації функцій (рис. 3.2) аналогічно формулі (3.2), та отримаємо формулу

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_1^k = \frac{\varphi_1^k - \varphi_1^{k-1}}{\Delta t}.$$

Аналогічно виводяться похідні в інших точках розбиття. Загальна

формула для знаходження $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_i^k$ матиме вигляд

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_i^k = \frac{\varphi_i^k - \varphi_i^{k-1}}{\Delta t}, \quad i = \overline{0, n+2}. \quad (3.5)$$

З урахуванням формул (3.4) і (3.5) отримаємо наступну систему різницевих рівнянь.

При $i = 0$:

$$\frac{\varphi_0^k - \varphi_0^{k-1}}{\Delta t} + B_0^k \frac{2(\varphi_1^k - \varphi_0^k)}{\Delta x} = \Phi_0^k,$$

тобто

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_0^k - \frac{2}{\Delta x} B_0^k \varphi_0^k + \frac{2}{\Delta x} B_0^k \varphi_1^k = \Phi_0^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_0^{k-1}. \quad (3.6)$$

При $i = 1$ рівняння має вигляд

$$-\frac{1}{\Delta x} B_1^k \varphi_0^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_1^k + \frac{1}{\Delta x} B_1^k \varphi_2^k = \Phi_1^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_1^{k-1}. \quad (3.7)$$

Для $i = 2$ отримаємо

$$\frac{\varphi_2^k - \varphi_2^{k-1}}{\Delta t} + B_2^k \frac{(3\varphi_2^k + \varphi_3^k - 4\varphi_1^k)}{\Delta x} = \Phi_2^k.$$

Звідси

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_2^k - \frac{4}{\Delta x} B_2^k \varphi_1^k + \frac{3}{\Delta x} B_2^k \varphi_2^k + \frac{1}{\Delta x} B_2^k \varphi_3^k = \Phi_2^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_2^{k-1}. \quad (3.8)$$

Для проміжних точок отримаємо рівняння

$$-\frac{1}{2\Delta x} B_i^k \varphi_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_i^k + \frac{1}{2\Delta x} B_i^k \varphi_{i+1}^k = \Phi_i^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_i^{k-1}, \quad i = \overline{3, n-1}. \quad (3.9)$$

Аналогічно матимемо:

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_n^k - \frac{1}{3\Delta x} B_n^k \varphi_{n-1}^k + \frac{1}{\Delta x} B_n^k \varphi_n^k + \frac{4}{3\Delta x} B_n^k \varphi_{n+1}^k = \Phi_n^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_n^{k-1}, \quad i = n, \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_{n+1}^k - \frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^k \varphi_n^k + \frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^k \varphi_{n+2}^k = \Phi_{n+1}^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_{n+1}^{k-1}, \quad i = n+1, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_{n+2}^k - \frac{2}{\Delta x} B_{n+2}^k \varphi_{n+1}^k + \frac{2}{\Delta x} B_{n+2}^k \varphi_{n+2}^k = \Phi_{n+2}^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_{n+2}^{k-1}, \quad i = n+2. \quad (3.12)$$

Розв'язок системи рівнянь (3.6) – (3.12) є вектор

$$\varphi^k = (\varphi_0^k, \varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_i^k, \dots, \varphi_n^k, \varphi_{n+1}^k, \varphi_{n+2}^k) = (W_0^k, P_0^k, T_0^k, W_1^k, P_1^k, T_1^k, \dots, W_{n+2}^k, P_{n+2}^k, T_{n+2}^k).$$

3.2 Метод і алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь з використанням спрощеного метода Ньютона

Щоб отримати лінійну систему рівнянь, системи (3.6) – (3.12) будемо вирішувати спрощеним методом Ньютона. Таким чином, отримаємо лінійні системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_1^k} & \dots & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_i^k} & \dots & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_i^k} & \dots & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \end{bmatrix}_{\varphi^{k,0}} \cdot \begin{pmatrix} \delta \varphi_0^{k,s} \\ \dots \\ \delta \varphi_i^{k,s} \\ \dots \\ \delta \varphi_{n+2}^{k,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^{k,s-1} \\ \dots \\ \psi_i^{k,s-1} \\ \dots \\ \psi_{n+2}^{k,s-1} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

або в більш загальному вигляді:

$$\left[\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]_{\varphi^{k,0}} \delta \varphi^{k,s} = \psi^{k,s-1}, \quad s=1,2,\dots,$$

де $\varphi^{k,s}$ – вектор розв'язку системи на s -й ітерації;

$\varphi_i^{k,s}$ ($i=0,1,\dots,n+2$) – компоненти вектору $\varphi^{k,s}$;

$\psi^{k,s-1}$ – вектор нев'язок на $(s-1)$ -й ітерації;

$\delta \varphi^{k,s}$ – вектор поправок до невідомих на s -й ітерації, отже,

$$\varphi^{k,s} = \varphi^{k,s-1} - \delta \varphi^{k,s}.$$

Компоненти вектору нев'язок знаходяться за формулами:

$$\psi_0^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_0^{k,s-1} - \varphi_0^{k-1}) + \frac{2}{\Delta x} B_0^{k,s-1} (\varphi_1^{k,s-1} - \varphi_0^{k,s-1}) - \Phi_0^{k,s-1}, \quad i=0, \quad (3.14)$$

$$\psi_1^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_1^{k,s-1} - \varphi_1^{k-1}) + \frac{1}{\Delta x} B_1^{k,s-1} (\varphi_2^{k,s-1} - \varphi_0^{k,s-1}) - \Phi_1^{k,s-1}, \quad i=1, \quad (3.15)$$

$$\psi_2^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_2^{k,s-1} - \varphi_2^{k-1}) + \frac{1}{3\Delta x} B_2^{k,s-1} (\varphi_3^{k,s-1} + 3\varphi_2^{k,s-1} - 4\varphi_1^{k,s-1}) - \Phi_2^{k,s-1}, \quad i=2, \quad (3.16)$$

$$\psi_i^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_i^{k,s-1} - \varphi_i^{k-1}) + \frac{1}{2\Delta x} B_i^{k,s-1} (\varphi_{i+1}^{k,s-1} - \varphi_{i-1}^{k,s-1}) - \Phi_i^{k,s-1}, \quad i=\overline{3,n-1}, \quad (3.17)$$

$$\psi_n^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_n^{k,s-1} - \varphi_n^{k-1}) + \frac{1}{3\Delta x} B_n^{k,s-1} (4\varphi_{n+1}^{k,s-1} - 3\varphi_n^{k,s-1} - \varphi_{n-1}^{k,s-1}) - \Phi_n^{k,s-1}, \quad i = n, \quad (3.18)$$

$$\psi_{n+1}^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_{n+1}^{k,s-1} - \varphi_{n+1}^{k-1}) + \frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^{k,s-1} (\varphi_{n+2}^{k,s-1} - \varphi_n^{k,s-1}) - \Phi_{n+1}^{k,s-1}, \quad i = n+1, \quad (3.19)$$

$$\psi_{n+2}^{k,s-1} = \frac{1}{\Delta t} (\varphi_{n+2}^{k,s-1} - \varphi_{n+2}^{k-1}) + \frac{2}{\Delta x} B_{n+2}^{k,s-1} (\varphi_{n+2}^{k,s-1} - \varphi_{n+1}^{k,s-1}) - \Phi_{n+2}^{k,s-1}, \quad i = n+2. \quad (3.20)$$

Тоді матриця похідних $\left[\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$ з урахуванням співвідношень

(3.14) – (3.20) матиме наступну структуру:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_1^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_1^k} & \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_2^k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_1^k} & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_2^k} & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_3^k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i-1}^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_i^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i+1}^k} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n-1}^k} & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_n^k} & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_n^k} & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $\left[\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$ – це матриці розмірності (3×3) :

$$\frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_1^k} = \frac{2}{\Delta x} B_0^k;$$

$$\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_0^k} = -\frac{1}{\Delta x} B_1^k;$$

$$\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_2^k} = \frac{1}{\Delta x} B_1^k;$$

$$\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_1^k} = -\frac{4}{3\Delta x} B_2^k;$$

$$\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_3^k} = \frac{1}{3\Delta x} B_2^k;$$

При $i = \overline{3, n-1}$:

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i-1}^k} = -\frac{1}{2\Delta x} B_i^k; \quad \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i+1}^k} = \frac{1}{2\Delta x} B_i^k; \quad \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n-1}^k} = -\frac{1}{3\Delta x} B_n^k;$$

$$\frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} = \frac{4}{3\Delta x} B_n^k; \quad \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_n^k} = -\frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^k;$$

$$\frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} = \frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^k; \quad \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} = -\frac{2}{\Delta x} B_{n+2}^k.$$

З урахуванням знайдених похідних, матрицю $\left[\frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$ напишемо

наступним чином:

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial \phi^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \phi_0^k} & \frac{2}{\Delta x} B_0^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x} B_1^k & \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \phi_1^k} & \frac{1}{\Delta x} B_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3\Delta x} B_2^k & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \phi_2^k} & \frac{1}{3\Delta x} B_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta x} B_i^k & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \phi_i^k} & \frac{1}{2\Delta x} B_i^k & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3\Delta x} B_n^k & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \phi_n^k} & \frac{4}{3\Delta x} B_n^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^k & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \phi_{n+1}^k} & \frac{1}{\Delta x} B_{n+1}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\Delta x} B_{n+2}^k & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \phi_{n+2}^k} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Згідно (3.14) з урахуванням системи (2.21) напишемо вирази для координат вектору нев'язок $\psi_0^{k,s}$:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1} = & \frac{1}{\tau} (W_0 - W_0^{k-1}) + \frac{2}{\Delta} \left[\frac{2\alpha T_0 S W_0}{P_0} (W_1 - W_0) + \left(1 - \alpha S \frac{T_0 W_0^2}{P_0^2} \right) (P_1 - P_0) \right] + \\ & + \beta S \frac{T_0 W_0 |W_0|}{P_0} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_0}{T_0} \frac{dh}{dx}; \end{aligned}$$

$$\psi_{0,2} = \frac{1}{\tau} (P_0 - P_0^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \alpha T_0 S (W_1 - W_0);$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,3} = & (T_0 - T_0^{k-1}) + \frac{2}{\Delta} \left[(\gamma - 1) \alpha \frac{T_0^2}{P_0} S \cdot (W_1 - W_0) + \gamma \alpha T_0 S \frac{W_0}{P_0} (T_1 - T_0) \right] + \\ & + \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0} (T_0 - T_{ep}) + g (\gamma - 1) \frac{T_0 W_0}{P_0} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Елементи матриці Якобі $\left[\frac{\partial \psi_0^k}{\partial \phi_0^k} \right]_{\phi^{k,s}}$ записуються в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial W_0} &= \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\Delta} \left[\frac{2\alpha T_0 S}{P_0} (W_1 - 2W_0) + (P_1 - P_0) \left(\frac{-2\alpha S T_0 W_0}{P_0^2} \right) \right] + \frac{2\beta S T_0 |W_0|}{P_0} = \\ &= \frac{1}{\tau} + \frac{2\alpha T_0 S}{P_0 \Delta} \left[(W_1 - 2W_0) - (P_1 - P_0) \frac{W_0}{P_0} \right] + \frac{2\beta S T_0 |W_0|}{P_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial P_0} &= \frac{2}{\Delta} \left[\frac{-2\alpha T_0 S}{P_0^2} (W_1 - 2W_0) - \left(1 + \frac{\alpha S T_0 W_0^2 (P_0 - 2P_1)}{P_0^3} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{\beta S T_0 W_0 |W_0|}{P_0^2} + \frac{g}{\alpha S} \frac{1}{T_0} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial T_0} &= \frac{2}{\Delta} \left[\frac{2\alpha W_0 S}{P_0} (W_1 - W_0) + (P_1 - P_0) \left(\frac{-\alpha S W_0^2}{P_0^2} \right) \right] + \frac{\beta S}{P_0} W_0 |W_0| = \\ &= \frac{2\alpha W_0 S}{\Delta P_0} \left[2(W_1 - W_0) - \frac{(P_1 - P_0)}{P_0} W_0 \right] + \frac{\beta S W_0 |W_0|}{P_0} - \frac{g}{\alpha S} \frac{P_0}{T_0^2} \frac{dh}{dx}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial W_0} = -\frac{2\alpha T_0 S}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial P_0} = \frac{1}{\tau},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial T_0} = \frac{2\alpha S (W_1 - W_0)}{\Delta};$$

$$\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial W_0} = \frac{2\alpha T_0 S}{\Delta P_0} \left[(1 - 2\gamma) T_0 + \gamma T_1 \right] + g(\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0} \frac{dh}{dx},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial P_0} &= \frac{-2}{\Delta P_0^2} \left[(\gamma - 1) \alpha T_0^2 S (W_1 - W_0) + \gamma \alpha T_0 S W_0 (T_1 - T_0) \right] - \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0^2} (T_0 - T_{zp}) - \\ &\quad - g(\gamma - 1) \frac{T_0 W_0}{P_0^2} \frac{dh}{dx} = \frac{-2\alpha S T_0}{\Delta P_0^2} \left[(\gamma - 1) T_0 (W_1 - W_0) + \gamma W_0 (T_1 - T_0) \right] - \\ &\quad - \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0^2} (T_0 - T_{zp}) - g(\gamma - 1) \frac{T_0 W_0}{P_0^2} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial T_0} &= \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\Delta} \left[\frac{2(\gamma-1)\alpha T_0 S}{P_0} (W_1 - W_0) + \gamma \alpha S \frac{W_0}{P_0} (T_1 - 2T_0) \right] + \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{(2T_0 - T_{ep})}{P_0} + \\ &+ g(\gamma-1) \frac{W_0}{P_0} \frac{dh}{dx} = \frac{1}{\tau} + \frac{2\alpha S}{\Delta P_0} \left[2(\gamma-1) T_0 (W_1 - W_0) + \gamma W_0 (T_1 - 2T_0) \right] + \\ &+ \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{(2T_0 - T_{ep})}{P_0} + g(\gamma-1) \frac{W_0}{P_0} \frac{dh}{dx}.\end{aligned}$$

Вирази для визначення координат векторів нев'язок $\psi_1^{k,s}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\psi_{0,1} &= \frac{1}{\tau} (W_1 - W_1^{k-1}) + \frac{2}{\Delta} \left[\frac{\alpha T_1 S W_1}{P_1} (W_2 - W_1) + \left(1 - \alpha S \frac{T_1 W_1^2}{P_1^2} \right) (P_2 - P_1) \right] + \\ &+ \beta S \frac{T_1 W_1 |W_1|}{P_1} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_1}{T_1} \frac{dh}{dx};\end{aligned}$$

$$\psi_{0,2} = \frac{1}{\tau} (P_1 - P_1^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \alpha T_1 S (W_2 - W_1);$$

$$\begin{aligned}\psi_{0,3} &= (T_1 - T_1^{k-1}) + \frac{2}{\Delta} \left[(\gamma-1) \alpha \frac{T_1^2}{P_1} S \cdot (W_2 - W_1) + \gamma \alpha T_1 S \frac{W_1}{P_1} (T_2 - T_1) \right] + \\ &+ \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{T_1}{P_1} (T_1 - T_{ep}) + g(\gamma-1) \frac{T_1 W_1}{P_1} \frac{dh}{dx}.\end{aligned}$$

Елементи матриці Якобі $\left[\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \phi_1^k} \right]_{\phi^{k,s}}$ записуються в такий спосіб:

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial W_1} = \frac{1}{\tau} + \frac{2\alpha S T_1}{\Delta P_1^2} [W_1 (P_0 - P_2) + P_1 (W_2 - W_0)] + \frac{2\beta S T_1 |W_1|}{P_1},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial P_1} &= \frac{1}{P_1^3 \Delta} [-S \alpha T_1 W_1 (2(P_0 - P_2) W + P_1 (W_2 - W_0))] - \\ &- \frac{\beta S T_1 W_1 |W_1|}{P_1^2 \Delta} + \frac{g}{\alpha S} \frac{1}{T_1} \frac{dh}{dx},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial T_1} = \frac{W_1 S \alpha}{\Delta P_1^2} [-2P_1 W_0 + P_0 W_1 - P_2 W_1 + 2P_1 W_2] + \frac{\beta S W_1 |W_1|}{P_1} - \frac{g}{\alpha S} \frac{P_1}{T_1^2} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial W_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial P_1} = \frac{1}{\tau},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial T_1} = \frac{\alpha S (W_2 - W_0)}{\Delta};$$

$$\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial W_1} = \frac{\alpha T_1 S}{\Delta P_1} (T_2 - T_0) + g(\gamma - 1) \frac{T_1}{P_1} \frac{dh}{dx},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial P_1} = & \frac{T_1}{D \Delta P_1^2} [DS \alpha (T_1 W_0 - T_1 W_2)(1 - \gamma) + \gamma W_1 (T_0 - T_2)] - \\ & - 4k(\gamma - 1)(T_1 - T_{cp}) - g D W_1 (\gamma - 1) \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial T_1} = & \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha S}{\Delta P_1} [-2(\gamma - 1)T_1(W_0 - W_2) + \gamma W_1(T_2 - T_0)] + \\ & + \frac{4k}{D}(\gamma - 1) \frac{(2T_1 - T_{cp})}{P_1} + g(\gamma - 1) \frac{W_1}{P_1} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Вирази для визначення координат векторів нев'язок $\psi_2^{k,s}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1} = & \frac{1}{\tau} (W_2 - W_2^{k-1}) + \\ & + \frac{1}{3\Delta} \left[-4P_1 + 3P_2 + P_3 + \frac{\alpha T_2 S W_2 (P_2 (-8W_1 + 3W_2 + 2W_2) + W_2 (4P_1 - P_3))}{P_2^2} \right] + \\ & + \frac{W_2 - P_2^{k-1}}{\tau} + \beta S \frac{T_2 W_2 |W_2|}{P_2} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_1}{T_1} \frac{dh}{dx}; \\ \psi_{0,2} = & \frac{1}{\tau} (P_2 - P_2^{k-1}) + \frac{1}{3\Delta} \alpha T_2 S (-4W_1 + 3W_2 + W_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{0,3} = & \frac{S\alpha T_2}{3P_2\Delta} \left[\gamma \cdot (-4T_1 + T_3)W_2 + \gamma T_2(4W_1 - 3W_2 - W_3 + (-4W_1 + 6W_2 + W_3)) \right] + \\ & + \frac{S\alpha T_2}{3P_2\Delta} \left(12K(T_2 - T_{ep})(\gamma - 1)\Delta \right) + \frac{(T_2 - T_2^{k-1})}{\tau} + g(\gamma - 1) \frac{T_2 W_2}{P_2} \frac{dh}{dx}.\end{aligned}$$

Елементи матриці Якобі $\left[\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \phi_2^k} \right]_{\phi^{k,s}}$ записуються в такий спосіб:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial W_2} &= \frac{1}{\tau} + \frac{2\alpha S T_2}{3\Delta P_2^2} \left[4W_2 P_1 + P_2(-4W_1 + 3W_2 + W_3) \right] + \frac{2\beta S T_2 |W_2|}{P_2}, \\ \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial P_2} &= \frac{1}{3P_1^3 \Delta} \left[3P_2^2 + 2(-4P_1 + P_3)S T_2 W_2^2 \alpha + \alpha P_2 S T_2 W_2(8W_1 - 3W_2) \right] - \\ &\quad - \frac{\beta S T_2 W_2 |W_2|}{P_2^2} + \frac{g}{\alpha S} \frac{1}{T_2} \frac{dh}{dx}, \\ \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial T_2} &= \frac{W_2 S \alpha}{3\Delta P_2^2} \left[-8P_2 W_1 + 4P_1 W_2 + P_3 W_2 + 2P_2 W_3 \right] + \frac{\beta S W_2 |W_2|}{P_2} - \frac{g}{\alpha S} \frac{P_2}{T_2^2} \frac{dh}{dx}, \\ \frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial W_2} &= \frac{T_2 S \alpha}{\Delta}, \\ \frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial P_2} &= \frac{1}{\tau}, \\ \frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial T_2} &= \frac{\alpha S(-4W_1 + 3W_2 + W_3)}{3\Delta}, \\ \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial W_2} &= \frac{\alpha T_2 S}{3\Delta P_2} (-4T_1 + 6T_2 + T_3) \gamma + g(\gamma - 1) \frac{T_2}{P_2} \frac{dh}{dx}, \\ \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial P_2} &= \frac{T_2}{3\Delta P_2^2} \left[DS\alpha W_2(4T_1 - T_3) \gamma + T_2(3W_2 + W_3 + 4W_1(1 - \gamma) - (6W_2 + W_3)\gamma) \right] - \\ &\quad - \frac{T_2}{3\Delta P_2^2} 12k(\gamma - 1)(T_2 - T_{ep}) - gW_2 \frac{T_2}{P_2^2} (\gamma - 1) \frac{dh}{dx},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial T_2} = \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha S}{3P_2 \Delta} [(-4T_1 + T_3)W_2 \gamma - 2T_2(3W_2 + W_3 + 4W_1(\gamma - 1) - (6W_2 + W_3)\gamma)] + \\ + \frac{4k}{D}(\gamma - 1) \frac{(2T_2 - T_{ep})}{P_2} + g(\gamma - 1) \frac{W_2}{P_2} \frac{dh}{dx}.$$

Вирази для визначення координат вектору нев'язок $\psi_i^{k,s}, \psi_n^{k,s}, \psi_{n+1}^{k,s}, \psi_{n+2}^{k,s}$ та елементи матриць Якобі $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial \phi_i^k}, \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \phi_n^k}, \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \phi_{n+1}^k}, \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \phi_{n+2}^k}$ знаходяться в додатку А.

Варто зазначити, що у формулах вище, для визначення координат векторів нев'язок та елементів матриці Якобі на 0 кроці, для зручності, були опущені індекси k, s часового шару та ітерації.

Наведемо алгоритм розрахунку режиму течії газу по ДТ для k -го часового шару:

а) $s = 0$, задання $\phi^{k,0}$ (вектору початкових значень параметрів), розрахунок матриці Якобі;

б) $s = s + 1$, обчислення нев'язок $\psi^{k,s-1}$;

в) визначення векторів поправок $\delta \phi_i^{k,s}, i = \overline{0, n+2}$, шляхом розв'язання лінійної системи алгебраїчних рівнянь;

г) обчислення нових значень невідомих параметрів газового потоку на s -й ітерації:

$$\phi_i^{k,s} = \phi_i^{k,s-1} - \delta \phi_i^{k,s}, i = \overline{0, n+2};$$

д) перевірка збіжності $\|\psi^{k,s}\| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність. Якщо задана точність не досягнута, то переходимо до п. б, в іншому випадку до п. е.

е) кінець розрахунку часового шару.

Перевага даної неявної скінченно-різницевої схеми перед іншими полягає в тому, що її стійкість не залежить від вибору параметрів Δt та Δx , що

дозволяє значно скоротити час розрахунку на ЕОМ режиму транспорту газу по ДТ.

3.3 Метод і алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь з використанням метода Ньютона

Різницею між методом Ньютона та спрощеним методом Ньютона є те, що в спрощеному методі матрицю Якобі ми підраховуємо тільки на 0-й ітерації, а далі на кожній ітерації в якості матриці $A^{k,s}$ беремо матрицю Якобі, яка отримана на 0-й ітерації. У випадку метода Ньютона, ми використовуємо матрицю Якобі отриману на попередній s -й ітерації.

Системи (3.6) – (3.12) будемо вирішувати методом Ньютона. На $(s + 1)$ -й ітерації k -го часового шару отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \phi_0^k} & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \phi_1^k} & \dots & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \phi_{n+2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \phi_0^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \phi_i^k} & \dots & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \phi_{n+2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \phi_0^k} & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \phi_i^k} & \dots & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \phi_{n+2}^k} \end{bmatrix}_{\phi^{k,s+1}} \cdot \begin{pmatrix} \delta \phi_0^{k,s} \\ \dots \\ \delta \phi_i^{k,s} \\ \dots \\ \delta \phi_{n+2}^{k,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^{k,s-1} \\ \dots \\ \psi_i^{k,s-1} \\ \dots \\ \psi_{n+2}^{k,s-1} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

яка в загальному вигляді буде мати вид:

$$A^{k,s} \delta \phi^{k,s+1} = \psi^{k,s}, \quad (3.23)$$

де

$$A^{k,s} = \left[\frac{\partial \psi^k}{\partial \phi^k} \right]_{\phi^{k,s}},$$

де $\delta\phi^{k,s+1}$ – вектор поправок до невідомих на $(s+1)$ -й ітерації k -го часового шару;

$\psi^{k,s}$ – вектор нев'язок, визначений на розв'язку, отриманому на попередній s -й ітерації k -го часового шару;

$A^{k,s}$ – матриця Якобі, яка визначена на розв'язку, отриманому на попередній s -й ітерації.

З лінійної системи отримуються компоненти векторів поправок до невідомих.

Вектори нев'язок для k -го часового шару s -ї ітерації мають вигляд:

$$\begin{aligned}\psi_0^{k,s} &= \left(\frac{1}{\tau} \phi_0^{k,s} - \frac{1}{\Delta} B_0^{k,s} \phi_0^{k,s} \right) + \frac{1}{\Delta} B_0^{k,s} \phi_1^{k,s} - \Phi_0^{k,s} - \frac{1}{\tau} \phi_0^{k-1}, \\ \psi_i^{k,s} &= -\frac{1}{2\Delta} B_i^{k,s} \phi_{i-1}^{k,s} + \frac{1}{\tau} \phi_i^{k,s} + \frac{1}{2\Delta} B_i^{k,s} \phi_{i+1}^{k,s} - \Phi_i^{k,s} - \frac{1}{\tau} \phi_i^{k-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \psi_n^{k,s} &= \left(\frac{1}{\tau} \phi_n^{k,s} + \frac{1}{\Delta} B_n^{k,s} \phi_n^{k,s} \right) - \frac{1}{\Delta} B_n^{k,s} \phi_{n-1}^{k,s} - \Phi_n^{k,s} - \frac{1}{\tau} \phi_n^{k-1}.\end{aligned}$$

Наведемо алгоритм розрахунку параметрів ННРТГ по ДТ для k -го часового шару.

Крок 1. $s = 0$, задання $\phi^{k,0}$ (вектор початкових значень параметрів, який ми отримуємо, наприклад, зі СРТГ).

Крок 2. Обчислення нев'язок $\psi^{k,s}$.

Крок 3. Розрахунок елементів матриці Якобі.

Крок 4. Визначення векторів поправок шляхом розв'язання лінійної системи алгебраїчних рівнянь (3.23).

Крок 5. Обчислення нових значень невідомих параметрів газового потоку

на $(s + 1)$ -й ітерації:

$$\phi_i^{k,s+1} = \phi_i^{k,s} - \delta \phi_i^{k,s+1}, i = \overline{0, n}.$$

Крок 6. Перевірка збіжності $\|\psi^{k,s+1}\| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність. Якщо задана точність не досягнута, то $s = s + 1$ і переходимо до п.2, в іншому випадку до п.7.

Крок 7. Кінець розрахунку часового шару.

4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

4.1 Wolfram Mathematica як обчислювальна система

Wolfram Mathematica – це сучасна технічна обчислювальна система, що охоплює всі сфери технічних обчислень, включаючи нейронні мережі, машинне навчання, обробку зображень, геометрію, наукові дані, візуалізацію тощо. Система використовується у багатьох технічних, наукових, математичних та комп'ютерних областях.

Пакет "Mathematica" є найбільш розвиненою системою символьних і чисельних обчислень. Програми, написані за допомогою вбудованої в пакет мови програмування, короткі і дуже ефективні. Сама система складається з ядра, яке дозволяє обчислювати величезну кількість функцій з довільною точністю, виконувати велику кількість аналітичних обчислень і перетворень, будувати графіки і т.п.

При необхідності використання нових функцій, що не входять в ядро можна програмувати нові функції або використовувати доповнення до пакету (так звані addons), які різко підсилюють ефективність обчислень. Деякі доповнення входять до складу пакета (наприклад, ряд доповнень по статистиці, по роботі з векторними полями, подання на фазовій площині розв'язань диференціальних рівнянь). Інші - поширюються в Інтернеті

Для виконання поставленого завдання, після аналізу можливостей різних середовищ програмування і математичних пакетів був обраний пакет Wolfram Mathematica версії 11.1, тому що даний пакет, з точки зору автора, є найбільш оптимальним для проведення теоретичного і чисельного аналізу, і, зокрема, для розрахунку нестационарних неізотермічних РТГ по ділянці трубопроводу.

4.2 Опис програмного продукту

Створена програма для розрахунку ННРТГ по ділянці трубопроводу виконана в математичному пакеті Mathematica версії 11.1. Система дозволяє створювати ПП у форматі електронних документів. Перше, що необхідно зробити для розрахунку ННРТГ по ДТ це задати усі технічні параметри ділянки та фізичні параметри газу. Крім цього вказати кількість точок розбиття ділянки та граничні умови на початку і в кінці ділянки. Після задання початкових даних переходимо до безпосередньої реалізації самого алгоритму розрахунку РТГ. Порядок розрахунку відповідає схемі викладеної в підрозділі 3.2. На виході ми отримуємо значення параметрів газового потоку (температури, тиску та витрати) в точках розбиття ділянки трубопроводу.

4.3 Аналіз результатів дослідження

Для вирішення поставленого завдання розрахунку ННРТГ для ДТ, був створений програмний продукт, який складається з двох окремих документів. Один з них вирішує задачу з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки та спрощеного методу Ньютона (код програми в додатку А), а другий з використанням нерівномірної скінченно-різницевої сітки та метода Ньютона (код програми в додатку Б). Тестування обраних методів і робота програмного продукту були перевірені на наступних прикладах. Обрали горизонтальну ділянку довжиною $L = 100$ км, коефіцієнт ефективності ділянки $E = 0.95$, діаметр $D = 1400$ мм, коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту $k_T = 1.4$, товщина стінок $\delta = 10$ мм, коефіцієнт шовткості труби $K = 0.03$ мм, питома теплоємність $C_p = 0.656$, температура ґрунту на глибині прокладання газопроводу $t_{гр} = 12$ °С, відносна щільність газу по повітрю $\Delta = 0.6047$, коефіцієнт стисливості газу $z_H = 0.88$. Число точок розбиття ДТ дорівнює n .

Крок розбиття по часовій змінній $\Delta t = 300$ секунд. $T_{\max} = 12$ годин. Точність розрахунку $\varepsilon = 10^{-6}$.

Задаємо початкові умови:

$$P_H = 83.636 \text{ атм},$$

$$t_H = 38^\circ \text{C},$$

$$q = 100.1 \text{ млн м}^3 / \text{доб}.$$

Параметри розрахунку для СРТГ по ДТ при $n = 7$ наведені в додатку А.

В атестаційній роботі наведені розрахунки для двох типів завдань:

- підключення великих споживачів до мережі постачання газу;
- відключення великих споживачів від мережі постачання газу.

Граничні умови для підключення мають вигляд:

$$\begin{cases} P(0, t) = 83,636 \text{ атм}, \\ T(0, t) = 38 \text{ град.} \end{cases} \quad G(L, t) = \begin{cases} 100,1 \text{ млн м}^3 / \text{сут}, t < 200 \text{ мин}, \\ 110,5 \text{ млн м}^3 / \text{сут}, t \geq 200 \text{ мин}. \end{cases}$$

Граничні умови для відключення мають вигляд:

$$\begin{cases} P(0, t) = 83,636 \text{ атм}, \\ T(0, t) = 38 \text{ град.} \end{cases} \quad G(L, t) = \begin{cases} 100,1 \text{ млн м}^3 / \text{сут}, t < 200 \text{ мин}, \\ 90,5 \text{ млн м}^3 / \text{сут}, t \geq 200 \text{ мин}. \end{cases}$$

Розв'язуючи задачу запускаємо файли окремо при однакових початкових умовах на EOM, яка має процесор Intel Core i5-7300HQ, CPU 2.50GHz, 16Gb OZU, (SSD DDR4 500Gb, SSD DDR4 120GB) та операційну систему Windows 10 64Bit.

Розглянемо результат обчислення при підключенні споживача. Розрахунок проводили для різних точок розбиття при $n = 7, 12, 22$. За допомогою спрощеного метода Ньютона ми розв'язували задачу з

підключенням споживача. В таблиці 4.1 наведена кількість ітерацій на кожному часовому шарі для різних точок розбиття. А в таблиці 4.2 ми можемо побачити такі ж самі результати тільки для звичайного методу Ньютона.

Результати порівняння розподілу параметрів газового потоку на 44, 46, 56 та 144 часовому шарі, для спрощеного методу Ньютона та звичайного Ньютона наведені в таблицях 4.3–4.6. З результатів можна побачити що для параметрів, а саме витрати газу, температури та тиску для обох методів різниці майже немає. Це зумовлено тим, що ми досягли обраної точності в наших розрахунках.

Таблиця 4.1 – Спрощений метод Ньютона. Ітерації на кожному часовому шарі для різних точок розбиття для задачі підключення споживача

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 7$	1	4	10.361003 сек = 0.172683 хв
	2-4	3	
	5-39	2	
	40-43	1	
	44-45	5	
	46-48	4	
	49-70	3	
	71-105	2	
	106-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	284	

Продовження таблиці 4.1

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 12$	1	4	18.432998 сек =0.307217 хв.
	2-4	3	
	5-41	2	
	42-43	1	
	44	5	
	45	6	
	46-48	4	
	49-71	3	
	72-102	2	
	103-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	285	
$n = 22$	1	4	40.378038 сек =0.672967 хв.
	2-4	3	
	5-41	2	
	42, 43	1	
	44	6	
	45	7	
	46-48	4	
	49-71	3	
	72-103	2	

Кінець таблиці 4.1

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 22$	104-144	1	40.378038 сек =0.672967 хв.
	Сумарна кількість ітерацій:	288	

Таблиця 4.2 – Метод Ньютона. Ітерації на кожному часовому шарі для різних точок розбиття для задачі підключення споживача

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 7$	1, 2	3	11.068932 сек = 0.184482 хв
	3-37	2	
	38, 40	1	
	39	2	
	44-55	3	
	56-102	2	
	103	1	
	104	2	
	105-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	254	

Продовження таблиці 4.2

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 12$	1, 2	3	18.554999 сек =0.30925хв.
	3-35	2	
	36, 38, 40, 42, 43	1	
	37, 39, 41	2	
	44	4	
	45-60	3	
	61-98	2	
	99, 101	1	
	100, 102	2	
	103-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	262	
$n = 22$	1, 2	3	41.872 сек =0.697867 хв.
	3-35	2	
	36, 38, 40, 42	1	
	37, 39, 41	2	
	44	4	
	45-61	3	
	62-98	2	
	99, 101	1	

Кінець таблиці 4.2

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 22$	100, 102, 103	2	41.872 сек =0.697867 хв.
	104-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	255	

Таблиця 4.3 – Параметри газового потоку на 44-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
100,4178	38	83,636	100,4178	38	83,636
100,4831	37,21710	81,89990	100,4831	37,21710	81,89905
100,5185	36,43047	80,09246	100,5185	36,43047	80,09246
101,1393	34,99052	76,46726	101,1393	34,99051	76,46726
101,5542	33,49240	72,45138	101,5542	33,49240	72,45138
104,7696	32,18757	68,36961	104,7696	32,18757	68,36961
106,1862	31,34873	65,96971	106,1862	31,34871	65,96971
110,5	30,51202	63,51974	110,5	30,51202	63,51974

Таблиця 4.4 – Параметри газового потоку на 46-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
101,7374	38	83,636	101,7374	38	83,636
101,8928	37,20643	81,85218	101,8928	37,20643	81,85218
101,9768	36,38729	79,98872	101,9768	36,38729	79,98872
103,1977	34,89546	76,25578	103,1977	34,89546	76,25578
104,1068	33,24238	72,01323	104,1068	33,24238	72,01323
107,1787	31,83270	67,70343	107,1787	31,83270	67,70343
108,6390	30,97483	65,18190	108,6390	30,97483	65,18190
110,5	30,06315	62,59653	110,5	30,06315	62,59653

Таблиця 4.5 – Параметри газового потоку на 56-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
107,3868	38	83,636	107,3868	38	83,636
107,4597	37,27042	81,64942	107,4597	37,27042	81,64942
107,5023	36,45936	79,57017	107,5023	36,45936	79,57017
108,0453	34,86812	75,39307	108,0453	34,86812	75,39307
108,4933	33,14941	70,73511	108,4933	33,14941	70,73511
109,4661	31,39046	65,94985	109,4661	31,39046	65,94985
109,9444	30,61149	63,30131	109,9444	30,61149	63,30131
110,5	29,82464	60,57548	110,5	29,82464	60,57548

Таблиця 4.6 – Параметри газового потоку на 144-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
110,49946	38	83,636	110,49946	38	83,636
110,49945	37,28838	81,53326	110,49945	37,28838	81,53326
110,49948	36,58477	79,33178	110,49948	36,58477	79,33178
110,49949	35,27233	74,89627	110,49949	35,27233	74,89627
110,49959	33,97918	70,02014	110,49959	33,97918	70,02014
110,49979	32,80992	64,97671	110,49979	32,80992	64,97671
110,49990	32,22909	62,24363	110,49990	32,22909	62,24363
110,5	31,67872	59,42760	110,5	31,67872	59,42760

На рисунках 4.1 – 4.18 при $n=7$ наведені зміни тиску, температури та витрати газу в точках розбиття: 1, 3, 7 для обох методів.

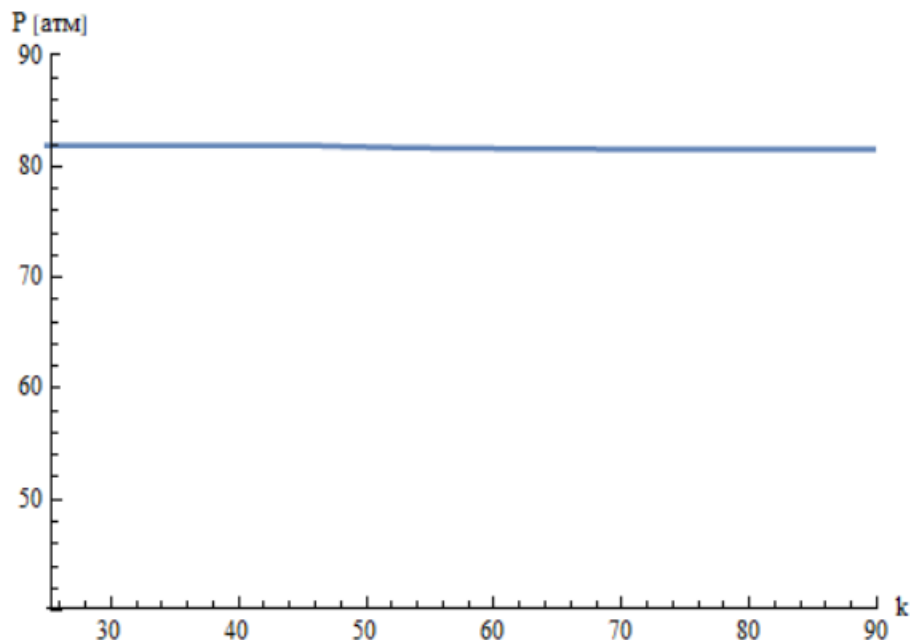


Рисунок 4.1 – Спрощений метод Ньютона. Тиск газу в 1-й точці розбиття ДТ

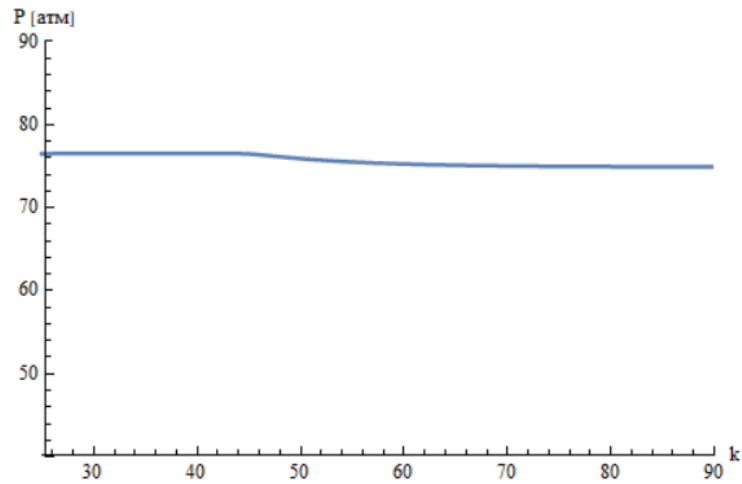


Рисунок 4.2 – Спрощений метод Ньютона. Тиск газу в 3-й точці розбиття ДТ

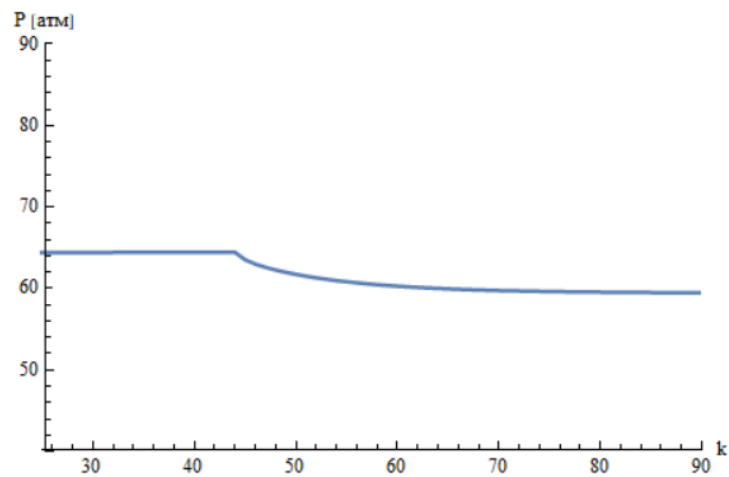


Рисунок 4.3 – Спрощений метод Ньютона. Тиск газу в 7-й точці розбиття ДТ

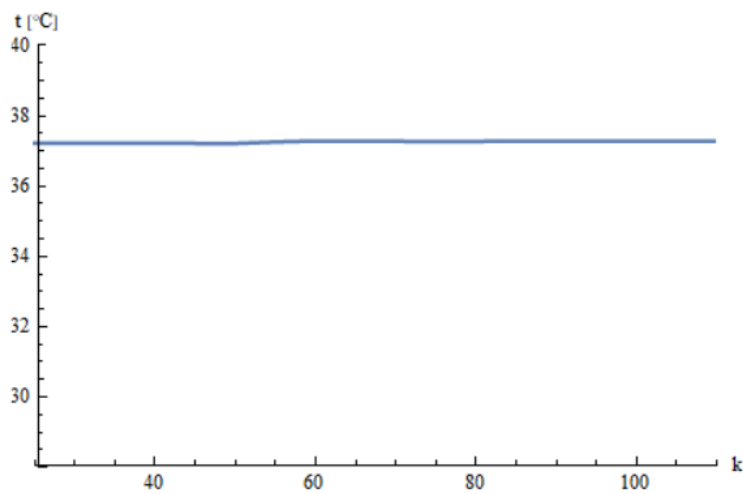


Рисунок 4.4 – Спрощений метод Ньютона. Температура газу в 1-й точці розбиття ДТ

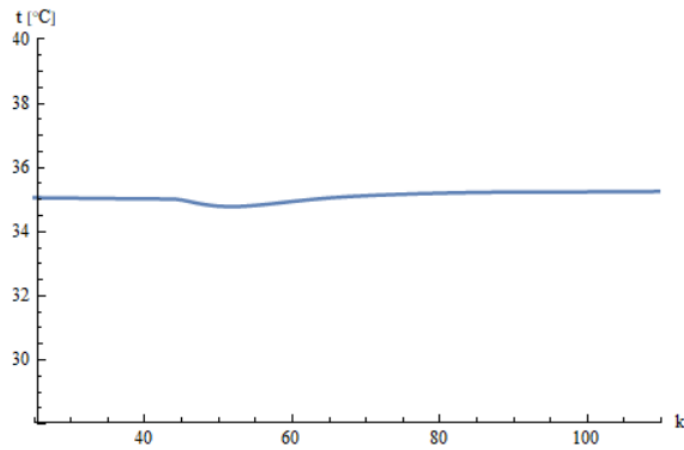


Рисунок 4.5 – Спрощений метод Ньютона. Температура газу в 3-й точці розбиття ДТ

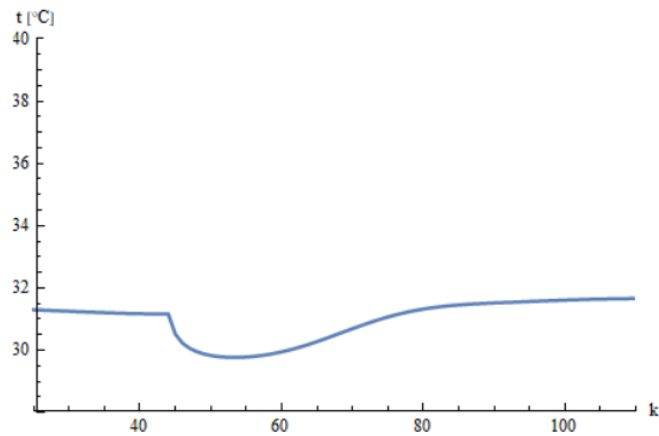


Рисунок 4.6 – Спрощений метод Ньютона. Температура газу в 7-й точці розбиття ДТ

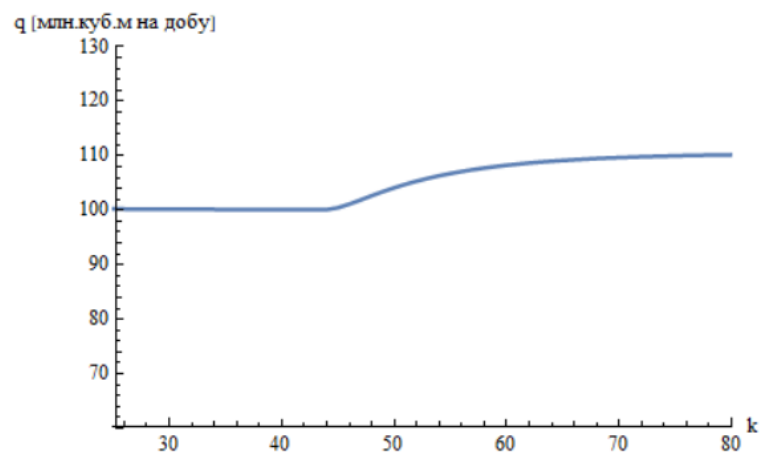


Рисунок 4.7 – Спрощений метод Ньютона. Витрата газу в 1-й точці розбиття ДТ

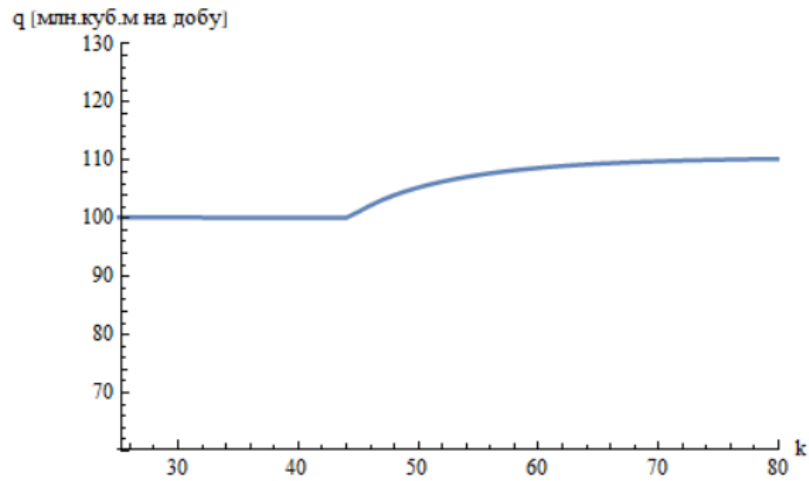


Рисунок 4.8 – Спрощений метод Ньютона. Витрата газу в 3-й точці розбиття ДТ

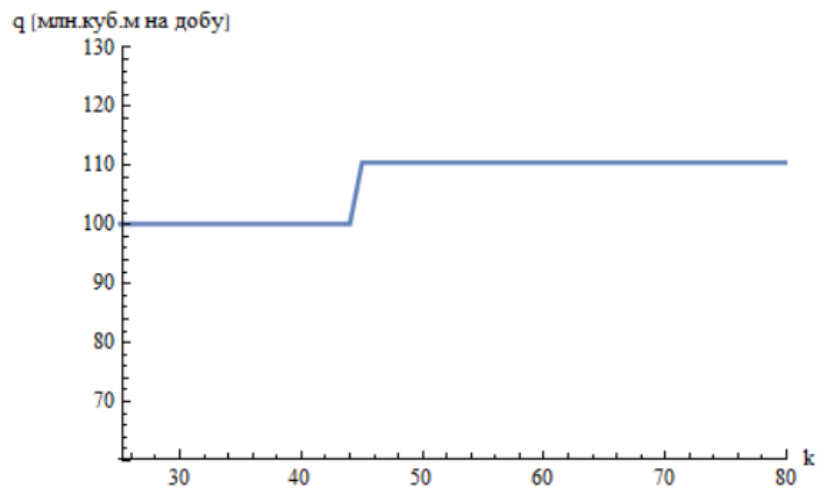


Рисунок 4.9 – Спрощений метод Ньютона. Витрата газу в 7-й точці розбиття ДТ

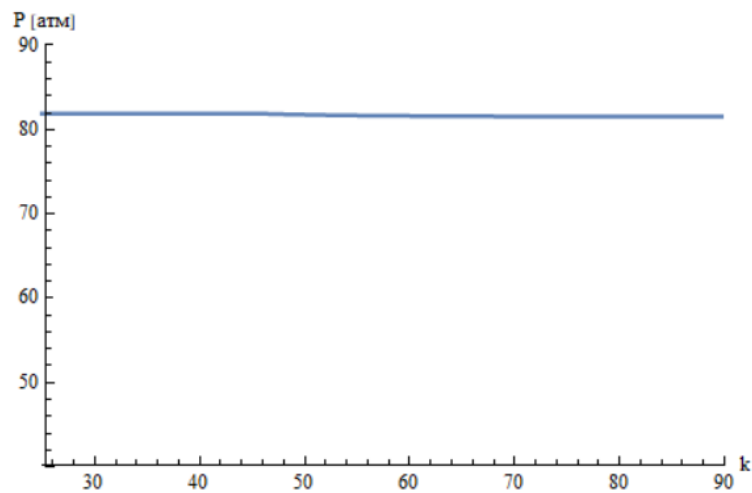


Рисунок 4.10 – Метод Ньютона. Тиск газу в 1-й точці розбиття ДТ

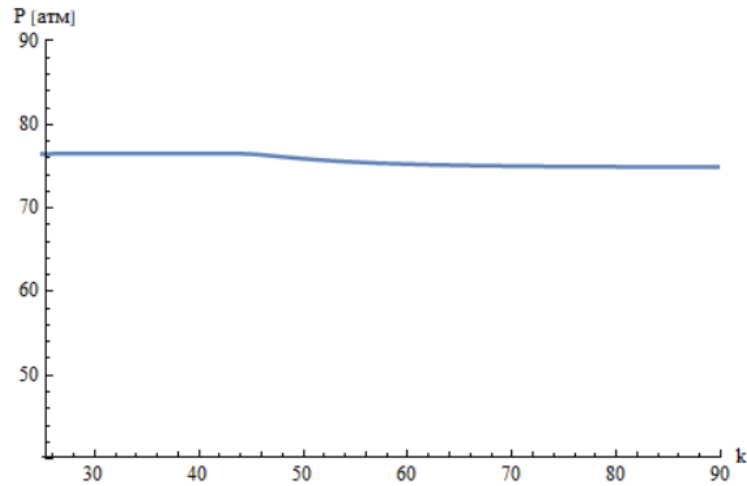


Рисунок 4.11 – Метод Ньютона. Тиск газу в 3-й точці розбиття ДТ

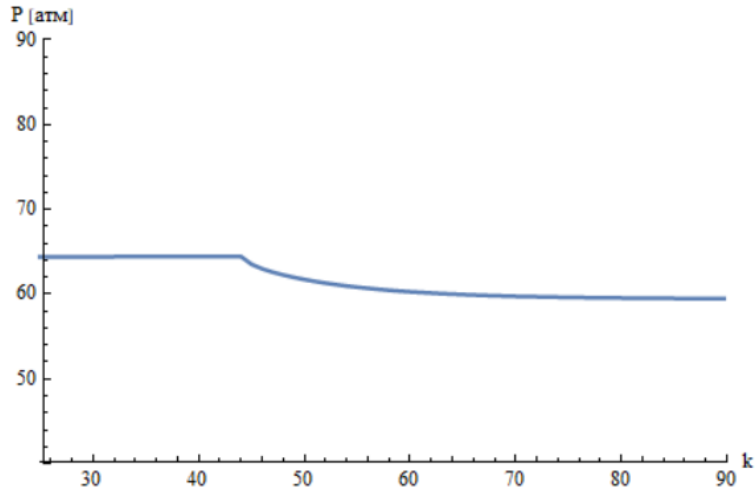


Рисунок 4.12 – Метод Ньютона. Тиск газу в 7-й точці розбиття ДТ

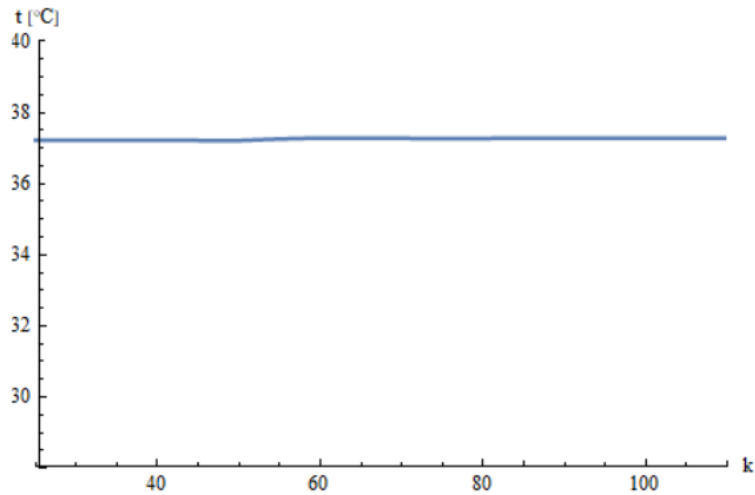


Рисунок 4.13 – Метод Ньютона. Температура газу в 1-й точці розбиття ДТ

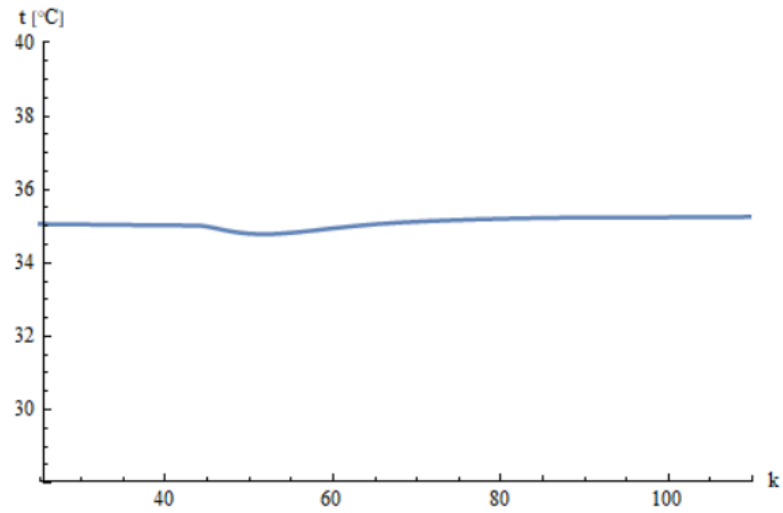


Рисунок 4.14 – Метод Ньютона. Температура газу в 3-й точці розбиття ДТ

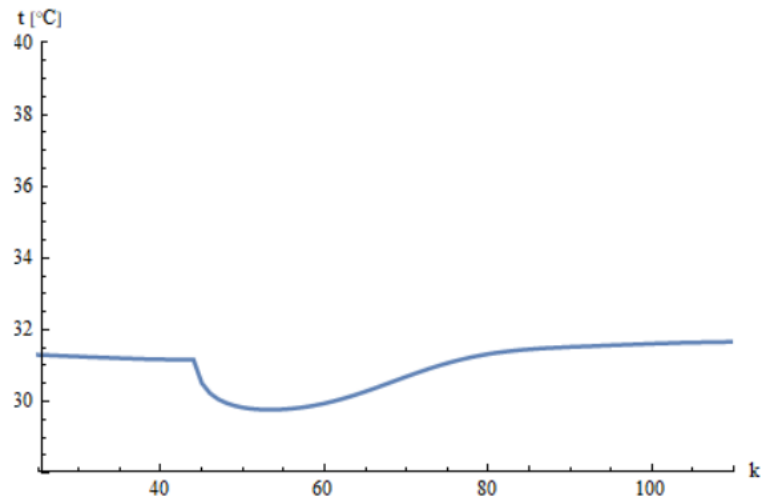


Рисунок 4.15 – Метод Ньютона. Температура газу в 7-й точці розбиття ДТ

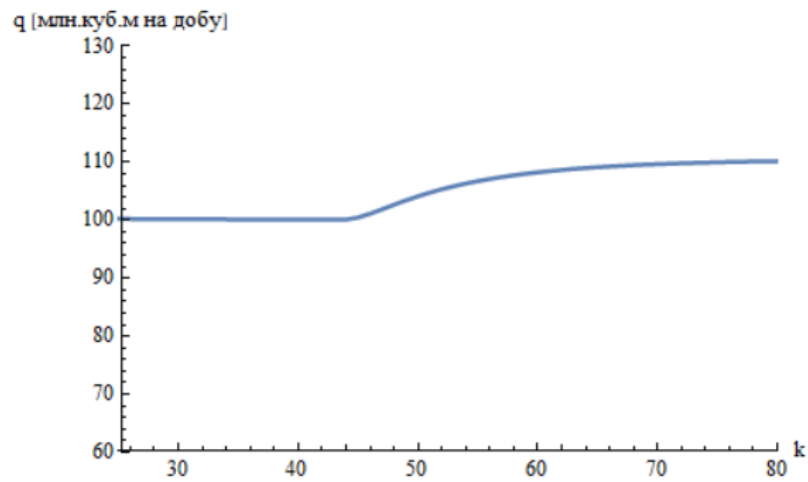


Рисунок 4.16 – Метод Ньютона. Витрата газу в 1-й точці розбиття ДТ

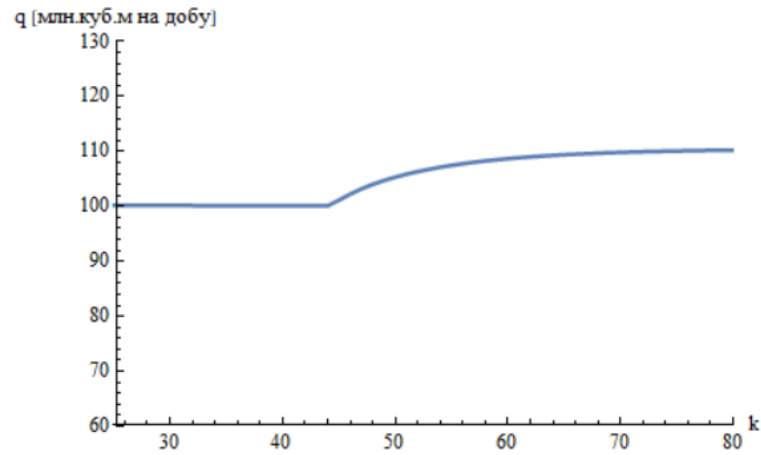


Рисунок 4.17 – Метод Ньютона. Витрата газу в 3-й точці розбиття ДТ

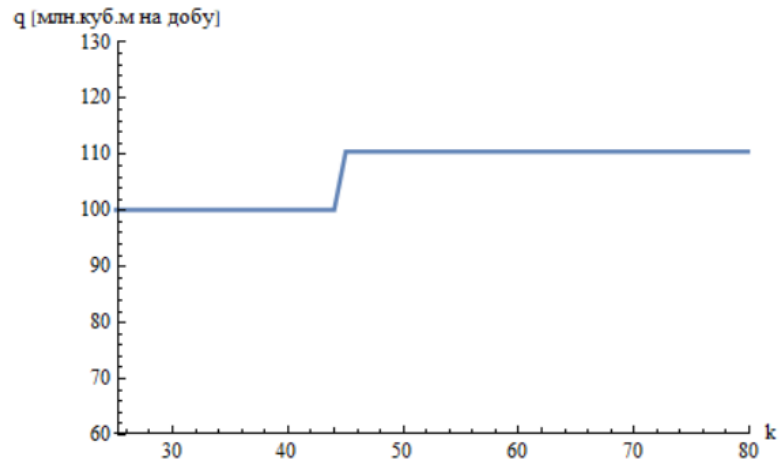


Рисунок 4.18 – Метод Ньютона. Витрата газу в 7-й точці розбиття ДТ

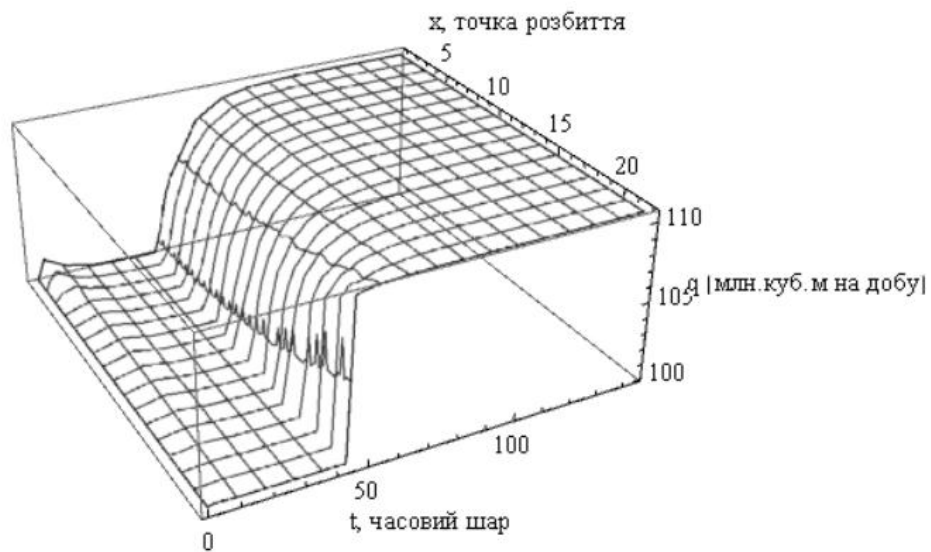


Рисунок 4.19 – Зміна витрати газу за часом по ДТ
з 22-ма точками розбиття

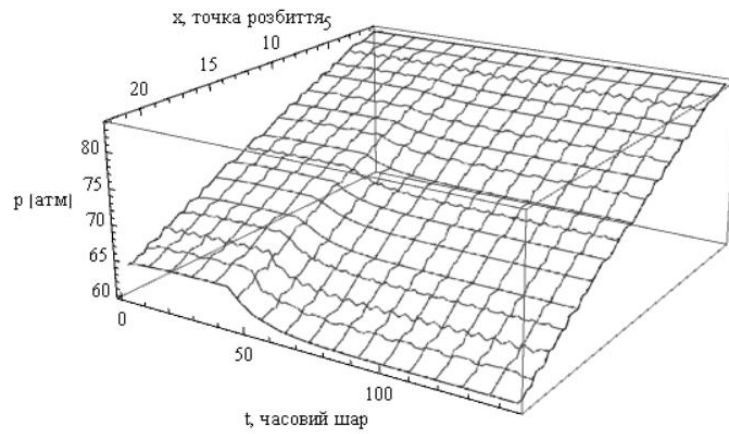


Рисунок 4.20 – Зміна тиску газу за часом по ДТ
з 22-ма точками розбиття

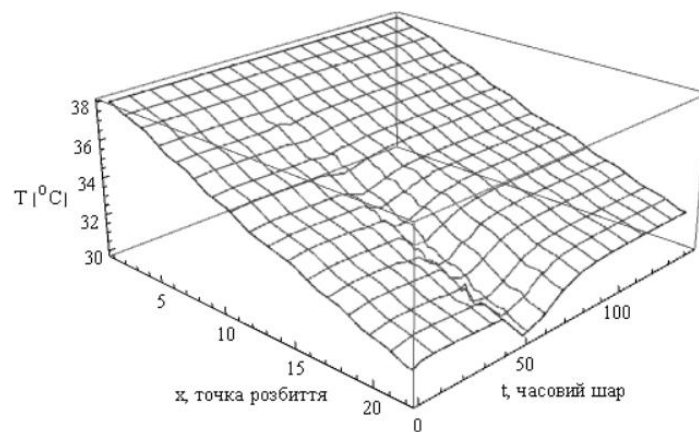


Рисунок 4.21 – Зміна температури газу за часом по ДТ
з 22-ма точками розбиття

Як бачимо, сумарна кількість ітерацій для завдання підключення споживача у метода Ньютона менша, але середній час роботи програми більший. Це зумовлено тим, що для метода Ньютона, ми використовуємо матрицю Якобі, отриману на попередній s -й ітерації. Спрощений метод Ньютона хоч і має більше ітерацій, але розраховуються вони набагато швидше саме через матрицю Якобі, яку ми щоразу не перераховуємо, тому метод потребує менше часу на розрахунок ітерацій. Також можна помітити, що при зростанні числа ітерацій, час роботи програми збільшується як для спрощеного метода Ньютона так і для звичайного метода Ньютона. Якщо порівняти час роботи наприклад для спрощеного метода Ньютона при $n=7$ та $n=22$, можна

побачити, що час збільшився майже в чотири рази. На рисунках 4.19 – 4.21 зображені 3D графіки змін витрати, температури та тиску газу для 22-х точок розбиття.

Розглянемо результати для задачі відключення великих споживачів від мережі постачання газу. Розрахунок проводили також для $n = 7, 12, 22$ точок розбиття. За допомогою спрощеного методу Ньютона ми розв'язували задачу з відключення великих споживачів. Кількість ітерацій на кожному часовому шарі для різних точок розбиття наведена в таблиці 4.7. А в таблиці 4.8 ми можемо побачити такі ж самі результати тільки для звичайного методу Ньютона.

Порівняння розподілу параметрів газового потоку на 44, 46, 56 та 144 часовому шарі, для спрощеного методу Ньютона та звичайного Ньютона наведені в таблицях 4.9 – 4.12.

Таблиця 4.7 – Спрощений метод Ньютона. Ітерації на кожному часовому шарі для різних точок розбиття для задачі відключення споживача

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 7$	1	4	10.812002 сек = 0.1802 хв
	2-4	3	
	5-39	2	
	40	1	
	44-45	5	
	49-65	3	
	66-93	2	
	94-144	1	

Продовження таблиці 4.7

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 7$	Сумарна кількість ітерацій:	252	10.812002 сек = 0.1802 хв
$n = 12$	1	4	18.00701 сек =0.300117 хв.
	2-4	3	
	5-41	2	
	42-43	1	
	44	5	
	45	6	
	46-48	4	
	49-65	3	
	66-97	2	
	98-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	274	
$n = 22$	1	4	40.280079 сек =0.671335хв.
	2-4	3	
	5-41	2	
	42, 43	1	
	44	6	
	45	7	
	46-48	4	

Кінець таблиці 4.7

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 22$	49-65	3	40.280079 сек =0.671335хв.
	66-97	2	
	98-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	276	

Таблиця 4.8 – Метод Ньютона. Ітерації на кожному часовому шарі для різних точок розбиття для задачі відключення споживача

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 7$	1, 2	3	11.241999 сек = 0.187367 хв
	3-37, 39	2	
	38, 40-43	1	
	44-54	3	
	55-93	2	
	94-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	245	

Кінець таблиці 4.8

Кількість точок розбиття	Номер часового шару k	Кількість ітерацій	Час роботи програми
$n = 12$	1, 2	3	18.582001 сек =0.3097 хв.
	3-35	2	
	36, 38, 40, 42, 43	1	
	37, 39, 41	2	
	44	4	
	45-54	3	
	55-94	2	
	95-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	247	
$n = 22$	1, 2	3	41.0379711 сек =0.683966 хв.
	3-35	2	
	36, 38, 40, 42, 43	1	
	37, 39, 41	2	
	44	4	
	45-55	3	
	46-93	2	
	94-144	1	
	Сумарна кількість ітерацій:	267	

Таблиця 4.9 – Параметри газового потоку на 44-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
99,8282	38	83,636	99,8282	38	83,636
99,7681	37,22535	81,92061	99,7681	37,22535	81,92061
99,7305	36,45977	80,14641	99,7305	36,45977	80,14641
99,1500	35,04664	76,57765	99,1500	35,04664	76,57765
98,7201	33,74254	72,82905	98,7201	33,74254	72,82905
95,7477	32,55087	68,98754	95,7477	32,55087	68,98754
94,3788	32,11034	67,14154	94,3788	32,11034	67,14154
90,5	31,74571	65,26520	90,5	31,74571	65,26520

Таблиця 4.10 – Параметри газового потоку на 46-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
98,5209	38	83,636	98,5209	38	83,636
98,3805	37,23436	81,96618	98,3805	37,23436	81,96618
98,2881	36,50151	80,24634	98,2881	36,50151	80,24634
97,1580	35,13783	76,78341	97,1580	35,13783	76,78341
96,2230	33,96720	73,23818	96,2230	33,96720	73,23818
93,4610	32,88765	69,60654	93,4610	32,88765	69,60654
92,1117	32,46710	67,85197	92,1117	32,46710	67,85197
90,5	35,15911	66,07370	90,5	35,15911	66,07370

Таблиця 4.11 – Параметри газового потоку на 56-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
92,8657	38	83,636	92,8657	38	83,636
92,8127	37,16203	82,15179	92,8127	37,16203	82,15179
92,7704	36,42551	80,62544	92,7704	36,42551	80,62544
92,3587	35,16221	77,55840	92,3587	35,16221	77,55840
91,9764	34,05946	74,35033	91,9764	34,05946	74,35033
91,2565	33,23599	71,08940	91,2565	33,23599	71,08940
90,8979	32,74755	69,41347	90,8979	32,74755	69,41347
90,5	32,34699	67,71949	90,5	32,34699	67,71949

Таблиця 4.12 – Параметри газового потоку на 144-му часовому шарі

Спрощений метод Ньютона			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)	Витрати газу (млн.м ³ / доб)	Температура (°C)	Тиск (атм)
90,49993	38	83,636	90,49993	38	83,636
90,50001	37,13496	82,22587	90,50001	37,13496	82,22587
90,49994	36,28401	80,77530	90,49994	36,28401	80,77530
90,50023	34,71368	77,86519	90,50023	34,71368	77,86519
90,50006	33,18044	74,78029	90,50006	33,18044	74,78029
90,50018	31,83068	71,65372	90,50018	31,83068	71,65372
90,50008	31,15856	70,015	90,50008	31,15856	70,015
90,5	30,52563	68,35824	90,5	30,52563	68,35824

На рисунках 4.22 – 4.39 при $n = 7$ наведені зміни тиску, температури та витрати газу в точках розбиття: 1, 3, 7 для обох методів.

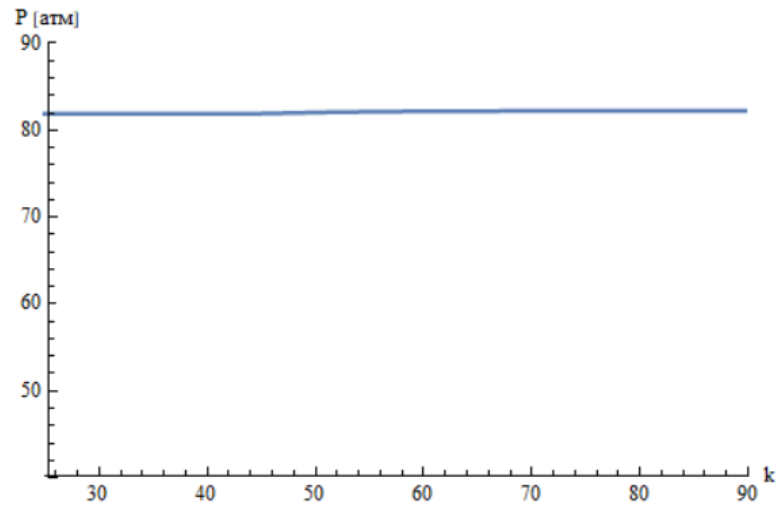


Рисунок 4.22 – Спрощений метод Ньютона. Тиск газу в 1-й точці розбиття ДТ

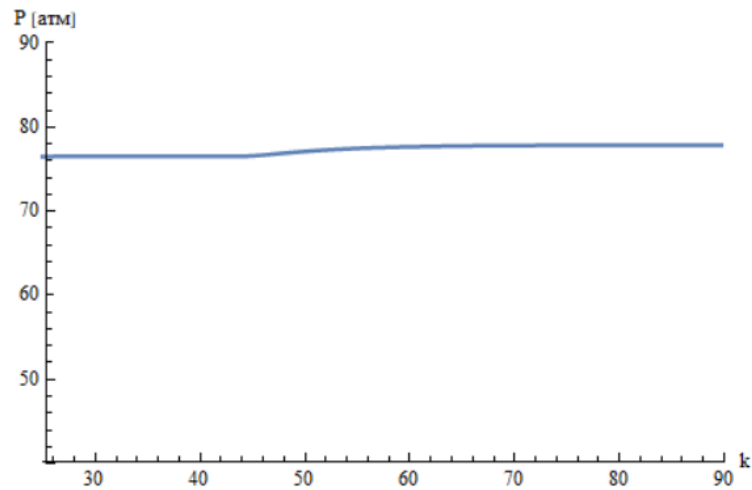


Рисунок 4.23 – Спрощений метод Ньютона. Тиск газу в 3-й точці розбиття ДТ

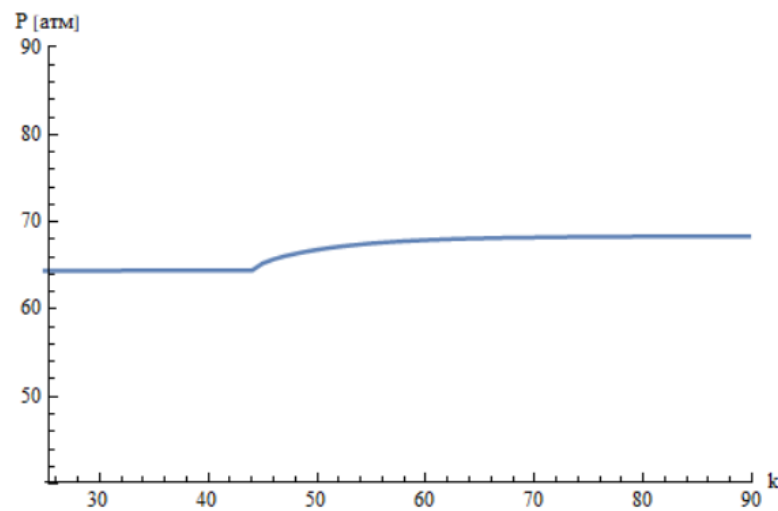


Рисунок 4.24 – Спрощений метод Ньютона. Тиск газу в 7-й точці розбиття ДТ

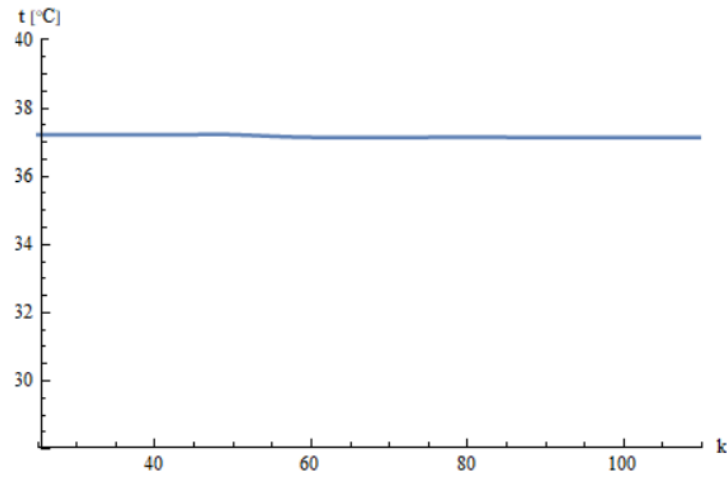


Рисунок 4.25 – Спрощений метод Ньютона. Температура газу в 1-й точці розбиття ДТ

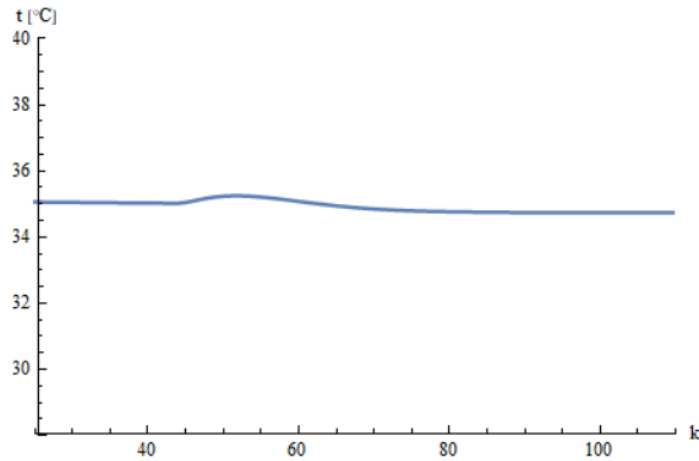


Рисунок 4.26 – Спрощений метод Ньютона. Температура газу в 3-й точці розбиття ДТ

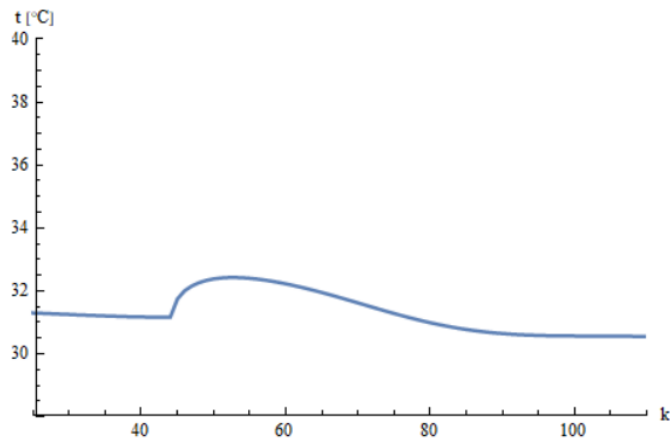


Рисунок 4.27 – Спрощений метод Ньютона. Температура газу в 7-й точці розбиття ДТ

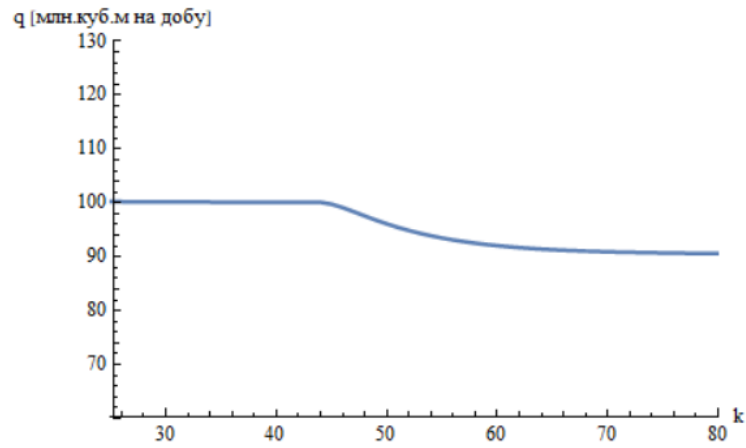


Рисунок 4.28 – Спрощений метод Ньютона. Витрата газу в 1-й точці розбиття ДТ

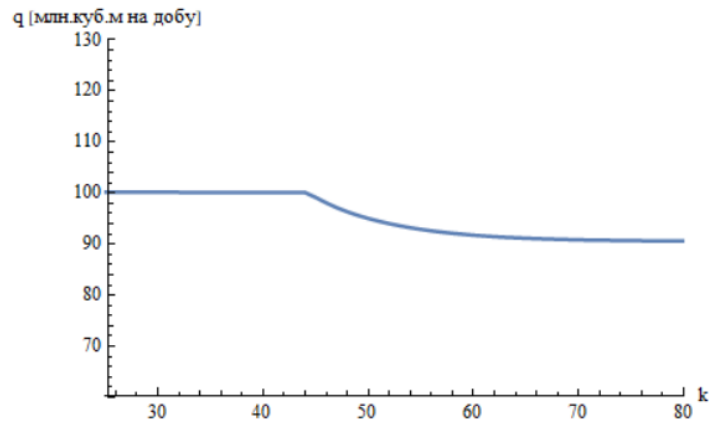


Рисунок 4.29 – Спрощений метод Ньютона. Витрата газу в 3-й точці розбиття ДТ

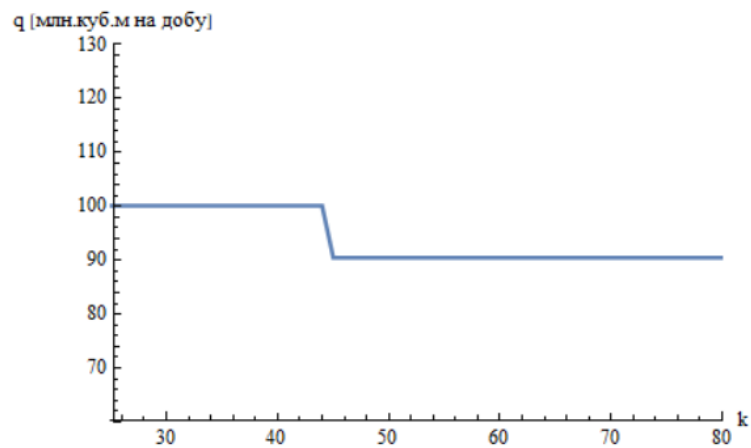


Рисунок 4.30 – Спрощений метод Ньютона. Витрата газу в 7-й точці розбиття ДТ

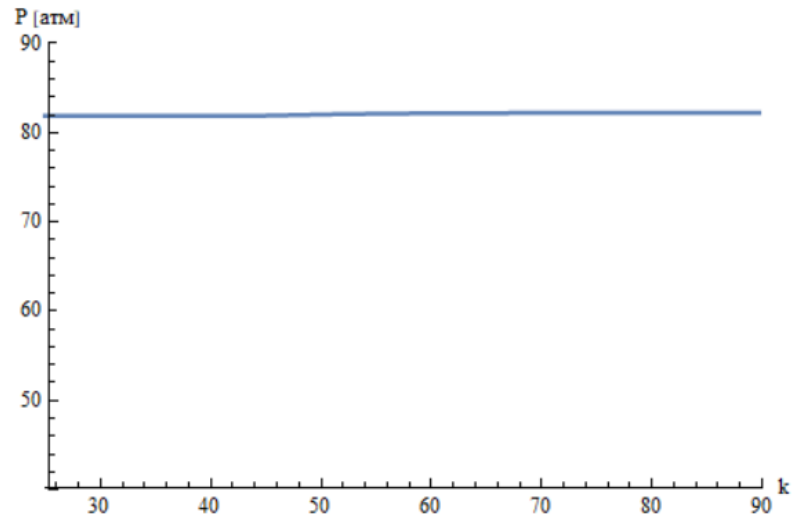


Рисунок 4.31 – Метод Ньютона. Тиск газу в 1-й точці розбиття ДТ

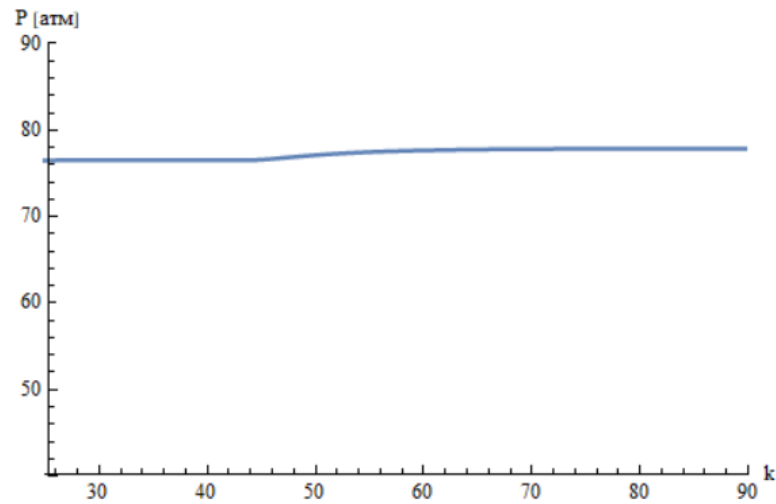


Рисунок 4.32 – Метод Ньютона. Тиск газу в 3-й точці розбиття ДТ

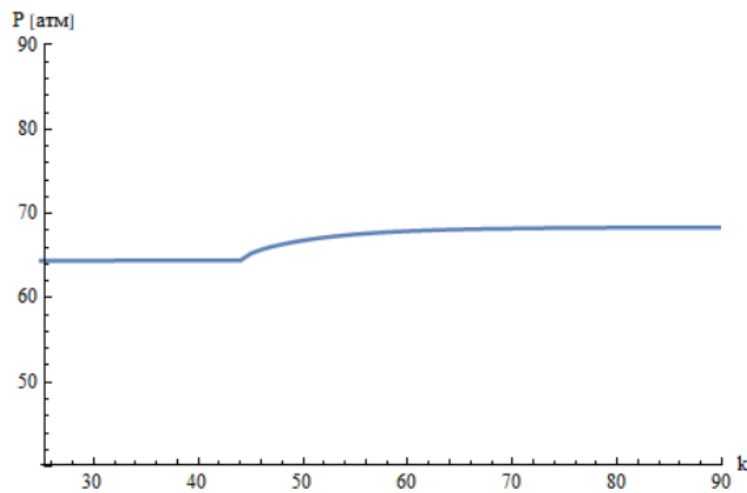


Рисунок 4.33 – Метод Ньютона. Тиск газу в 7-й точці розбиття ДТ

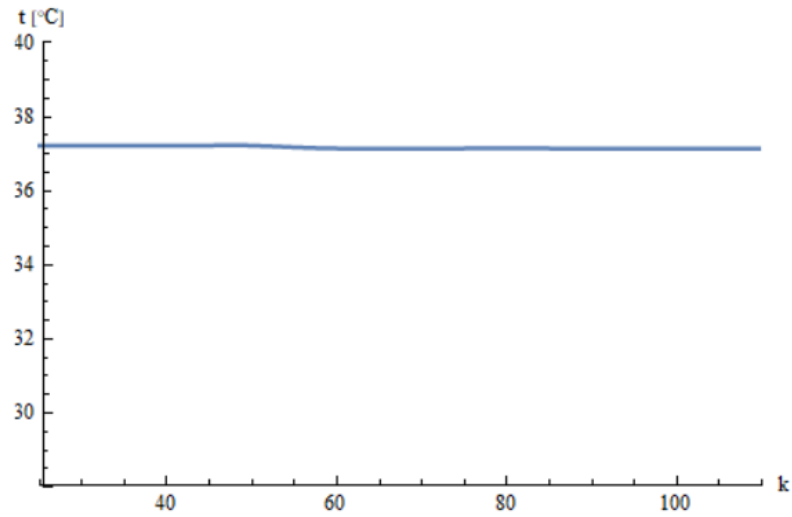


Рисунок 4.34 – Метод Ньютона. Температура газу в 1-й точці розбиття ДТ

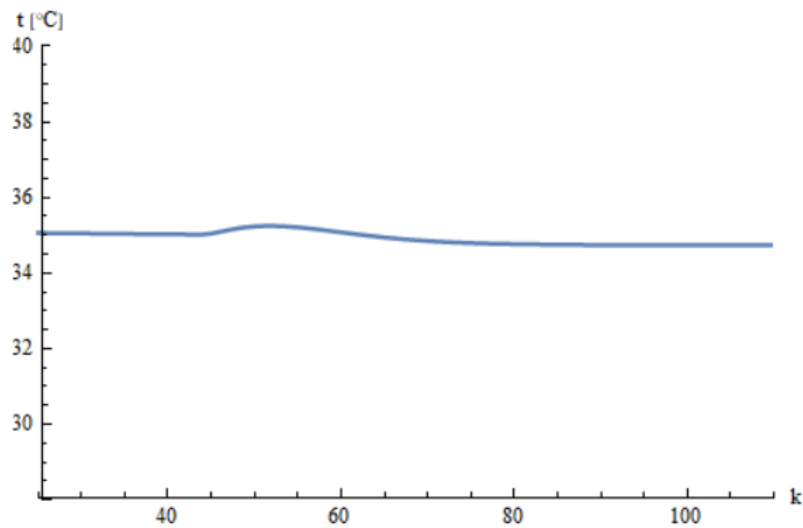


Рисунок 4.35 – Метод Ньютона. Температура газу в 3-й точці розбиття ДТ

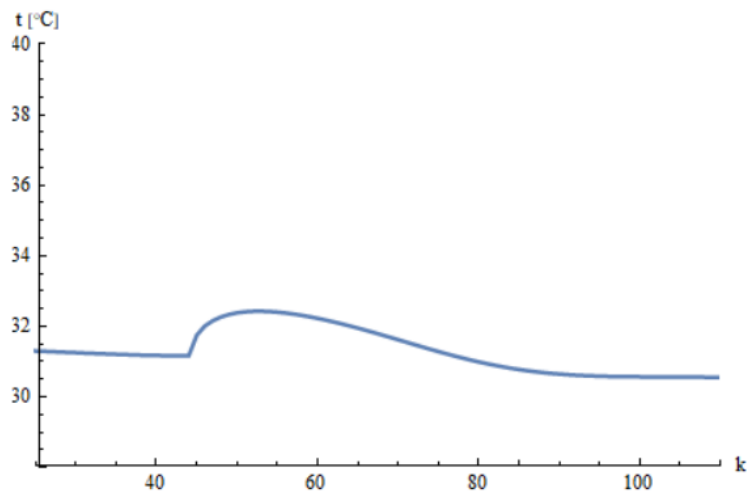


Рисунок 4.36 – Метод Ньютона. Температура газу в 7-й точці розбиття ДТ

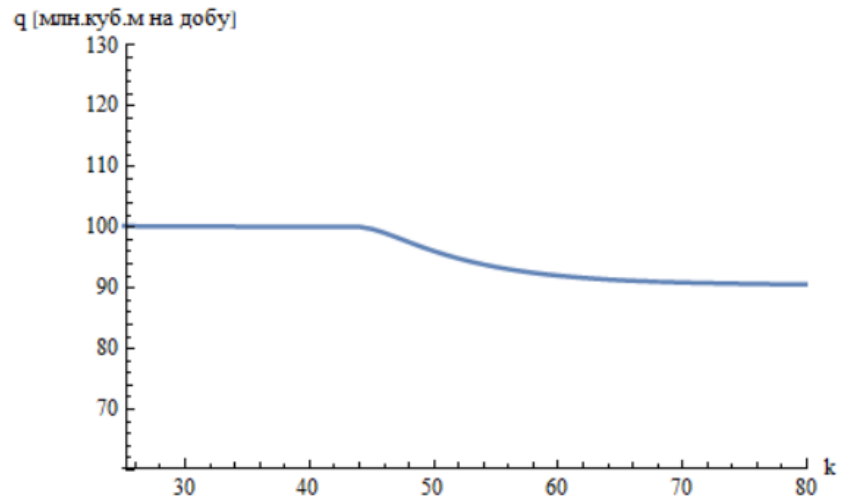


Рисунок 4.37 – Метод Ньютона. Витрата газу в 1-й точці розбиття ДТ

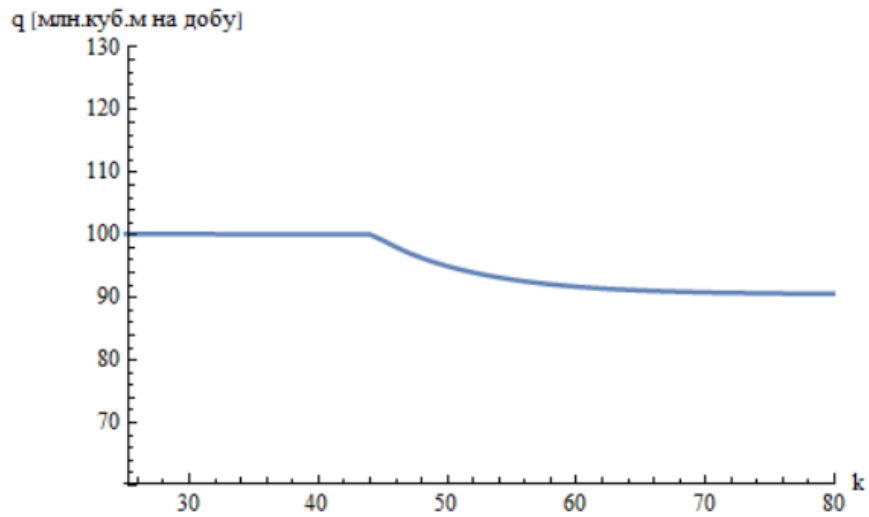


Рисунок 4.38 – Метод Ньютона. Витрата газу в 3-й точці розбиття ДТ

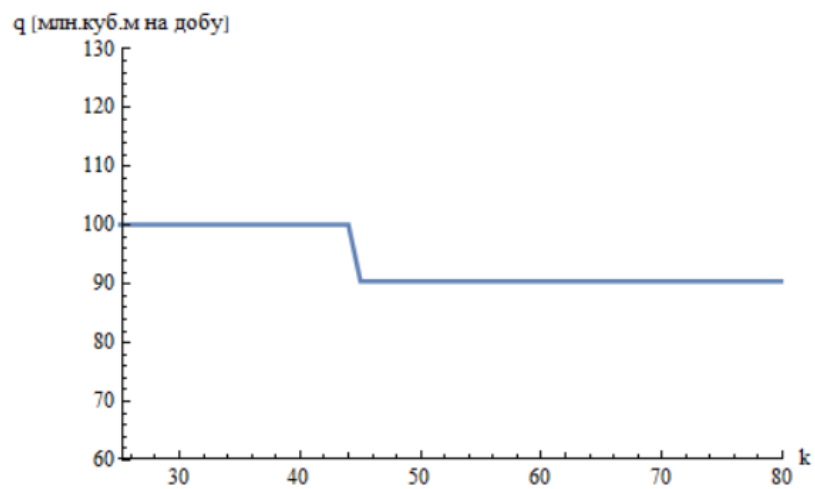


Рисунок 4.39 – Метод Ньютона. Витрата газу в 7-й точці розбиття ДТ

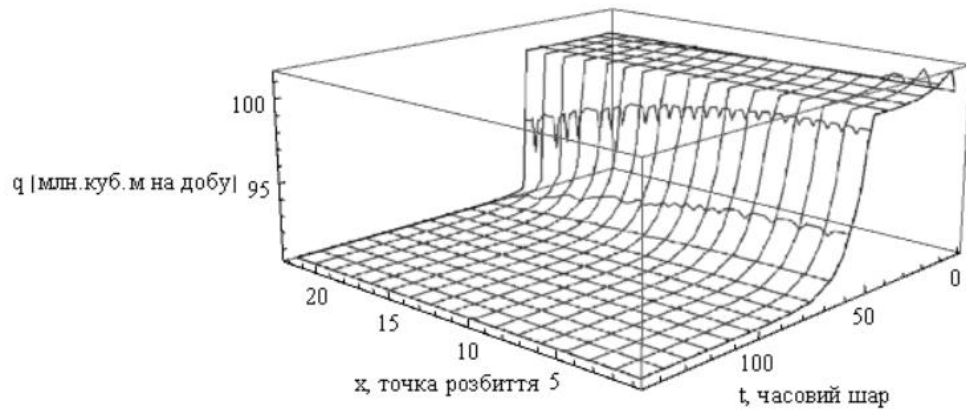


Рисунок 4.40 – Зміна витрати газу за часом по ДТ
з 22-ма точками розбиття

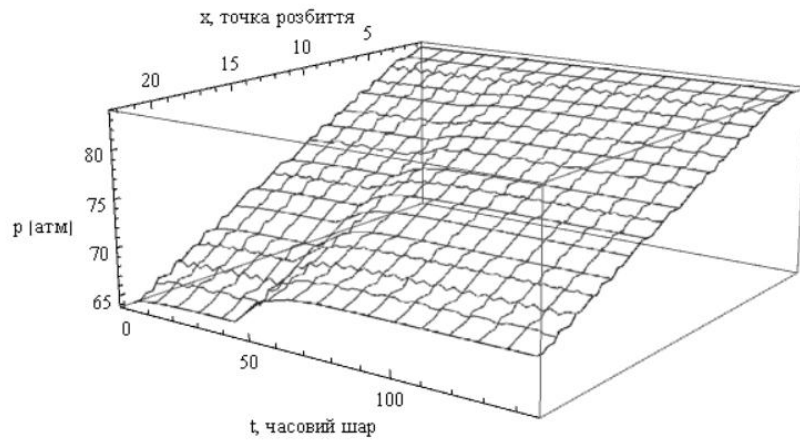


Рисунок 4.41 – Зміна тиску газу за часом по ДТ
з 22-ма точками розбиття

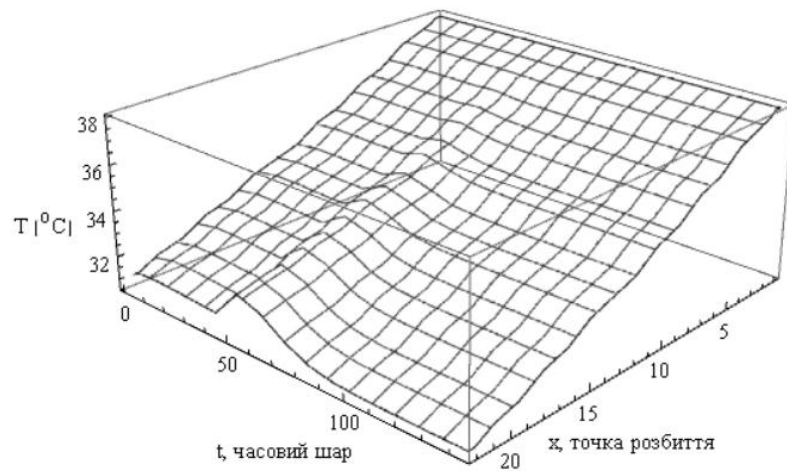


Рисунок 4.42 – Зміна температури газу за часом по ДТ
з 22-ма точками розбиття

Отже, після того, як ми отримали та порівняли результати для двох типів задач, можна чітко сказати, що ефективніше проводити розрахунки для ННРТГ по ДТ за допомогою спрощеного метода Ньютона, бо саме він має кращий результат по затратам машинного часу на розрахунок розглянутих завдань. Хоч метод і має трішки більше ітерацій, але час на опрацювання кожної з ітерацій він витрачає набагато менше. Зумовлено це тим, що в спрощеному методі матрицю Якобі ми підраховуємо тільки на 0-й ітерації, а далі на кожній ітерації в якості матриці $A^{k,s}$ беремо матрицю Якобі, яка отримана на 0-й ітерації. Це дає змогу не витрачати час на окрему операцію з підрахунку. Звичайний метод Ньютона має кращий результат по загальній кількості ітерацій, але на опрацювання кожної з них витрачається більше часу.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання атестаційної роботи було проведено системний аналіз проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу, сформульовані і пройдені етапи дослідження, розглянута ММ ННРТГ по ДТ, яка являє собою квазілінійну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних з заданими початковими і граничними умовами. Розглянуто метод скінченних різниць та побудований алгоритм розв'язання крайової задачі за допомогою спрощеного методу Ньютона та звичайного методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь. Також створена та протестована програма, яка розраховує ННРТГ, в якому реалізовані алгоритми розглянутих методів на задачах підключення та відключення від мережі крупних споживачів.

Ціль дослідження була безпосередньо досягнута – перевірено, як працює для даної ММ спрощений метод Ньютона та звичайний метод Ньютона, та яка між ними різниця. В результаті проведення чисельних експериментів при заданій точності в розрахунках ми отримали кількість ітерацій на кожному часовому шарі з різною кількістю точок розбиття ДТ. Проаналізували зміни параметрів, а саме витрати газу, температури та тиску для обох методів. Порівняли затрати машинного часу на розрахунок за допомогою створеного ПП в різних точках розбиття, та отримали, що ефективніше проводити розрахунки для ННРТГ по ДТ за допомогою спрощеного методу Ньютона, бо саме він має кращий результат по затратам машинного часу на розрахунок розглянутих завдань.

Результати даного дослідження досить корисні, зокрема, для повної автоматизації процесу постачання газу, і, як наслідок, зменшення кількості аварій і аварій з людськими жертвами.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Integration definition for function modeling (IDEF0). Draft Federal Information Processing Standards Publication 183. 1993. 108 p.
2. Azzolini John. Introduction to Systems Engineering Practices. July 2001. 250 p.
3. Калашян А. Н., Калянов Г. Н. Структурные модели бизнеса: DFD-технологии. Москва : Финансы и статистика, 2003. 363 с.
4. Fiodorov I. G. Overcoming expressiveness deficit of business process modeling languages // Business Informatics. 2016. № 3 (37). P. 62-71.
5. Зайцев В. В., Трещев В. М. Численные методы для физиков. Нелинейные уравнения и оптимизация: уч. пос. Самара : Изд-во "Самарский университет", 2005. 86 с.
6. Катренко А. В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації. Львів : Новий Світ-2000, 2003. 424 с.
7. Гусарова И. Г., Боярская Ю. В. Классы задач моделирования и численного анализа нестационарных режимов работы газотранспортной системы // Восточно-Европейский журнал. 2010. №3/6(45). С. 26-32.
8. Селезнев В. Е., Алешин В. В., Прялов С. Н. Основы численного моделирования магистральных газопроводов / Под ред. В. Е. Селезнева. Москва : КомКнига, 2005. 496 с.
9. Chen, Z. Finite Elements Methods and Their Applications. Leipzig : Springer-Yerlag Berlin Heidelberg, 2005. 410 p.
10. Каминская А. В., Гусарова И. Г. Численный анализ режимов работы газораспределительных сетей высокого давления // Радиоэлектроника и информатика. 2011. №3(54). С. 50-54.
11. Гусарова И. Г., Мелиневский Д. В. Численное моделирование переходных режимов течения газа с использованием различных конечно-разностных сеток // Системи обробки інформації. 2017. № 2. С. 29-33.
12. Ревегук Р. В. Применение неравномерной сетки и упрощенного

метода Ньютона при моделюванні нестационарних режимів течія газу // 23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2019. С. 70-71.

13. Гусарова І.Г., Ревегук Р.В. Результати чисельного моделювання нестационарних режимів з використанням спрощеного методу Ньютона // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційна безпека та інформаційні технології»: Кропивницький: ЦНТУ, 2020. С. 34.

14. Гусарова І.Г., Солов'єв А.М. Применение метода Бройдена при моделировании нестационарных режимов течения газа // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми і перспективи розвитку ІТ-індустрії» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 19-20 квітня 2018 р.). Харків : ХНЕУ імені Семена Кузнеця, 2018. С. 12.

15. Гусарова І.Г., Солов'єв А.М. Применение метода Бройдена при моделировании нестационарных режимов течения газа по участку трубопровода // 22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 17-19 квітня 2018 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2018. С. 110–111,

16. Гусарова І.Г., Солов'єв О.М. Результати чисельного моделювання нестационарних режимів з використанням методу Бройдена // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційна безпека та інформаційні технології» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 24-25 квітня 2019 р.). Харків : ХНЕУ імені Семена Кузнеця, 2019. С. 26.

17. Гусарова І.Г., Солов'єв О.М. Застосування методу Бройдена при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів течії газу // Системи обробки інформації. 2019. № 2(157). С. 33–39.

18. Xiaoyong X., Hongwei Y. A new class of methods with higher order of convergence for solving systems of nonlinear equations // Applied Mathematics and Computation, 2015. № 264. P. 300–309.