УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК, ОТОБРАЖЕННОМ В R^n

ГРЕБЕННИК И.В., ЛАПКО Д.А.

Исследуется задача оптимизации линейной функции на евклидовом комбинаторном множестве перестановок, отображенном в пространство R^n. Описывается метод, основанный на процедуре последовательного покрытия области допустимых решений задачи оптимизации множествами специального вида. Приводятся примеры, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Введение

Задачи комбинаторной оптимизации решаются при моделировании многих прикладных и научных проблем. **Актуальность** задач этого класса подтверждается множеством публикаций, посвященных различным аспектам решения экстремальных задач с дискретными параметрами [1-7]. Высокая вычислительная сложность методов комбинаторной оптимизации и отсутствие единого подхода к решению задач приводит к необходимости их классификации и разработки методов решения задач каждого класса с учетом их свойств.

Одной из наиболее распространенных на практике комбинаторных моделей является задача оптимизации линейной функции на множестве перестановок с дополнительными линейными ограничениями. Модели этого класса широко используются при решении задач геометрического проектирования [3,5,7]. Подходы к оптимизации линейных функций с линейными ограничениями на множестве перестановок приведены в [1-3]. Все они отличаются весьма значительными вычислительными затратами при решении задач средней и большой размерности.

Целью настоящей работы является разработка и исследование метода оптимизации линейных функций на множестве перестановок с линейными ограничениями.

В основе предлагаемого подхода к лежит идея покрытия ее области допустимых решений множествами специального вида. Каждое из указанных множеств обладает тем свойством, что решение задачи не может быть его внутренней точкой. В результате процедуры покрытия последовательно сужается область, содержащая решение задачи. Настоящая работа является продолжением исследований, изложенных в [4] для случая, когда система ограничений (2) содержит только одно неравенство. Ниже приводится метод покрытия для решения задачи оптимизации линейной функции на множестве перестановок с *m* линейными ограничениями-неравенствами.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации линейной функции на множестве перестановок, отображенном в евклидово пространство в следующей постановке:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \to \min ; \tag{1}$$

$$Cx \le d ; \tag{2}$$

$$x_i \ge 0 , \ i = 1,...,n ; \tag{3}$$

$$x \in E_{nk} \subset R^n , \tag{4}$$

где $C = [C_{ij}]_{m \times n}$, $C_{ij} \in R$, $d \in R^n$, E_{nk} —множество векторов в R^n, координаты которых представляют собой перестановки из *n* элементов $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$, *k* из которых предполагаются различными.

Известно, что элементы множества E_{nk} и только они являются вершинами перестановочного многогранника $\Pi_{nk} = \operatorname{conv} E_{nk}$, структура и свойства которого исследованы в [5-7].

Будем считать, что система ограничений (2)−(4) совместна, т.е. существует хотя бы одна точка множества E_{nk}, удовлетворяющая соотношениям (2), (3).

Рассмотрим некоторые свойства области определения задачи оптимизации (1)-(4).

1. Минимальная из длин рёбер перестановочного многогранника Π_{nk}, порожденного числами $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$, равна [5]:

$$r_m = \Delta a \cdot \sqrt{2} , \tag{5}$$

где $\Delta a = \min | a_{i_r} - a_{i_t} |, \quad a_{i_r} \ne a_{i_t}$,

$| i_r - i_t | = 1, \quad i_t, i_r t, r \in J_n$.

2. Точки множества E_{nk} удовлетворяют равенству $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$ [5].

3. Пусть $x \in R^n$ − произвольная точка. Определим точку $y^0 \in E_{nk}$, ближайшую к точке *x*. Точка y^0 может быть легко найдена как решение задачи [6]

$$y^0 = \arg \min_{y \in E_{nk}} \|x - y\|^2 ,$$

здесь $y^0{}_{k_j} = a_j, \quad j \in J_n$, а последовательность $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ такова, что $x_{k_1} \le x_{k_2} \le ... \le x_{k_n}$.

Рассмотрим шар B_{y^0} с центром в точке x и радиусом $r_{y^0} = \| x - y^0 \|$:

$$B_{y^0} = \{h \mid h \in R^n, \| h - x \| \le r_{y^0}\} . \tag{6}$$

Обозначим через S_{y^0} сферу, которая является границей шара B_{y^0}. Поскольку y^0 − ближайшая к x точка множества E_{nk}, то ни одна из точек множества E_{nk} не является внутренней точкой шара B_{y^0}.

4. Пусть $y^i \in E_{nk}$ – произвольно выбранная точка. Построим шар B_{y^i} с центром в точке y^i и радиусом r_m, равным минимальной длине ребра многогранника Π_{nk}:

$$B_{y^i} = \{x \mid x \in R^n, \| x - y^i \| \le r_m\}. \qquad (7)$$

Сферу, которая является границей шара B_{y^i}, обозначим S_{y^i}. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Минимальное расстояние между двумя вершинами многогранника Π_{nk} (также как и между двумя точками E_{nk}) равно минимальной длине ребра Π_{nk} r_m, определяемой соотношением* (5).

Доказательство. Пусть $\alpha = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n})$ – произвольная вершина Π_{nk}. Как следует из критерия смежности вершин перестановочного многогранника [5,7], вершины, смежные с α, имеют вид: $\beta = (a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n})$. При этом каждая из последовательностей $(j_1, j_2, ..., j_n)$ получена из $(i_1, i_2, ..., i_n)$ в результате транспозиции пары индексов i_r и i_t, таких что

$$|i_r - i_t| = 1, \quad a_{i_r} \ne a_{i_t}, \quad r, t \in J_n. \qquad (8)$$

Найдём такие i_{r^0} и i_{t^0}, что

$$|a_{i_{r^0}} - a_{i_{t^0}}| = \min_{i,j \in J_n,\, a_i \ne a_j,\, |i-j|=1} |a_i - a_j|.$$

Вершину β, смежную с α, которая получена из неё путём транспозиции значений координат $a_{i_{r^0}}$ и $a_{i_{t^0}}$, обозначим β_1.

Тогда $r_m = \|\alpha - \beta_1\| = \sqrt{2(a_{i_{r^0}} - a_{i_{t^0}})^2}$. Предположим, что существует вершина Π_{nk} $\gamma = (a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_n})$, которая находится ближе к вершине α, чем β_1. Тогда

$$\|\alpha - \gamma\| = \sqrt{(a_{i_1} - a_{k_1})^2 + (a_{i_2} - a_{k_2})^2 + ... + (a_{i_n} - a_{k_n})^2} <$$

$$< r_m = \sqrt{2(a_{i_{r^0}} - a_{i_{t^0}})}.$$

Рассмотрим две ситуации:

а) Вершина γ является смежной с α. Тогда она может быть получена из α транспозицией пары значений координат $a_{i_{r^1}}$ и $a_{i_{t^1}}$, таких что

$$|i_{r^1} - i_{t^1}| = 1, \quad a_{i_{r^1}} \ne a_{i_{t^1}}.$$

В этом случае $\|\alpha - \gamma\| = \sqrt{2(a_{i_{r^1}} - a_{i_{t^1}})^2} > r_m$.

б) Вершина γ не является смежной с α. Тогда она может быть получена из α либо путём транспозиции одной пары значений координат $a_{i_{r^2}}, a_{i_{t^2}}$, не удовлетворяющих условию (8), либо путём большего количества транспозиций. В первом случае

$$\|\alpha - \gamma\| = \sqrt{2(a_{i_{r^2}} - a_{i_{t^2}})^2} > r_m.$$

Во втором – вершины α и γ отличаются значениями s координат. Тогда

$$\|\alpha - \gamma\| = \sqrt{(a_{i^1} - a_{k^1})^2 + (a_{i^2} - a_{k^2})^2 + ... + (a_{i^n} - a_{k^n})^2} >$$

$$> \sqrt{s(a_{r^0} - a_{t^0})^2} > r_m.$$

Полученные соотношения противоречат предположению о существовании вершины γ, более близкой к α, чем построенная вершина β_1. В силу произвольности выбора вершины α приходим к справедливости утверждения теоремы.

На основании доказанного утверждения можно сделать вывод о том, что ни одна точка множества E_{nk}, за исключением y^i, не является внутренней точкой шара B_{y^i}.

5. Рассмотрим сферы S_{y^0} и S_{y^i} – границы шаров B_{y^0} и B_{y^i}. Построим гиперкубы Π_{y^0} и Π_{y^i}, вписанные в сферы S_{y^0} и S_{y^i}. Способ построения кубов для обеих сфер одинаков. Центр вписанного куба совпадает с центром описанной сферы. Длина ребра вписанного гиперкуба определяется как [8]:

$p = \frac{2r}{\sqrt{n}}$, где r – радиус описанной сферы. Ясно, что построенные таким образом гиперкубы обладают свойством шаров B_{y^0}, B_{y^i}: гиперкуб Π_{y^0} не содержит внутри ни одной точки E_{nk}, а гиперкуб $\bar{\Pi}_{y^i}$ содержит единственную точку E_{nk} – центр куба y^i.

На основании указанных свойств преобразуем исходную задачу оптимизации (1)-(4) к эквивалентному виду, дополнив её систему ограничений:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \to \min, \qquad (9)$$

$$Cx \le d; \qquad (10)$$

$$x_i \ge 0, \quad i \in J_n; \qquad (11)$$

$$a_1 \le x_i \le a_n, \quad i \in J_n; \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i; \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \le b^*; \qquad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ge b_*; \qquad (15)$$

$$x \in E_{nk} \subset R^n; \qquad (16)$$

где b^* и b_* – верхняя и нижняя оценки минимума функции цели (9), которые получаются следующим образом:

$b^* = \min\{b_1^*, b_2^*\}$, $b_1^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i$,где $\bar{x} = \arg\max_{x \in E_{nk}} L(x)$;

$$b_2^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{x}_i \text{ , где } \hat{x} = \arg\max_{x \in Y} L(x) \text{ ,}$$

$Y = \{x \in R^n \mid Cx \le d, x_i \ge 0, i \in J_n, a_1 \le x_i \le a_n, i \in J_n,$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\}$, $b_* = \max\{b_*^1, b_*^2\}$, $b_*^1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i$,

здесь $\bar{y} = \arg\min_{x \in E_{nk}} L(x)$, $b_*^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{y}_i$,

где $\hat{y} = \arg\min_{x \in Y} L(x)$.

Отметим, что задача оптимизации (9)-(16) эквивалентна задаче (1)-(4). Это следует из перечисленных свойств области допустимых решений задачи (1)-(4). Переход к задаче оптимизации (9)-(16) сделан для того, чтобы локализовать область поиска решений исходной задачи и сделать эту область ограниченной независимо от ограниченности и неограниченности системы неравенств (2).

Обозначим Ω множество, которое описывается линейными соотношениями (10)-(15). Оно представляет собой область допустимых решений задачи оптимизации (9)-(15) без условия принадлежности переменных множеству E_{nk}.

Решим следующую задачу:

$$L(x) \to \min, \quad x \in \Omega; \quad h = \arg\min_{x \in \Omega} L(x).$$

Если $h \in E_{nk}$, то h – решение исходной задачи оптимизации. В противном случае h – начальная точка поиска решения задачи.

Осуществим покрытие области Ω множествами со специальными свойствами. Эти свойства заключаются в том, что указанные множества либо не содержат внутри точек E_{nk}, либо содержат только известные заранее точки E_{nk}. В результате такого покрытия можно исключить из рассмотрения все те точки области Ω, которые не принадлежат E_{nk} и, следовательно, не могут быть решением задачи (9)-(16). Поиск решения при этом сводится к анализу конечного и в достаточной степени ограниченного множества точек E_{nk}, найденных при построении покрывающих область Ω множеств. В качестве таких множеств можно использовать шары B_{y^0} и B_{y^i} вида (6)-(7), обладающие указанным выше свойством. Однако для решения задачи покрытия удобнее использовать вписанные в границы шаров S_{y^0} и S_{y^i} гиперкубы Π_{y^0} и $\bar{\Pi}_{y^i}$. Применение гиперкубов при покрытии даёт возможность избежать пропусков частей области Ω за счёт их плотного расположения.

Для задания ориентации граней гиперкубов в процессе покрытия области Ω построим ортонормированную систему векторов

$$b^1, b^2, ..., b^n, b^i \in R^n, i \in J_n.$$

Вектор b^1 является нормальным вектором гиперплоскостей поверхностей равного уровня функции цели (1):

$$b^1 = (b_1^1, b_2^1, ..., b_n^1), \; b_i^1 = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}}, \quad i \in J_n.$$

Векторы $b^2, ..., b^n$ строятся следующим образом. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – ортонормированный базис пространства R^n. Среди n базисных векторов выберем n-1 вектор таким образом, чтобы вместе с b^1 они образовали линейно-независимую систему векторов. Это можно сделать, исключив из множества $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ вектор e_i, такой что $b_i^1 \ne 0$.

Ортогонализуем векторы $b^1, e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n$, оставив без изменения вектор b^1. Полученную ортонормированную систему обозначим $b^1, b^2, ..., b^n$.

Опишем процесс покрытия области Ω. Представим его в виде двух чередующихся этапов. Первый этап состоит в формировании «слоя», при котором построение гиперкубов происходит в направлениях $b^2, ..., b^n$. Толщина «слоя» в направлении b^1 определяется минимальной длиной ребра гиперкубов, построенных при формировании слоя. Второй этап – шаг в направлении b^1, которое далее будем называть главным. В этом направлении производится уменьшение области Ω путем исключения из неё построенного слоя. При этом увеличивается правая часть b_* ограничения (15).

Как было показано выше, построение гиперкубов Π_{y^0} и $\bar{\Pi}_{y^i}$ связано с определением точки y^i из множества E_{nk}, ближайшей к заданной точке и лежащей на сфере S_{y^0} или S_{y^i}. В случае, если точка y^i является допустимой, она будет точкой верхней оценки решения исходной задачи. Тогда ограничение (14) может быть заменено более сильным, уменьшающим область Ω:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^i = b^*.$$

В процессе покрытия поиск допустимых точек $y \in E_{nk}$ и построение гиперкубов осуществляется при движении в направлении b^n. Центры гиперкубов при этом лежат на прямой:

$$l = h + b^n t, \quad t \in R, \qquad (17)$$

причём центр следующего гиперкуба лежит на грани предыдущего. Для построения каждого гиперкуба выбирается одна из двух схем 1 или 2, в результате чего строится соответственно гиперкуб Π_{y^0} или $\bar{\Pi}_{y^i}$. Условием выбора схемы является «полезный» объём покрываемой части области Ω. В результате применения схемы 1 строится гиперкуб Π_{y^0}, вписанный в сферу S_{y^0} – границу шара

B_{y^0} вида (6). Длина ребра Π_{y^0} определяется радиусом r_{y^0} описанной сферы S_{y^0}, который равен расстоянию от точки h до ближайшей к h точки множества E_{nk}. В случае, если радиус r_{y^0} мал, построенный гиперкуб Π_{y^0} будет иметь небольшой объём. Это приведёт к тому, что длина ребра малого Π_{y^0} будет определять величину шага во всех направлениях при построении гиперкубов в процессе покрытия. При приближении к точке y^0 покрываемая такими гиперкубами часть области Ω будет уменьшаться. В ситуации, когда y^0 лежит на прямой (17), произойдёт построение бесконечной последовательности шаров со стремящимися к нулю радиусами. Процесс покрытия области Ω при этом не завершится.

Описанный недостаток схемы 1 устраняет схема 2. Построенный по этой схеме гиперкуб $\overline{\Pi}_{y^i}$ вписан в сферу, радиус которой равен длине минимального ребра многогранника Π_{nk}. Однако центр гиперкуба $\overline{\Pi}_{y^i}$ – точка y^i – может не лежать на прямой $l = h + b^1 t$, что приведёт к малой толщине слоя в одном из направлений, а значит и в главном. В результате эффект от использования гиперкуба $\overline{\Pi}_{y^i}$, построенного по схеме 2, может оказаться меньше, чем от построенного по схеме 1 гиперкуба Π_{y^0}. Поэтому для выбора схемы построения гиперкуба необходимо сформулировать условие. Оно может быть сформулировано на основе расстояния l от точки y^i до прямой (17). Если $l < \frac{r_m}{4}$, выбираем схему 2, в противном случае строим гиперкуб Π_{y^0} по схеме 1.

Анализ представленного метода показывает следующее: если предположить, что по каждому из направлений количество шагов метода ограничено константой q, то общее число шагов будет равно q^n. Таким образом, решив неравенство

$$C \cdot q^n \geq n! \qquad (18)$$

для целого n, получим размерность задачи, начиная с которой при данных линейных ограничениях метод работает лучше полного перебора. При этом константа *C* отражает условное отношение сложности одного шага метода покрытия к одному шагу перебора. Константа q определяется исходя из величины области, задаваемой линейными ограничениями (10-16). Так, для q=4 и C=10 неравенство (18) имеет решение n=12.

Описанный метод покрытия был реализован в среде MatLab. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили его работоспособность. Однако при больших значениях n для получения решения требуются значительные вычислительные затраты, что ограничивает область применения метода покрытия.

Рассмотрим пример. Задача размерности 10. Линейная функция вида (1) имеет коэффициенты (100.0, 1.0, 12.0, 12.56, 1.0, 2.0, 23.0, 233.0, 123.0, 244.0) при линейных ограничениях $Cx \leq d$, где C – матрица размерности $2n \times n$, состоящая из двух блоков, C=|E/(-E)|, E – единичная матрица, а *d* равно (11, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, -10, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -4, -9, -1). Такие ограничения задают допустимое множество в виде n-мерного куба с длиной ребра 1. При решении задачи стартовой стала точка (10.0, 3.0, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 4.5, 9.0, 2.0). Решение было получено за 10,27 секунды, при этом было сделано 1024 шага, что соответствует 2^{10} шагов – прямой и обратный шаг в каждом направлении. Решение задачи – точка (10, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 5, 9, 1).

Более сложный пример: целевая функция и левая часть ограничений имеют тот же вид, а вектор d, равный (11, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 9, 1), задаёт куб с размерами в каждом направлении соответственно: (5.6, 10.2, 3.2, 4.2, 5.0, 6.0, 7.4, 9.0, 8.5, 2.0). Решение задачи было получено за 3,71 минуты, при этом было сделано 41852 шагов. Решение достигается в вершине (10, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 2, 9, 1).

Выводы. Изложенный метод покрытия оптимизации линейных функций с линейными ограничениями на перестановочном многограннике может быть использован для решения задач геометрического проектирования, управления и др. При этом, как следует из анализа метода и вычислительных экспериментов, наибольшая эффективность его применения достигается в задачах небольшой и средней размерности.

Литература: 1. *Яковлев С.В., Валуйская О.А.* О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учётом линейных ограничений // Доп. НАНУ. 1999, №11. С.103-107. 2. *Емец О.А.* Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации. // Экономика и мат. методы. 1997. Т. 33. Вып. 4. С.120-129. 3. *Емец О.А., Емец Е.М., Колечкина Л.Н.* Использование метода отсечений при раскрое // Радиоэлектроника и информатика. 1998. №3. С. 114-117. 4. *Гребенник И.В.* Решение некоторых задач условной оптимизации линейных функций на перестановочном многограннике // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №1. С. 55-59 . 5. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268с. 6. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. №3. С. 238-240. 7. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: ІІСДО, 1993. 88 с. 8. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

Поступила в редколлегию 14.11.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Новожилова М.В.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: волейбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-10-06.

Лапко Дмитрий Александрович, студент 5-го курса ХНУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: классическая гитара. Адрес: 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-10-06.