

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ В СЕТЕВЫХ СИСТЕМАХ

А. А. Волков, В. П. Авраменко

Харьков

Рассматриваемый алгоритм позволяет найти оптимальное установившееся потокораспределение в сетевых системах, к которым относятся электрические и радиотехнические цепи, пневматические и гидравлические сети, а также задачи сетевого планирования типа ПЕРТ.

Геометрию сетевой системы можно задать двумя векторами X и Y , составляющие которых $x \in X$ и $y \in Y$ — соответственно вершины и дуги графа сети. Начальной вершиной x_0 назовем вершину графа, в которую не входит ни одна дуга. Отбросим все дуги, выходящие из x_0 . Той вершине укороченного графа, в которую не входит ни одна дуга, присваивается индекс x_1 . Аналогично присваиваются возрастающие индексы стальным вершинам. Конечная вершина x_n не имеет выходящих дуг.

Последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей совпадает с началом следующей, назовем путем в графе сети. Каждой дуге поставим в соответствие некоторое число, называемое длиной дуги, физическая сущность которого определяется природой рассматриваемой сети. Сумму всех длин дуг, принадлежащих данному пути, назовем длиной пути.

Алгоритм оптимального управления состоит из двух этапов. На первом этапе отыскиваем путь максимальной длины, а на втором этапе — резервы длин дуг и уставки регулирующих органов.

В качестве примера рассмотрим синтез оптимального управления воздухораспределением в шахтной вентиляционной сети. В результате синтеза необходимо обеспечить заданное распределение воздуха в сети и выбрать режим работы вентилятора таким образом, чтобы на проветривание расходовалось минимальное количество электроэнергии.

Длина дуги в этом случае представляет теоретическую потерю давления, равную произведению сопротивления m_{ij} дуги на квадрат расхода воздуха q_{ij} между вершинами j и i .

На первом этапе синтеза находим критический путь, численное значение которого равно максимальной суммарной потере давления в сети, а на втором этапе синтеза — резервы давления между вершинами графа сети и сопротивления дросселирующих устройств, включение которых в дуги, не принадлежащие критическому пути, обеспечивает оптимальный, с точки зрения минимума энергозатрат, режим работы вентилятора.

Для нахождения критического пути вводим функцию состояния вершин $U = U(X, Y)$, составляющие которой $u \in U$ представляют давление воздуха в вершине графа сети относительно давления в вершине x_0 . Выберем такую последовательность вершин, когда переход из одной

вершины в другую удовлетворяет функциональному уравнению Р. Беллмана¹

$$U^* = \max_{y \in Y} U(X, Y).$$

Из этого уравнения вытекают следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} U_0^* &= 0; \quad U_1^* = U_0^* + h_{01}; \\ U_2^* &= \max_{y_2 \in Y} U_2 = \max_{y_2 \in Y} (U_1^* + h_{12}, U_0^* + h_{02}); \\ &\dots \dots \dots \\ U_n^* &= \max_{y_n \in Y} U_n = \max_{y_n \in Y} (U_{n-1}^* + h_{n-1n}, \dots, U_0^* + h_{0n}), \end{aligned} \quad (1)$$

где h_{ij} — длина дуги, входящей в вершину x_i .

В результате n шагов максимизации выражения (1) определяем значение U_n^* , численно равное длине критического пути.

Чтобы найти резервы давления в дугах, не принадлежащих критическому пути, следует минимизировать новую функцию состояния вершин $V = V(X, Y)$ той же природы, что и функция $U = U(X, Y)$, с помощью рекуррентных соотношений, двойственных к выражению (1), а именно:

$$\begin{aligned} V_n^* &= U_n^*; \quad V_{n-1}^* = V_n^* - h_{n-1n}; \\ V_{n-2}^* &= \min_{y_{n-2} \in Y} V_{n-2} = \min_{y_{n-2} \in Y} (V_{n-1}^* - h_{n-2, n-1}, V_n^* - h_{n-2n}); \\ &\dots \dots \dots \\ V_0^* &= \min_{y_0 \in Y} V_0 = \min_{y_0 \in Y} (V_1^* - h_{01}, \dots, V_n^* - h_{0n}). \end{aligned} \quad (2)$$

Воспользовавшись численными значениями функций состояния вершин (1) и (2), определим резерв давления в дугах

$$\Delta h_{ij} = V_j^* - U_i^* - h_{ij}. \quad (3)$$

По заданным расходам воздуха q_{ij} и резервам давления Δh_{ij} отыскиваем величины сопротивлений дросселирующих устройств μ_{ij} , включение которых в соответствующие дуги обеспечивает оптимальное воздухораспределение в сети.

Для иллюстрации изложенного алгоритма рассмотрим пример синтеза оптимального управления потокораспределением в шахтной вентиляционной сети, граф которой приведен на рис. 1, а параметры дуг — в табл. 1.

Таблица 1

	y_{01}	y_{12}	y_{13}	y_{23}	y_{24}	y_{35}	y_{45}	y_{46}	y_{56}
m_{ij}	0,10	0,07	0,09	0,08	0,05	0,06	0,04	0,02	0,03
q_{ij}	40,0	30,0	10,0	10,0	20,0	20,0	10,0	10,0	30,0
h_{ij}	160	63,0	9,00	3,00	20,0	24,0	4,00	2,00	27,0

После упорядоченной нумерации вершин графа сети согласно выражению (1), отыскиваем критический путь

$$U_0^* = 0; \quad U_1^* = U_0^* + h_{01} = h_{01} = 160.$$

¹ Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», 1963.

$$\begin{aligned}
 U_2^* &= U_1^* + h_{12} = h_{01} + h_{12} = 223; \\
 U_3^* &= \max(U_2^* + h_{23}, U_1^* + h_{13}) = h_{01} + h_{12} + h_{23} = 231; \\
 U_4^* &= U_2^* + h_{24} = h_{01} + h_{12} + h_{24} = 243; \\
 U_5^* &= \max(U_4^* + h_{45}, U_3^* + h_{35}) = h_{01} + h_{12} + h_{23} + h_{35} = 255; \\
 U_6^* &= \max(U_5^* + h_{56}, U_4^* + h_{46}) = h_{01} + h_{12} + h_{23} + h_{35} + h_{56} = 282.
 \end{aligned}$$

Используя соотношения (2), находим

$$\begin{aligned}
 V_6^* &= U_6^* = 282; V_5^* = V_6^* - h_{56} = U_5^* = 255; \\
 V_4^* &= \min(V_5^* - h_{45}, V_6^* - h_{46}) = V_5^* - h_{45} = 251 \\
 V_3^* &= V_5^* - h_{35} = U_3^* = 231; \\
 V_2^* &= \min(V_3^* - h_{23}, V_4^* - h_{24}) = U_2^* = 223; \\
 V_1^* &= \min(V_2^* - h_{12}, V_3^* - h_{13}) = U_1^* = 160; V_0^* = U_0^* = 0.
 \end{aligned}$$

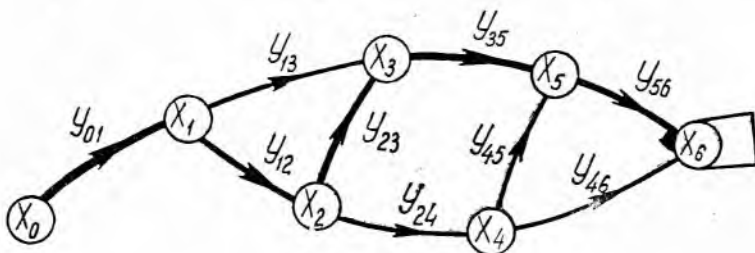


Рис. 1.

Резерв давления в дугах определяем по формуле (3)

$$\begin{aligned}
 \Delta h_{13} &= V_3^* - U_1^* - h_{13} = 62; \Delta h_{24} = V_4^* - U_2^* - h_{24} = 8,0; \\
 \Delta h_{45} &= V_5^* - U_4^* - h_{45} = 8,0; \Delta h_{46} = V_6^* - U_4^* - h_{46} = 37.
 \end{aligned}$$

Сопровождающие дросселирующие устройства, вычисленные по формуле

$$\mu_i = \Delta h_{ij} : q_{ij}^2,$$

имеют следующие значения:

$$\mu_{13} = 0,62; \mu_{24} = 0,02; \mu_{45} = 0,08; \mu_{46} = 0,37.$$

Алгоритм оптимального управления справедлив для сетей, содержащих произвольное количество начальных и конечных вершин, в этом случае граф может содержать несколько критических путей. Чтобы сократить время синтеза, минимизацию функции $V = V(X, Y)$ выполняем для вершин, не принадлежащих критическим путям, а для вершин, расположенных на критических путях, имеем соотношения $V_i^* = U_i^*$.

Рассмотрим общий случай определения оптимального воздухораспределения в шахтной вентиляционной сети, граф которой приведен на рис. 2, а параметры дуг — в табл. 2.

На первом этапе синтеза согласно выражению (1), находим критические пути в графе сети

$$\begin{aligned}
 U_0^* &= 0; U_1^* = U_0^* + h_{01} = h_{01} = 242; U_2^* = U_1^* + h_{12} = h_{01} + h_{12} = 278; \\
 U_3^* &= \max(U_2^* + h_{23}, U_1^* + h_{13}) = h_{01} + h_{12} + h_{23} = 279,25;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_4^* &= \max (U_3^* + h_{34}, U_2^* + h_{24}) = h_{01} + h_{12} + h_{24} = 284,75, \\
 U_5^* &= \max (U_4^* + h_{45}, U_3^* + h_{35}) = h_{01} + h_{12} + h_{24} + h_{45} = 285,75 \\
 U_6^* &= \max (U_4^* + h_{46}, U_2^* + h_{26}) = h_{01} + h_{12} + h_{24} + h_{46} = 285,75; \\
 U_7^* &= \max (U_5^* + h_{57}, U_1^* + h_{17}) = h_{01} + h_{17} = 303,75; \\
 U_8^* &= \max (U_6^* + h_{68}, U_1^* + h_{18}) = h_{01} + h_{12} + h_{24} + h_{46} + h_{68} = 301,75; \\
 U_9^* &= U_7^* + h_{79} = h_{01} + h_{17} + h_{79} = 663,25; \\
 U_{10}^* &= U_8^* + h_{810} = h_{01} + h_{12} + h_{24} + h_{46} + h_{68} + h_{810} = 551,75.
 \end{aligned}$$

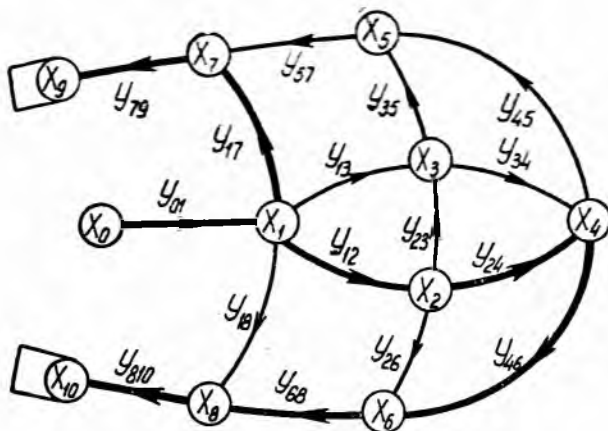


Рис. 2.

Таблица 2

	y_{01}	y_{12}	y_{13}	y_{17}	y_{18}	y_{23}	y_{24}	y_{26}	y_{34}	y_{35}	y_{45}	y_{46}	y_{57}	y_{68}	y_{79}	y_{810}
m_{ij}	0,02	0,04	0,02	0,05	0,05	0,05	0,03	0,02	0,05	0,02	0,01	0,01	0,02	0,04	0,10	0,10
q_{ij}	110	30,0	15,0	35,0	30,0	5,00	15,0	10,0	5,00	15,0	10,0	10,0	25,0	20,0	60,0	50,0
h_{ij}	242	36,0	4,50	61,25	45,0	1,25	6,75	2,00	1,25	4,50	1,00	1,00	12,5	16,0	360	250

На втором этапе синтеза находим значения функции состояния вершин $V = V(X, Y)$

$$\begin{aligned}
 V_{10}^* &= 551,75; V_9^* = 663,25; V_8^* = 301,75; \\
 V_7^* &= 303,25; V_6^* = 285,75; V_5^* = V_7^* - h_{57} = 290,75; \\
 V_4^* &= 284,75; V_3^* = \min (V_4^* - h_{34}, V_5^* - h_{35}) = V_4^* - h_{34} = \\
 &= 283,5; V_2^* = 278; V_1^* = 242; V_0^* = 0;
 \end{aligned}$$

резервы давления в дугах

$$\begin{aligned}
 \Delta h_{13} &= V_3^* - U_1^* - h_{13} = 37; \Delta h_{18} = V_8^* - U_1^* - h_{18} = 14,75; \\
 \Delta h_{23} &= V_3^* - U_2^* - h_{23} = 4,25; \Delta h_{26} = V_6^* - U_2^* - h_{26} = 5,75; \\
 \Delta h_{34} &= V_4^* - U_3^* - h_{34} = 1,25; \Delta h_{35} = V_5^* - U_3^* - h_{35} = 7,0;
 \end{aligned}$$

$$\Delta h_{45} = V_5^* - U_4^* - h_{45} = 5,0; \Delta h_{57} = V_7^* - U_5^* - h_{57} = 5,0;$$

и сопротивления дросселирующих устройств

$$\mu_{13} = 0,164; \mu_{18} = 0,0164; \mu_{23} = 4,25; \mu_{28} = 5,75;$$

$$\mu_{34} = 0,05; \mu_{35} = 0,03; \mu_{45} = 0,05; \mu_{57} = 0,01.$$

Итак, алгоритм оптимального управления, в основе которого лежит упорядоченная нумерация вершин графа сети и рекуррентные соотношения, вытекающие из функционального уравнения Р. Беллмана, позволяет сравнительно легко определить уставки регулирующих органов (дросселирующих устройств), обеспечивающие оптимальное установившееся потокораспределение в сетевой системе.
